CHUYÊN ĐỀ

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Hoàng Thanh Thủy

Mục lục

1 Định nghĩa và các tính chất

1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền D. Ta nói rằng M là GTLN của $f(x)$ trên D, nếu như đồng thời thoả mãn hai điều kiện sau đây:

1. $f(x) \leq M \forall x \in D$
2. Tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$

Khi đó kí hiệu $M = \max\limits_{D} f(x)$ Ta nói rằng m là GTNN của $f(x)$ trên D, nếu như đồng thời thoả mãn hai điều kiện sau đây:

1. $f(x) \geq m \forall x \in D$
2. Tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$

Khi đó kí hiệu $m = \min\limits_{D} f(x)$

Chú ý:

- Khi nói đến GTLN hoặc GTNN của một hàm số bao giờ cũng phải biết nó xác định trên tập hợp nào.
  Cùng một hàm số $f(x)$ nhưng nếu xác định trên các tập khác nhau thì nói chung các GTLN, GTNN tương ứng là khác nhau.
- Để cho thuận tiện, phù hợp với chương trình của các lớp phổ thông, trong tài liệu này khi đề cập đến GTLN, GTNN trên tập hợp nào đó, ta luôn giả thiết là chúng có tồn tại.

1.2 Tính chất của GTLN, GTNN

1.2.1 Tính chất 1:

Giả sử $A \subset B$, khi đó ta có:

1. $\max\limits_{x \in A} f(x) \leq \max\limits_{x \in B} f(x)$
2. $\min\limits_{x \in A} f(x) \leq \min\limits_{x \in B} f(x)$

1.2.2 Tính chất 2:

Giả sử $D = D_1 \cup D_2$. Khi đó ta có các công thức sau:

1. $\max\limits_{x \in D} f(x) = \max\{\max\limits_{x \in D_1} f(x), \max\limits_{x \in D_2} f(x)\}$
2. $\min\limits_{x \in D} f(x) = \min\{\min\limits_{x \in D_1} f(x), \min\limits_{x \in D_2} f(x)\}$

Tính chất trên cho phép ta chuyển việc tìm GTLN, GTNN của một hàm số trên tập D phức tạp về việc tìm các giá trị tương ứng trên các tập D_1, D_2 đơn giản hơn.
Tổng quát ta có thể viết D thành hợp của n tập khác nhau.

1.2.3 Tính chất 3:

Nếu $f(x) \geq 0 \forall x \in D$ ta có:

$$\max_D f(x) = \sqrt{\max_D f^2(x)}$$

$$\min_D f(x) = \sqrt{\min_D f^2(x)}$$

Tính chất trên cho phép ta thay thế việc tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ về việc tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f^2(x)$ nếu biết rằng $f(x) \geq 0, \forall x \in D$. Điều này rất hay dùng nếu $f(x)$ có chứa căn thức hoặc dấu giá trị tuyệt đối.

1.2.4 Tính chất 4:

1. $\max\limits_D(f(x) + g(x)) \leq \max\limits_D f(x) + \max\limits_D g(x)$

2. $\min\limits_D(f(x) + g(x)) \geq \min\limits_D f(x) + \min\limits_D g(x)$

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi có ít nhất một điểm $x_0 \in D$ mà tại đó $f(x)$ và $g(x)$ cùng đạt GTLN.
Dấu bằng trong (2) xảy ra khi có ít nhất một điểm $x_1 \in D$ mà tại đó $f(x)$ và $g(x)$ cùng đạt GTNN.

1.2.5 Tính chất 5:

$$\max f(x) = -\min(-f(x))$$

2 Các phương pháp tìm GTLN, GTNN

2.1 Phương pháp hàm số

2.1.1 Nội dung phương pháp

Dùng đạo hàm để khảo sát hàm số, sau đó lập bảng biến thiên (nếu cần thiết) để từ đó giải quyết bài toán.Vì chúng ta chỉ khảo sát hàm số 1 biến nên để dùng được phương pháp này đôi khi phải thực hiện những phép biến đổi thích hợp để làm giảm số lượng biến, chẳng hạn, tính các biến còn lại theo một biến, đặt ẩn phụ.
Chú ý: Khi sử dụng phương pháp này nếu có các phép đổi biến thì ta phải tìm lại miền xác định.

2.1.2 Các ví dụ

Ví dụ 2.1.1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$y = \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Ta có

$$y' = \frac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2}.$$

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -2$. Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-1/3$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra
GTLN của hàm số là $\max y = y(0) = 1$.
GTNN của hàm số là $\min y = y(-2) = -\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 2.1.2. Tìm GTNN của $f(x, y) = -2x^2y + xy^2$ trên miền

$$D = \{(x; y) : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2\}.$$

Lời giải.
Nhận xét: Từ dạng của $f(x, y)$ ta thấy nếu coi một trong hai biến là hằng số thì giá trị của $f(x, y)$ hoàn toàn xác định theo biến đó. Ta có

$$\min_D f(x, y) = \min_{0\le y\le 2} \min_{0\le x\le 1} f(x, y).$$

Xét $g(x) = -2x^2y + xy^2$. Ta có

$$g'(x) = -4xy + y^2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		$y/4$		1	$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$		
$g(x)$		$g(0)$	$\nearrow$		$\searrow$	$g(1)$	

(Chú ý: do $0 \leq y \leq 2$ nên $0 \leq \dfrac{y}{4} < 1$)
Từ bảng biến thiên ta thấy

$$\begin{aligned}\min_{0\leq x\leq 1} g(x) &= \min\big(g(1); g(0)\big)\\ &= \min(0; y^2 - 2y)\\ &= y^2 - 2y.\end{aligned}$$

(Vì với $0 \leq y \leq 2$ thì $y^2 - 2y \leq 0$)
Suy ra

$$\min f(x, y) = \min_{0\leq y\leq 2}(y^2 - 2y) = -1.$$

Vậy $\min f(x, y) = -1$ khi $x = 1; y = 1$.

Ví dụ 2.1.3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$f(x) = \sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{1 + 2\sin x}$$

trên miền

$$D = \{x : 1 + 2\cos x \geq 0; 1 + 2\sin x \geq 0\}.$$

Lời giải.
Do $f(x) \geq 0, \forall x \in D$ nên việc tìm GTLN, GTNN của $f(x)$ có thể quy về tìm GTLN, GTNN của $f^2(x)$.
Xét

$$g(x) = f^2(x) = 1 + 2\cos x + 1 + 2\sin x + 2\sqrt{1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x\cos x}.$$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ thì $t = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 1 + 2\cos x \geq 0 \\ 1 + 2\sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq \frac{-1}{2} \\ \sin x \geq \frac{-1}{2} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{-5\pi}{12} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\
\Leftrightarrow\quad & \cos(\frac{5\pi}{12} + 2k\pi) \leq \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \leq \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{2} \leq t \leq \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Vậy bài toán quy về xét hàm

$$h(t) = 2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1}$$

trên miền

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

Ta có

$$h'(t) = 2 + 2.\frac{2t + 1}{\sqrt{2t^2 + 2t - 1}} > 0, \text{ với mọi } \frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

Do đó $h(t)$ đồng biến trên $D_1 = \left[\frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{2}; \sqrt{2}\right]$. Suy ra

$$\begin{aligned}
&\min h(t) = h\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{2}\right) = \sqrt{3} + 1 \\
&\max h(t) = h(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2} + 1).
\end{aligned}$$

Do mỗi $t \in D_1$ đều tồn tại $x \in D$ nên

$$\begin{aligned}
&\min g(x) = \sqrt{3} + 1 \\
&\max g(x) = 4(\sqrt{2} + 1).
\end{aligned}$$

Tóm lại, chúng ta sử dụng phương pháp này khi biểu thức đã cho có thể đưa về hàm số tính được đạo hàm. Và xin nhắc lại, khi bạn đặt ẩn mới thì điều kiện của ẩn mới phải là điều kiện chính xác, không được lấy điều kiện ảo.

Bài tập vận dụng

Bài tập 2.1.1. Tìm GTNN của hàm số

$$f(x) = (1 - x)(2 - y)(4x - 2y)$$

trên miền

$$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}.$$

Hướng dẫn giải: Tương tự Ví dụ 2.1.2.

Đáp số: $\min f(x, y) = -2$ khi $x = 0; y = 1$.

Bài tập 2.1.2. Tìm GTLN, GTNN của

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + 4} - \frac{1}{\cos x - 4}, \text{ khi } x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải: Tương tự Ví dụ 2.1.3, đặt $t = \cos x - \sin x$.

Đáp số: $\min f(x) = \dfrac{4}{8 + \sqrt{2}}; \max f(x) = \dfrac{4}{8 - \sqrt{2}}$.

Bài tập 2.1.3. Tìm GTLN, GTNN của:

a) $f(x) = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x|$

b) $f(x) = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x}$.

Hướng dẫn giải: Tương tự Ví dụ 2.1.3.

Bài tập 2.1.4. Tìm GTLN, GTNN của

$$y = \frac{\cos^2 x + \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}.$$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \tan x$.

Bài tập 2.1.5. (*Đại học Giao thông vận tải - 98*). Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$y = \sin\frac{2x}{1 + x^2} + \cos\frac{4x}{1 + x^2} + 1.$$

Hướng dẫn giải: Đặt $t = \sin\dfrac{2x}{1 + x^2}$ thì $-\sin 1 \leq t \leq \sin 1$. Khi đó

$$y = f(t) = -2t^2 + t + 2.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số.

Đáp số: $\min y = -2\sin^2 1 - \sin 1 + 2$ khi $x = \pm 1$ và $\max y = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{17}{8}$ khi $\sin\dfrac{2x}{1 + x^2} = \dfrac{1}{4}$.

Bài tập 2.1.6. (*Học viện QHQT - 99*). Cho x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1$. Tìm GTLN, GTNN của

$$P = \frac{x}{y + 1} + \frac{y}{x + 1}.$$

Hướng dẫn giải: Ta biến đổi

$$P = \frac{x(x + 1) + y(y + 1)}{(x + 1)(y + 1)} = \frac{(x + y)^2 - 2xy + 1}{xy + x + y + 1}$$
$$= \frac{2 - 2xy}{xy + 2}.$$

Đặt $t = xy$ thì $0 \leq t \leq \dfrac{1}{4}$, xét hàm số $f(t) = \dfrac{2 - 2t}{2 + t}$.

Đáp số: $\min P = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{2}{3}$ và $\max P = f(0) = 1$.

2.2 Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức

Nội dung tư tưởng của phương pháp:

Cho $A = f(x)$ có miền xác định là D. Để tìm GTLN, GTNN của A ta sẽ dùng các bất đẳng thức như: Côsi, Bunhiacopxki, Jensen, Trebưsep... để chứng minh $m \le f(x) \le M$ trong đó m, M là các hằng số. Sau đó phải chỉ ra được $x_1, x_2 \in D$ để $\begin{cases} m = f(x_1) \\ M = f(x_2) \end{cases}$

Cuối cùng kết luận: M là GTLN của A; m là GTNN của A.

Phần này nói riêng và các phần khác nói chung nếu chia nhỏ xem khi nào sử dụng bất đẳng thức Côsi, khi nào dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki,... khi nào đánh giá thế này, khi nào đánh giá thế kia thì quả thực sẽ rất dài dòng và có khi sẽ làm cho vấn đề trở nên rắc rối.

Vì vậy, mọi sự phân chia của chúng tôi chỉ có tính chất tương đối. Đối với mỗi phần, thậm chí mỗi ví dụ chúng tôi sẽ cố gắng trình bày một cách dễ hiểu nhất cả quá trình suy nghĩ, phân tích để tìm ra lời giải trước khi thực hiện chi tiết lời giải đó. Đưa ra quyết định như vậy cũng bởi vì chúng tôi muốn học sinh của mình trở thành chủ thể của mọi hoạt động, chủ động, sáng tạo trong quá trình tìm ra lời giải mỗi bài toán chứ không phải sẽ chỉ là người đọc sách theo một trình tự lặp đi lặp lại là " đề bài - lời giải", " đề bài - lời giải".....

2.2.1 Sử dụng bất đẳng thức Côsi

- Cho $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$. Khi đó

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

  Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

- Đặc biệt:

  ⋆ Khi $n = 2$ thì $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}$.

  ⋆ Khi $n = 3$ thì $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \ge \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$.

- Các kiểu viết khác thường gặp:

$$a + b \ge 2\sqrt{ab} \quad \forall a, b \ge 0.$$
$$a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \quad \forall a, b, c \ge 0.$$

- Những đánh giá kiểu bất đẳng thức Côsi:

$$(a + b)^2 \ge 4ab$$
$$a^2 + b^2 \ge 2ab.$$

Ví dụ 2.2.1. Tìm GTLN của

$$y = x\sqrt{1 - x^2}.$$

Phân tích:
Muốn tìm GTLN của một tích các thừa số mà muốn sử dụng bất đẳng thức Côsi thì phải đánh giá tích đó nhỏ hơn hoặc bằng tổng các số hạng, với điều kiện tổng các số hạng ấy sẽ dẫn tới một hằng số. *Lời giải.*
Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ ta có

$$x\sqrt{1-x^2} \leq \frac{x^2+1-x^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad & x = \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = 1 - x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Vậy GTNN của y là $\dfrac{1}{2}$ tại $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bình luận:
Số 1 trong $1-x^2$ có thể thay đổi được. Chỗ đánh giá quan trọng nhất đó là $a^2+b^2 = const$.
Vậy có thể sửa bài toán thành: Tìm GTLN của

$$\begin{aligned} y &= x\sqrt{2-x^2} \\ y &= x\sqrt{3-x^2} \\ &\ldots \\ \text{Tổng quát: } y &= x\sqrt{a-x^2} \end{aligned}$$

Sự khác nhau là điểm xảy ra dấu " = ".
Mở rộng:
Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số kiểu

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc.$$

Tìm GTLN của

$$\begin{aligned} y &= x^2.\sqrt[3]{1-2x^3} \\ y &= x^2.\sqrt[3]{2-2x^3} \\ y &= x^2.\sqrt[3]{a-2x^3} \end{aligned}$$

Học sinh cần xác định được đâu là a, b, c và tính được $a^3+b^3+c^3 = const$.

Ví dụ 2.2.2. Tìm GTNN của

$$y = x^3 + \frac{2007}{x^2} \quad (x > 0).$$

Phân tích:
Tìm GTNN của một tổng các số hạng mà muốn sử dụng bất đẳng thức Côsi thì phải đánh giá tổng đó lớn hơn hoặc bằng tích các thừa số, với điều kiện tích các thừa số cũng sẽ dẫn tới một hằng số.
Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} y &= x^3 + \frac{2007}{x^2} \\ &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{669}{x^2} + \frac{669}{x^2} + \frac{669}{x^2} \\ &\geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{2}x^3.\frac{1}{2}x^3.\frac{669}{x^2}.\frac{669}{x^2}.\frac{669}{x^2}} \\ &= 5\sqrt[5]{\frac{669^3}{4}}. \end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{1}{2}x^3 = \frac{669}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{1338}.$$

Vậy GTNN của y là $5\sqrt[5]{\frac{669^3}{4}}$, đạt được tại $x = \sqrt[5]{1338}$.

Bình luận:
Tư tưởng quan trọng là tạo ra được một tích các thừa số sao cho kết quả là một hằng số. Vì vậy mà có những bài toán tương tự chúng ta phải thấy được đường lối vẫn giống như bài này. Chẳng hạn: Tìm GTNN của

$$\begin{aligned} y &= x^2 + \frac{3}{x} \\ y &= x^5 + \frac{4}{x^2} \\ &... \\ \text{Tổng quát: } y &= x^m + \frac{p}{x^n}. \end{aligned}$$

Bài tập vận dụng

Bài tập 2.2.1. Cho xy=a. Tìm GTNN của $x + y$.
Hướng dẫn giải:

- Để tìm GTNN của một tổng, học sinh cần tạo ra một tích là hằng số.
- Để tìm GTLN của một tích, học sinh cần tạo ra một tổng là hằng số.

Bài tập 2.2.2. Tìm GTLN của:
a) $y = x + \sqrt{2 - x^2}$
b) $y = x(1 - x^3), x \in [0; 1]$
c) $y = (x + 2)(2 - x), x \in [-2; 2]$.

Hướng dẫn giải:

a) $x^2 + (\sqrt{2-x^2})^2 = 2 = const.$

b) $y = x(1-x)^3 = \dfrac{1}{3}.3x.(1-x).(1-x).(1-x)$, có

$$3x + (1-x) + (1-x) + (1-x) = 6 = const.$$

c) $(x+2) + (2-x) = 4 = const.$

Bài tập 2.2.3. Tìm GTNN của:

a) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{15}{x} \quad (x > 0)$

b) $y = 2x + \dfrac{1}{x^2} \quad (x > 0)$

Hướng dẫn giải:

a) $\dfrac{x}{3}.\dfrac{15}{x} = 5 = const.$

b) $y = 2x + \dfrac{1}{x^2} = x + x + \dfrac{1}{x^2}$. Mà $x.x.\dfrac{1}{x^2} = 1 = const.$

Bài tập 2.2.4. Tìm GTLN của $A = \dfrac{x}{(x+2006)^2}$.

Hướng dẫn giải:
Ta có 2 hướng giải:

- Cách 1:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4.2006.x}{4.2006.(x+2006)^2} \\ &= \frac{(x+2006)^2 - (x-2006)^2}{4.2006.(x+2006)^2} \\ &= \frac{1}{4.2006} - \frac{(x-2006)^2}{4.2006.(x+2006)^2} \\ &\leq \frac{1}{4.2006}. \end{aligned}$$

- Cách 2: Từ $(x+2006)^2 \geq 4.x.2006$ suy ra

$$A = \frac{x}{(x+2006)^2} \leq \frac{x}{4.x.2006} = \frac{1}{4.2006}.$$

Bài tập 2.2.5. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$. Tìm GTNN của $E = \dfrac{x+y}{xyz}$.

Hướng dẫn giải:
Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\begin{aligned} & 1 = x+y+z = (x+y) + z \geq 2\sqrt{(x+y)z} \\ \Rightarrow\ & 1 \geq 4(x+y)z \\ \Rightarrow\ & x+y \geq 4(x+y)^2.z \geq 16xyz \\ \Rightarrow\ & \frac{x+y}{xyz} \geq 16. \end{aligned}$$

Bài tập 2.2.6. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz(x+y+z) = 1$. Tìm GTNN của

$$A = (x+y)(x+z).$$

Hướng dẫn giải: Nhân phá dấu ngoặc. Sử dụng

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big).$$

Bài tập 2.2.7. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 = 1$. Tìm GTNN của

$$A = \frac{xy\sqrt{z-1}+yz\sqrt{x-2}+zx\sqrt{y-3}}{xyz}.$$

Hướng dẫn giải: Điều kiện $x \geq 2; y \leq 3; z \leq 1$. Viết

$$A = \frac{\sqrt{z-1}}{z}+\frac{\sqrt{x-2}}{x}+\frac{\sqrt{y-3}}{y}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{z-1}}{z} &= \frac{\sqrt{1(z-1)}}{z} \leq \frac{1+z-1}{2z} = \frac{1}{2}\\
\frac{\sqrt{x-2}}{x} &= \frac{\sqrt{2(x-2)}}{\sqrt{2}x} \leq \frac{2+x-2}{2\sqrt{2}x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\\
\frac{\sqrt{y-3}}{y} &= \frac{\sqrt{3(y-3)}}{\sqrt{3}y} \leq \frac{3+y-3}{2\sqrt{3}y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức lại ta tìm được $\max A$.

Bài tập 2.2.8. Tìm GTNN của

$$f(x,y) = x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \quad (x > y \geq 0).$$

Hướng dẫn giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số dương

$$2x-2y;\ \ y+1;\ \ y+1;\ \ \frac{8}{(x-y)(y+1)^2}.$$

Bài tập 2.2.9. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x^{2001}+y^{2001}+z^{2001} = 3$. Tìm GTLN của

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2.$$

Hướng dẫn giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 1999 số 1 và 2 số x^{2001} ta có

$$\frac{1+1+\cdots+1+x^{2001}+x^{2001}}{2001} \geq \sqrt[2001]{x^{2001}x^{2001}}.$$

Suy ra

$$\frac{1999+2x^{2001}}{20001} \geq x^2.$$

Tương tự cho y và z.

Bài tập 2.2.10. Cho các số dương x, y, z có tổng bằng 1. Tìm GTLN của hàm số

$$f(x,y,z) = \Big(x + \frac{1}{x}\Big)\Big(y + \frac{1}{y}\Big)\Big(z + \frac{1}{z}\Big).$$

Hướng dẫn giải: Sử dụng đánh giá

$$1 + x = x + y + z + x \le 4\sqrt[4]{x^2yz}.$$

Tương tự cho $1 + y$ và $1 + z$.

Bài tập 2.2.11. Cho $x > y > 0$. Tìm GTNN của

a) $f(x,y) = x + \dfrac{1}{y(x-y)}$

b) $f(x,y) = x + \dfrac{1}{y(x-y)^2}$.

Hướng dẫn giải:

a) Viết $x = (x - y) + y$.

b) Viết $x = \dfrac{1}{2}(x-y) + \dfrac{1}{2}(x-y) + y$.

Bài tập 2.2.12. Cho các số dương x, y, z có tổng bằng 1. Tìm GTLN của hàm số

$$f(x,y,z) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z}.$$

Hướng dẫn giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\sqrt{(1-x).\frac{2}{3}} \le \frac{1 - x + \dfrac{2}{3}}{2} = \frac{\dfrac{5}{3} + x}{2}..$$

Tương tự cho $\sqrt{1-y}$ và $\sqrt{1-z}$.

2.2.2 Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki

- Cho 2 dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Ta có

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

  Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

- Dạng thông dụng:

  ⋆ Khi $n = 2$ thì $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

  ⋆ Khi $n = 3$ thì $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$.

  ⋆ Cách viết khác của bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \ge \frac{\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

- Chú ý:
  Với các bất đẳng thức có điều kiện, ta cần khéo léo biến đổi để nhận được biểu thức điều kiện hoặc sử dụng ngay biểu thức điều kiện để biến đổi. Học sinh phải nhạy bén trong việc nhận ra dấu hiệu để sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

  ⋆ Có điều kiện kiểu tổng các bình phương là hằng số.

  ⋆ Tìm GTLN của tổng các tích từng cặp 2 số.

  ⋆ Tìm GTNN của tổng các bình phương.

Ví dụ 2.2.3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$. Tìm GTLN của

$$A = a + 3b + 5c.$$

<u>Phân tích</u>:
Có dấu hiệu của dạng $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ với

$$a_1^2 = 1; a_2^2 = 3^2; a_3^2 = 5^2$$

và

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số $1, 3, 5$ và a, b, c ta có

$$\begin{aligned} &(a + 3b + 5c)^2 \leq (1^2 + 3^2 + 5^2)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\Leftrightarrow A^2 \leq 35.1 = 35 \\ &\Rightarrow \ A \leq \sqrt{35}. \end{aligned}$$

Dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{5} = k > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = k \\ b = 3k \\ c = 5k \\ 35k^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{\sqrt{35}} \\ a = \dfrac{1}{\sqrt{35}} \\ b = \dfrac{3}{\sqrt{35}} \\ c = \dfrac{5}{\sqrt{35}} \end{cases}$$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{35}$.

Ví dụ 2.2.4. Cho 3 số dương a, b, c và các số x, y thỏa mãn $ax + by = c$. Tìm GTNN của

$$T = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} c^2 = (ax + by)^2 &= \Big(a\sqrt{a}.\frac{x}{\sqrt{a}} + b\sqrt{b}.\frac{y}{\sqrt{b}}\Big)^2 \\ &\leq (a^3 + b^3)\Big(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\Big). \end{aligned}$$

Do đó

$$T = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq \frac{c^2}{a^3+b^3}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ \dfrac{\frac{x}{\sqrt{a}}}{\frac{y}{\sqrt{b}}} = \dfrac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=c, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^2}{b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ca^2}{a^3+b^3}, \\ y = \dfrac{cb^2}{a^3+b^3} \end{cases}$$

Vậy GTNN của T là $\dfrac{c^2}{a^3+b^3}$.

Bình luận:

Quan trọng nhất là sử dụng được điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Vì vậy các hệ số $1, 3, 5$ thực sự không quan trọng. Từ đó có thể xét các bài toán dạng:

Tìm GTLN của

$$A = ma + nb + pc \quad (m, n, p > 0)$$

biết $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2+b^2+c^2 = q \end{cases} \qquad (q > 0).$

Mở rộng:

Nếu giả thiết cho hơi khác là:

$$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2+2b^2+c^2 = 1 \end{cases}$$

thì phải xác định các cặp số một cách linh hoạt để sử dụng được điều kiện này. Chẳng hạn:

$$(a+2b+5c)^2 \leq \left(1^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 5^2\right)\left(a^2 + (\sqrt{2}b)^2 + c^2\right)$$

Suy ra

$$A \leq \sqrt{\frac{110}{4}.1} = \sqrt{\frac{55}{2}}.$$

Và nếu giả thiết cho là

$$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2+2b^2+3c^2 = 1 \end{cases}$$

hay tổng quát

$$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 1 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$$

thì tình hình vẫn hoàn toàn tương tự.

Bài tập vận dụng

Bài tập 2.2.13. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN, GTNN của $A = 3x + 4y$.
Hướng dẫn giải:
Đánh giá

$$(3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 25.$$

Tổng quát: Cho $mx^2 + ny^2 = p \quad (m, n, p > 0)$. Tìm GTLN, GTNN của

$$A = \alpha x + \beta y \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Bài tập 2.2.14. Cho $2x + 3y = 1$. Tìm GTNN của $B = 3x^2 + 2y^2$.

Hướng dẫn giải:
Ta có

$$\begin{aligned} 1 = (2x + 3y)^2 = & \left(\frac{2}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right)^2 \\ \leq & \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right](3x^2 + 2y^2) \\ = & \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{4}\right).B. \end{aligned}$$

Tổng quát: Cho $\alpha x + \beta y = \gamma$. Tìm GTNN của $mx^2 + ny^2 \quad (m, n > 0)$.

Bài tập 2.2.15. Cho $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 6$. Tìm GTNN của $C = x + y$.
Hướng dẫn giải:
Nếu sử dụng

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

và cần tìm GTNN thì $x + y$ phải ở vế phải, do đó $a_1 = \sqrt{x}; a_2 = \sqrt{y}$ và cần có

$$a_1b_1 + a_2b_2 = const$$

nên $b_1 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}; b_2 = \dfrac{\beta}{\sqrt{y}}$. Mặt khác, để sử dụng được điều kiện $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 6$ thì

$$b_1^2 + b_2^2 = \frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y} = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$$

suy ra

$$\alpha = \sqrt{2}; \ \beta = \sqrt{3}.$$

Bài toán đã được giải quyết!

Bài tập 2.2.16. Cho $3x - 4y = 7$. Tìm GTNN của $D = 3x^2 + 4y^2$.
Hướng dẫn giải:
Tương tự Bài tập 2.2.2.

Bài tập 2.2.17. Cho $x^2 + y^2 = 1; u^2 + v^2 = 1$. Tìm GTLN, GTNN của

$$E = u(x - y) + v(x + y).$$

Hướng dẫn giải:
Ta có

$$\begin{aligned} [u(x - y) + v(x + y)]^2 \leq (u^2 + v^2)[(x - y)^2 + (x + y)^2] \\ \Leftrightarrow \quad E \leq 2(x^2 + y^2) = 2. \end{aligned}$$

Bài tập 2.2.18. Cho $xy + yz + zx = 4$. Tìm GTNN của $B = x^4 + y^4 + z^4$.

Hướng dẫn giải:
Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$16 = (xy + yz + zx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq x^4 + y^4 + z^4.$$

Mà
$$(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2 \leq (x^4 + y^4 + z^4)^2$$

nên
$$16 \leq 3.(x^4 + y^4 + z^4).$$

Bài tập 2.2.19. Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2 = 0.$$

Tìm GTNN của $C = a^2 + b^2 + c^2$.

Hướng dẫn giải:
Từ $x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 2 = 0$ suy ra

$$x_0^4 + 2 = -(ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0).$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x_0^6 + x_0^4 + x_0^2).$$

Từ đó ta tìm được GTNN của C theo x_0.

Bài tập 2.2.20. Cho $\begin{cases} xy \leq 0 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$. Tìm GTLN của

$$D = x\sqrt{3 + y} + y\sqrt{3 + x}.$$

Hướng dẫn giải:
Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} & D^2 = (x\sqrt{3 + y} + y\sqrt{3 + x})^2 \leq (x^2 + y^2)(6 + x + y) \\ \Rightarrow\ & D^2 \leq 100.(6 + x + y) \leq 100.[6 + \sqrt{2(x^2 + y^2)}] \\ \Rightarrow\ & D^2 \leq 100.(6 + \sqrt{200}). \end{aligned}$$

Bài tập 2.2.21. Cho các số m, n thỏa mãn $\dfrac{16}{m^2} + \dfrac{9}{n^2} = 1$. Tìm GTNN của

$$S = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Hướng dẫn giải: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số $\dfrac{16}{m^2}; m^2$ và $\dfrac{9}{n^2}; n^2$.

Bài tập 2.2.22. Cho

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Tìm GTLN của $T = |x + 2y + 3z - 8|$.

Hướng dẫn giải: Để ý rằng

$$x + 2y + 3z - 8 = (x-1) + 2(y-2) + 3(z-1).$$

Bài tập 2.2.23. Cho $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z \le 0$. Tìm GTLN, GTNN của

$$F = 2x + 3y - 2z.$$

Hướng dẫn giải: Điều kiện của x, y, z tương đương với

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \le 5.$$

Viết lại F thành

$$F = 2(x-2) + 3 - 2(z+1) + 6.$$

Sau đó sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Bài tập 2.2.24. Cho $x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \le \dfrac{4}{3}$. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$f(x, y, z) = x + y + z.$$

Hướng dẫn giải: Ta có

$$\begin{aligned} & x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \le \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & 3(x^2 + y^2 + z^2) \le 3(x + y + z) + 4. \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Từ đó ta dễ dàng tìm được GTLN, GTNN của $f(x, y, z)$.

2.2.3 Sử dụng bất đẳng thức Trêbưsep

Bất đẳng thức Trêbưsep: Cho hai dãy số sắp thứ tự giống nhau

$$\begin{aligned} a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \le n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots | a_n b_n).$$

Ví dụ 2.2.5. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ ab + bc + cd + da = 1 \end{cases}$. Tìm GTNN của

$$S = \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c}.$$

Lời giải.
Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d$. Đặt

$$A = b + c + d, B = c + d + a, C = d + a + b, D = a + b + c$$

thì ta có

$$\frac{1}{A} \geq \frac{1}{B} \geq \frac{1}{C} \geq \frac{1}{D}.$$

Theo bất đẳng thức Trêbưsep ta có

$$\begin{aligned} S = & \frac{a^3}{A} + \frac{b^3}{B} + \frac{c^3}{C} + \frac{d^3}{D} \\ \geq & \frac{1}{4}.(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)\Big(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\Big) \\ \geq & \frac{1}{16}.(a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\Big(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\Big) \\ \Rightarrow \quad S \geq & \frac{1}{48}.(A + B + C + D)\Big(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\Big)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} &(A + B + C + D)\Big(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\Big) \geq 16 \\ &a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da = 1. \end{aligned}$$

Do đó

$$S \geq \frac{1}{48}.16.1 = \frac{1}{3}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2.2.6. Cho các số dương x, y. Tìm GTLN của

$$S = \frac{(x + y)(x^3 + y^3)(x^6 + y^6)}{x^{10} + y^{10}}.$$

Lời giải.
Giả sử $x \leq y$. Khi đó

$$x^3 \leq y^3; x^6 \leq y^6.$$

Theo bất đẳng thức Trêbưsep ta có

$$\begin{aligned} &(x + y)(x^3 + y^3) \leq 2(x^4 + y^4) \\ &(x^4 + y^4)(x^6 + y^6) \leq 2(x^{10} + y^{10}). \end{aligned}$$

Từ 2 bất đẳng thức trên ta có

$$(x+y)(x^3+y^3)(x^6+y^6) \leq 4(x^{10}+y^{10}).$$

Do đó

$$S \leq \frac{4(x^{10}+y^{10})}{x^{10}+y^{10}} = 4.$$

Vậy S có GTLN là 4.

Bài tập vận dụng

Bài tập 2.2.25. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thay đổi. Đặt $S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Tìm GTNN của

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{S - a_i} \right).$$

Bài tập 2.2.26. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thay đổi. Đặt $S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Tìm GTNN của

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{S - 2a_i} \right).$$

Bài tập 2.2.27. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn A, B, C. Tìm GTLN của

$$T = \frac{a+b+c}{\dfrac{a}{A} + \dfrac{b}{B} + \dfrac{c}{C}}.$$

2.3 Phương pháp miền giá trị

2.3.1 Nội dung phương pháp

Ta có y_0 là một giá trị của hàm số $y = f(x)$ trên miền D khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} f(x) = y_0 \\ x \in D \end{cases}$$

có nghiệm.

Trong nhiều trường hợp điều kiện có nghiệm ấy sau khi biến đổi sẽ đưa về dạng

$$\alpha \le y_0 \le \beta.$$

Vì y_0 là một giá trị bất kì của $f(x)$ nên từ đó thu được

$$\min f(x) = \alpha$$
$$\max f(x) = \beta.$$

2.3.2 Các ví dụ

Ví dụ 2.3.1. Tìm GTLN, GTNN của

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}.$$

Lời giải.

Gọi y_0 là một giá trị của hàm số đã cho thì phương trình sau có nghiệm:

$$\frac{2x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = y_0 \quad (1).$$

Vì $3x^2 + 2x + 1 > 0, \forall x$ nên phương trình (1) tương đương với

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 10x + 3 = y_0(3x^2 + 2x + 1) \\ \Leftrightarrow \quad & (3y_0 - 2)x^2 + (y_0 - 5)x + y_0 - 3 = 0 \quad (2). \end{aligned}$$

Ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Nếu $3y_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = \dfrac{2}{3}$ thì $y_0 - 5 \neq 0$ nên phương trình (2) có nghiệm. Do đó $f(x)$ nhận giá trị $\dfrac{2}{3}$ với x_0 nào đó.

- Trường hợp 2: Nếu $3y_0 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow y_0 \neq \dfrac{2}{3}$ thì phương trình (2) là phương trình bậc hai, do đó (2) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \Delta' = (y_0 - 5)^2 - (y_0 - 3)(3y_0 - 2) \ge 0 \\ \Leftrightarrow \; & -2y_0^2 + y_0 + 19 \ge 0 \\ \Leftrightarrow \; & \frac{1 - \sqrt{152}}{2} \le y_0 \le \frac{1 + \sqrt{152}}{2}, \text{ và } y_0 \neq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp ta được

$$\frac{1-\sqrt{152}}{2} \le y_0 \le \frac{1+\sqrt{152}}{2}.$$

Vậy GTLN của $f(x)$ là $\dfrac{1+\sqrt{152}}{2}$; GTNN của $f(x)$ là $\dfrac{1-\sqrt{152}}{2}$.

Ví dụ 2.3.2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ xét trên miền

$$D = \{(x;y) : (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0\}.$$

Lời giải.
Gọi t_0 là một giá trị bất kì của hàm số $f(x,y)$ trên miền D. Khi đó hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t_0 \\ (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad (I).$$

Ta có

$$\begin{aligned} (I) \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 = t_0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 = t_0 \\ t_0^2 - 3t_0 + 1 + 4x^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y^2 + \dfrac{-t_0^2 + 3t_0 - 1}{4} = t_0 & (1) \\ t_0^2 - 3t_0 + 1 + 4x^2 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (2) có nghiệm ẩn x khi và chỉ khi

$$t_0^2 - 3t_0 + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \le t_0 \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Lại có

$$(1) \Leftrightarrow y^2 + \frac{-t_0^2 - t_0 - 1}{4} = 0.$$

Mà $-t_0^2 - t_0 - 1 < 0, \forall t_0$ nên phương trình (1) luôn có nghiệm ẩn $y, \forall t_0$.
Như vậy $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \le t_0 \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ là điều kiện cần và đủ để hệ (I) có nghiệm. Do đó

$$\max_{(x;y)\in D} f(x,y) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \quad \min_{(x;y)\in D} f(x,y) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 2.3.3. Tìm GTLN, GTNN của $T = x^2 + y^2$ trên tập

$$D = \{(x;y) : (x-y)^2 = x + y - xy\}.$$

Lời giải.
Gọi T_0 là một giá trị của T. Khi đó hệ phương trính sau có nghiệm

$$\begin{cases} T_0 = x^2 + y^2 \\ (x-y)^2 = x + y - xy \end{cases} \quad (I).$$

Ta có

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} T_0 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = x + y + xy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} T_0 = x^2 + y^2 & (1) \\ T_0 = x + y + xy & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra

$$\begin{aligned} & T_0 = x + y + xy \le \sqrt{2(x^2+y^2)} + \frac{x^2+y^2}{2} \\ \Rightarrow\ & T_0 \le \sqrt{2T_0} + \frac{T_0}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2T_0 \le 2\sqrt{2T_0} + T_0 \\ \Leftrightarrow\ & T_0^2 - 8T_0 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \le T_0 \le 8. \end{aligned}$$

Mặt khác $T(0,0) = 0; T(2,2) = 8$. Vậy ta có

$$\max_{(x;y)\in D} T = 8; \min_{(x;y)\in D} T = 0.$$

Bài tập vận dụng

Bài tập 2.3.1. Cho a, b, c là các số thoả mãn

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ ab + bc + ca = 8 \end{cases}$$

Tìm GTLN, GTNN của a.
Hướng dẫn giải:
Ta có $b + c = 5 - a$ và

$$bc = 8 - a(b+c) = 8 - a(5-a).$$

Mặt khác $bc \le \dfrac{(b+c)^2}{4} = \dfrac{(5-a)^2}{4}$ nên

$$\frac{(5-a)^2}{4} \ge 8 - a(5-a).$$

Sử dụng tam thức ta được $1 \le a \le \dfrac{7}{3}$.

Bài tập 2.3.2. Tìm GTLN của hàm số $f(x,y) = |x-y|$ trên miền

$$D = \{(x;y) : x^2 + 4y^2 = 1\}.$$

Hướng dẫn giải:
Phá dấu giá trị tuyệt đối, đưa về hai hệ và tìm điều kiện để hai hệ có nghiệm.

Đáp số: $\max\limits_{(x;y)\in D} f(x,y) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 2.3.3. Tìm GTLN, GTNN của

$$f(x) = \frac{3+4x^2+3x^4}{(1+x^2)^2}$$

trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải:
Đưa về phương trình

$$(y_0-3)x^4 + 2(y_0-2)x^2 + y_0 + 3 = 0.$$

- Nếu $y_0 = 3$ thì phương trình có nghiệm.
- Nếu $y_0 \neq 0$ thì phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (y_0-3)t^2 + 2(y_0-2)t + y_0 + 3 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

Đáp số: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{5}{2}; \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 3$.

Bài tập 2.3.4. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{x^2+px+q}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Tìm p, q để

$$\max f(x) = 9; \min f(x) = -1.$$

Hướng dẫn giải:
Gọi y_0 là giá trị bất kì của $f(x)$ thì phương trình

$$y_0 = \frac{x^2+px+q}{x^2+1} \quad (1)$$

có nghiệm. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (y_0-1)x^2 - px + (y_0 - q) = 0.$$

Khi $y_0 \neq 1$, bài toán qui về tìm p, q để phương trình $\Delta \geq 0$ có nghiệm.

Đáp số: $(p = 8; q = 7)$ hoặc $(p = -8; q = 7)$.

Bài tập 2.3.5. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$y = x + \sqrt{2x^2 + x + 1}.$$

Hướng dẫn giải: Giả sử y_0 là một giá trị nào đó của hàm số. Khi đó

$$\begin{aligned} & y_0 = x + \sqrt{2x^2 + x + 1} \\ \Leftrightarrow\quad & (y_0 - x)^2 = 2x^2 + x + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & y_0^2 - 2y_0x + x^2 = 2x^2 + x + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + (1 - 2y_0)x + (1 - y_0^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Xét điều kiện có nghiệm x của phương trình này để tìm ra miền giá trị của y_0.

Bài tập 2.3.6. Tìm GTNN của

$$y = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}, \quad \text{với } x > 0.$$

Hướng dẫn giải: Gọi y_0 là giá trị tuỳ ý của y trên miền $x > 0$. Khi đó hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} y_0 = x + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le y_0 \\ (y_0 - x)^2 = x^2 + \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le y_0 \\ y_0^2 - 2y_0x = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le y_0 \\ 2y_0x^2 - y_0^2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Đáp số: $\min\limits_{x>0} f(x) = 2.$

Bài tập 2.3.7. Cho $x^2 + y^2 > 0$. Tìm GTLN, GTNN của

$$f(x, y) = \frac{x^2 - (x - 4y)^2}{x - 4y^2}.$$

Hướng dẫn giải:

Nếu $y = 0$ thì $\min f(x) = \max f(x) = 0$.

Nếu $y \neq 0$ thì ta viết

$$f(x, y) = \frac{\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2y} - 2\right)^2}{\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2 + 1}.$$

Đặt $\dfrac{x}{2y} = t$ và xét $g(t) = \dfrac{4t - 4}{t^2 + 1}$.

2.4 Phương pháp lượng giác

2.4.1 Nội dung phương pháp

Phương pháp này nhằm thay đổi hình thức của bài toán dẫn đến việc tìm GTLN, GTNN của hàm số lượng giác. Phương pháp này đặc biệt tỏ ra hiệu quả đối với các hàm đại số nhiều ẩn với dạng thường gặp nhất là khi có điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Khi đó ta đặt

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = cost \end{cases}, t \in [0; 2\pi].$$

Trong trường hợp không có điều kiện của ẩn số, thường đặt

$$x = \tan t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

2.4.2 Các ví dụ

Ví dụ 2.4.1. Tìm GTLN của hàm số

$$y = (1+x)^{2006} + (1-x)^{2006}, \text{ với } x \in [-1; 1].$$

Lời giải. Vì $x \in [-1; 1]$ nên ta có thể đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$. Khi đó hàm số trở thành

$$\begin{aligned} y = &\ (1+\cos t)^{2006} + (1-\cos t)^{2006} \\ = &\ \left(2\cos^2\frac{t}{2}\right)^{2006} + \left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{2006} \\ = &\ 2^{2006}.\left(\cos^{4012}\frac{t}{2} + \sin^{4012}\frac{t}{2}\right) \\ \le &\ 2^{2006}.\left(\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}\right) \\ = &\ 2^{2006}. \end{aligned}$$

Vậy GTLN của y là 2^{2006}, đạt được khi

$$\begin{cases} \cos^{4012}\frac{t}{2} = \cos^2\frac{t}{2} \\ \sin^{4012}\frac{t}{2} = \sin^2\frac{t}{2} \end{cases}, \text{ chẳng hạn } \begin{cases} \sin t = 0 \\ \cos t = \pm 1 \end{cases} \quad \text{thì } x = \pm 1.$$

Ví dụ 2.4.2. Tìm GTLN, GTNN của

$$y = \frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}.$$

Lời giải. Đặt $x = \tan t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó hàm số được chuyển về dạng

$$\begin{aligned} y = &\ \frac{1+\tan^4 t}{(1+\tan^2 t)^2} = \frac{1 + \dfrac{\sin^4 t}{\cos^4 t}}{\dfrac{1}{\cos^4 t}} \\ = &\ \sin^4 t + \cos^4 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t. \end{aligned}$$

Vì $0 \le \sin^2 2t \le 1$ nên

- GTNN: $\min y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, đạt khi
$$\sin^2 2t = 1 \Leftrightarrow \cos 2t = 0$$
Chẳng hạn $t = \frac{\pi}{4}$ thì $x = 1$.
- GTLN: $\max y = 1 - 0 = 1$, đạt khi
$$\sin^2 2t = 0 \Leftrightarrow \sin 2t = 0$$
Chẳng hạn $t = 0$ thì $x = 0$.

Ví dụ 2.4.3. Tìm GTLN, GTNN của
$$u = 2x + 3\sqrt{3}y + 2, \text{ với } 4x^2 + 9y^2 = 16.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có
$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y}{4}\right)^2 = 1.$$
Đặt $\frac{x}{2} = \cos\alpha; (\frac{3y}{4} = \sin\alpha, \alpha \in [0; 2\pi]$. Khi đó hàm được chuyển về dạng
$$u = 4\cos\alpha + 4\sqrt{3}\sin\alpha + 2.$$
Ta có
$$u = 8(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) + 2 = 8\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + 2.$$
Vì $-1 \le \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \le 1$ nên ta có

- GTNN: $\min u = -8 + 2 = -6$, đạt khi
$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
- GTLN: $\max u = 8 + 2 = 10$, đạt khi
$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2.4.4. Tìm GTLN, GTNN của hàm số
$$u = \frac{4xy - 4y^2}{x^2 + y^2}.$$

Lời giải. Ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Nếu $y = 0$ thì $u = 0$.

- Trường hợp 2: Nếu $y \neq 0$ thì chia cả tử số và mẫu số cho y^2 ta được

$$u = \frac{\dfrac{4x}{y} - 4}{\dfrac{x^2}{y^2} + 1}.$$

Đặt $\dfrac{x}{y} = \tan t, t \in \Big[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big]$. Khi đó hàm trở thành

$$\begin{aligned} u &= \frac{4\tan t - 4}{\tan^2 t + 1} = \frac{\dfrac{4\sin t}{\cos t} - 4}{\dfrac{1}{\cos^2 t}} \\ &= 4\sin t.\cos t - 4\cos^2 t \\ &= 2\sin 2t - 2(1 + \cos 2t) \\ &= 2\sqrt{2}\sin\Big(2t - \frac{\pi}{4}\Big) - 2. \end{aligned}$$

Vì $-1 \leq \sin\Big(2t - \dfrac{\pi}{4}\Big) \leq 1$ nên ta có

⋆ GTNN: $\min u = -2\sqrt{2} - 2$, đạt được khi

$$\sin\Big(2t - \frac{\pi}{4}\Big) = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \tan\frac{\pi}{8}.$$

⋆ GTLN: $\max u = 2\sqrt{2} - 2$, đạt được khi

$$\sin\Big(2t - \frac{\pi}{4}\Big) = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \tan\frac{3\pi}{8}.$$

Nhận xét: Trong trường hợp không có ẩn số, phép lượng giác hoá được xác định theo hai hướng sau:

- Hướng 1: Nếu có thể sử dụng được ẩn phụ $t = g(x, y)$ để chuyển hàm ban đầu về hàm một ẩn theo t. Khi đó tuỳ thuộc miền giá trị của $g(x, y)$ ta lựa chọn đặt

$$g(x, y) = \sin\alpha \text{ hay } g(x, y) = \tan\alpha.$$

- Hướng 2: Trong trường hợp còn lại, phép lượng giác hoá thường được sử dụng là

$$x = \tan\alpha \text{ và } y = \tan\beta; \alpha, \beta \in \Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big].$$

Ví dụ 2.4.5. Tìm GTLN và GTNN của

$$u = \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ thì hàm số chuyển về dạng

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\tan\alpha + \tan\beta)(1 - \tan\alpha.\tan\beta)}{(1 + \tan^2\alpha)(1 + \tan^2\beta)} \\ &= \frac{\dfrac{\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta.\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.\dfrac{1}{\cos^2\beta}} \\ &= \frac{1}{2}.\sin 2(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Vì $-1 \le \sin 2(\alpha+\beta) \le 1$ nên ta có

- GTNN: $\min u = -\dfrac{1}{2}$, đạt được khi

$$\begin{aligned} & \sin 2(\alpha+\beta) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \tan(\alpha+\beta) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x+y}{1-xy} = -1. \end{aligned}$$

  Chọn $x = 0; y = -1$.

- GTLN: $\max u = \dfrac{1}{2}$, đạt được khi

$$\begin{aligned} & \sin 2(\alpha+\beta) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \tan(\alpha+\beta) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x+y}{1-xy} = 1. \end{aligned}$$

  Chọn $x = 0; y = 1$.

Bài tập vận dụng

Bài tập 2.4.1. Cho các số x, y thoả mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN của

$$u = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}.$$

Hướng dẫn giải: Đặt $x = \sin\alpha; y = \sin\beta$.

Đáp số: GTLN: $\max u = 2 + \sqrt{2}$, đạt khi $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 2.4.2. Tìm GTLN và GTNN của

a) $y = \dfrac{x^2}{1+x^4}$

b) $y = \dfrac{1+x^6}{(1+x^2)^2}$

. *Hướng dẫn giải:*

2.5 Phương pháp hình học, toạ độ và vectơ

Nội dung phương pháp

Để tìm GTLN, GTNN bằng phương pháp này người ta thường sử dụng các tính chất sau đây:

- Trong tất cả các đường gấp khúc nối hai điểm A, B cho trước thì đường thẳng nối AB là đường có độ dài bé nhất.
- Trong một tam giác tổng hai cạnh luôn lớn hơn cạnh thứ ba. Trường hợp xảy ra dấu bằng khi tam giác đó suy biến.
- Cho $M \neq d$. Khi đó đường thẳng vuông góc kẻ từ M xuống d ngắn hơn mọi đường xiên kẻ từ M xuống đường thẳng ấy.
- Trong các tam giác cùng nội tiếp đường tròn thì tam giác đều có chu vi và diện tích lớn nhất.

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp này khi mà trong nội dung các bài toán đã tiềm ẩn yếu tố hình học mà có thể ban đầu ta chưa nhìn ra nó.

Đặc biệt cần nhớ các công thức sau:

* Trong mặt phẳng:
Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^+ (y_2 - y_1)^2}$$

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến $\Delta : Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2}$$

Phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

* Trong không gian:
Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^+ (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến mặt phẳng $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Ví dụ 2.5.1. Tìm GTLN của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}, x \in \mathbb{R}$$

<u>Phân tích</u>: Dùng phương pháp toạ độ mà lại thấy xuất hiện căn bậc 2 như thế này, học sinh phải nghĩ tới công thức tính khoảng cách giữa hai điểm.
Biến đổi

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{(x-1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})}$$
$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1^2}$$

Lời giải. Ta có: $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})} + \sqrt{(x-1)^2 + 1^2}$
Xét

$$A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2});\ B(1; -1);\ C(x, 0)$$

Khi đó $f(x) = AC + CB \geq AB$, với

$$AB = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1+\sqrt{3})}{4}}$$

Vậy $f(x) \geq \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{3}}{4}}$.
Dấu " = " xảy ra khi A, B, C thẳng hàng: tức $C \in AB$. Mặt khác phương trình đường thẳng AB là:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$C \in AB$ nên

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$$

Bình luận: Như vậy là dựa vào công thức tính khoảng cách giữa hai điểm và việc sử dụng hợp lí bất đẳng thức tam giác mà chúng ta đã giải được bài toán. Quan trọng nhất là việc nhìn ra bóng dáng của tổng hai đoạn thẳng trong biểu thức.

Một câu hỏi nhỏ đặt ra là tại sao lại chọn điểm $A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ mà không là $A(\frac{1}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2})$; $B(1;-1)$ mà không là $B(1;1)$. Mặc dù các biểu thức tính khoảng cách AC, BC không hề thay đổi. Ta chọn như trong lời giải nhằm cho A, B nằm khác phía của nhau so với trục hoành; $C \in Ox$. Nếu lấy điểm B nằm trên cũng không sao nhưng lời giải sẽ dài hơn bởi để tìm được $\min(AC+CB)$ khi đó vẫn phải lấy B' đối xứng B qua Ox tức $B'(1;-1)$. Vậy chi bằng ta chọn luôn $B \equiv B'$ ngay từ đầu.

Mở rộng: Các hệ số của các biểu thức liệu có phải là bất kì không? Nếu thay x^2-2x+2 bởi biểu thức x^2-2x thì sao? Viết $\sqrt{x^2-2x} = \sqrt{(x-1)^2-1}$ liệu có làm tiếp được không? Trong khi đó công thức tính khoảng cách là: $\sqrt{(x_2-x_1)^{+}(y_2-y_1)^2}$. Dấu + chứ không phải là dấu $-$.

Vậy mỗi hệ số của biểu thức dưới căn là tuỳ ý nhưng phải thoả mãn $\Delta_x \leq 0$. Như vậy là các em cũng có thể tự ra cho mình và bạn bè những biểu thức đơn giản. Chẳng hạn: Tìm GTNN của

$$f(x) = \sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2-6x+10}$$

Và hệ số của x^2 trong hai biểu thức dưới căn có nhất thiết phải bằng nhau không? Nếu không bằng thì sao?

Ví dụ: $f(x) = \sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{2x^2-4x+6}$

Bài tập vận dụng

Bài tập 2.5.1. Tìm GTNN của

1. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+x-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}$

Hướng dẫn giải: Giống ví dụ.

Bài tập 2.5.2. Tìm GTLN của:

$$f(x) = \sqrt{x^2-6x+45} - \sqrt{x^2-6x+10}$$

Hướng dẫn giải: Sử dụng $AB - AC \geq BC$.

Bài tập 2.5.3. Tìm GTNN của:

$$f(x) = \sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1} + \sqrt{2x^2-(\sqrt{3}+1)x+1}$$

Hướng dẫn giải: Tất cả đều có $2x^2$. Làm thế nào để dùng được công thức tính khoảng cách:

$$\sqrt{2x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2+x^2}$$

$$\sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1} = \sqrt{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2}$$

$$\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}+1)x+1} = \sqrt{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x-\frac{1}{2})^2}$$

Bài tập 2.5.4. Tìm GTNN của: $f(x, y) = x^2 + y^2$ trên miền

$$D = \{(x, y) : x - 2y + 8 \geq 0; x + y + z \geq 0; 2x - y + 4 \leq 0\}.$$

Hướng dẫn giải: Hãy xác định miền D trên mặt phẳng Oxy rồi xem ý nghĩa của $f(x, y) = x^2 + y^2$ biểu thị cái gì?

Bài tập 2.5.5. Tìm GTLN, GTNN của: $f(x, y) = 4x + 3y$ trên miền

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 16 = 8x + 6y\}.$$

Hướng dẫn giải: Xác định miền D chính là đường tròn. Tính

$$\begin{aligned} f(x, y) = 4x + 3y &= \frac{1}{2}\Big(8x + 6y\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(x^2 + y^2 + 16\Big) \end{aligned}$$

Cần tìm GTLN, GTNN của $x^2 + y^2$. Xem $x^2 + y^2$ biểu thị cái gì?

2.6 Các phương pháp khác

2.6.1 Phương pháp cân bằng đối xứng

Nội dung phương pháp:

Phương pháp này thường được sử dụng nếu điều kiện ràng buộc các biểu thức và biểu thức cần tìm GTLN, GTNN có tính đối xứng với các biến thì ta thường dự đoán GTLN, GTNN xảy ra khi các biến đạt giá trị bằng nhau.

Sau đó dùng các bất đẳng thức để chứng minh dự đoán này.

Ví dụ 2.6.1. Cho $xy + yz + zx = 1$. Tìm GTNN của $M = x^4 + y^4 + z^4$.

Lời giải. Ta có: $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq \dfrac{2}{3}(xy + yz + zx)^2$

Suy ra $M \geq \dfrac{1}{3}$

$M = \dfrac{1}{3} \Longleftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy GTNN của M là $\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 2.6.2. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$. Tìm GTLN của

$$T = \frac{ab}{a + b + 2}.$$

<u>Phân tích</u>: Phải tạo được ra: $a+b+2, ab$ từ giả thiết. Muốn vậy phải phân tích a^2+b^2-4 theo $a + b + 2, ab$ và nhân tố nào đó khác nữa và sẽ đánh giá nhân tố này chẳng hạn.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 - 4 = 0 \\ \Rightarrow\ & (a + b)^2 - 4 = 2ab \\ \Rightarrow\ & (a + b + 2)(a + b - 2) = 2ab \\ \Rightarrow\ & T = \frac{ab}{a + b + 2} = \frac{a + b - 2}{2} \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} & (a + b)^2 \geq 2(a^2 + b^2) \\ \Rightarrow\ & (a + b)^2 \geq 8 \\ \Rightarrow\ & a + b \geq 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy $T = \dfrac{a + b - 2}{2} \geq \dfrac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{2}$.

<u>Bài tập vận dụng</u>

Bài tập 2.6.1. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0, \\ x + y + z = 3 \end{cases}$. Tìm GTNN của

$$T = \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2}.$$

Hướng dẫn giải: Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \\ &\geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned} y^2 + yz + z^2 &\geq \frac{3}{4}(y+z)^2 \\ z^2 + zx + x^2 &\geq \frac{3}{4}(z+x)^2 \end{aligned}$$

Bài tập 2.6.2. Cho $\begin{cases} a, b > 0, \\ a + b = 1 \end{cases}$. Tìm GTNN của:

$$(a + \frac{1}{b})^2 + (b + \frac{1}{a})^2.$$

Hướng dẫn giải: Dùng Côsi dạng $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Bài tập 2.6.3. Tìm GTLN của:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$$

biết $a, b, c > 0; a + b + c = 1$.
Hướng dẫn giải: Để sử dụng được $a + b + c$ thì phải bình phương các căn thức. Sau đó dùng Bunhiacôpxki.

Bài tập 2.6.4. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0, \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Tìm GTNN của

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac}\frac{1}{c^2 + 2ab}$$

Hướng dẫn giải: Sử dụng bất đẳng thức:

$$(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9.$$

2.6.2 Phương pháp cực biên

Nội dung phương pháp:

Ta biết, nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì GTLN, GTNN của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ hoặc là $f(a)$ hoặc là $f(b)$, hoặc là giá trị cực trị của f. Như vậy là khi tìm GTLN, GTNN của $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ nếu $x_i \in [a, b]$ thì ta nên lưu ý tới giá trị của A khi $x_i = a$ hay $x_i = b$.

Chú ý tới các biến đổi thường dùng sau:

⋆ $x_i \in [a, b]$ suy ra $(x_i - a)(x_i - b) \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $x_i = a \vee x_i = b$.

⋆ $x, y, z \in [a, b]$ suy ra

$$\begin{cases} (x-a)(y-a)(z-a) \geq 0 \\ (x-b)(y-b)(z-b) \leq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2.6.3. Cho $a, b, c, d \in [0; 1]$. Tìm GTLN của

$$\frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{acd+1} + \frac{c}{abd+1} + \frac{d}{abc+1}.$$

Lời giải. Vì $a, b, c, d \in [0; 1]$ nên $bcd \geq abcd$. Lại có $(a-1)(b-1) \geq 0$ nên $ab + 1 \geq a + b$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{a}{abcd+1} + \frac{b}{abcd+1} + \frac{c}{abcd+1} + \frac{d}{abcd+1} \\ \Rightarrow P &\leq \frac{a+b+c+d}{abcd+1} \leq \frac{1+ab+1+cd}{abcd+1} \\ &\leq \frac{2+ab+cd}{abcd+1} \leq \frac{2+1+abcd}{abcd+1} \\ &\leq \frac{3+abcd}{abcd+1} \leq \frac{3+3abcd}{abcd+1} = 3. \end{aligned}$$

Vậy GTLN của P là 3, xảy ra khi $a = 0, b = c = d = 1$.

Bài tập vận dụng

Bài tập 2.6.5. Cho $\begin{cases} x_1, x_2, ..., x_{10} \in [1; 3], \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 15 \end{cases}$

Tìm GTLN của $S = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{10}^3$.

Bài tập 2.6.6. Cho $\begin{cases} x, y, z \in [0; 3], \\ x + y + z = 5 \end{cases}$.

Tìm GTLN của $S = x^2 + y^2 + z^2$

2.6.3 Phương pháp sắp thứ tự

Nội dung phương pháp:

Nếu việc sắp thứ tự lại các hằng số, các biến số không làm mất tính tổng quát của bài toán thì nên thực hiện vì chúng cho ta thêm giả thiết để tìm GTLN, GTNN. Và khi đã sắp xếp lại các hằng, các biến ta nên chú ý tới các phần tử Max, min của chúng.

Ví dụ 2.6.4. Cho các số $x_1, ..., x_{10}$ thay đổi nhưng luôn thoả mãn

$$\begin{cases} x_1x_2...x_{10} \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 2006 \end{cases}$$

Tìm GTLN của $S = \sum_{i=1}^{9} x_i x_{i+1}$.

Lời giải. Giả sử $x_k = \max\{x_1, x_2, ..., x_{10}\}$, ta có

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=k}^{9} x_i x_{i+1} \\ &\leq x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \sum_{i=k+1}^{9} x_i \\ &\leq x_k \Big(\sum_{i=1}^{9} x_i - x_k \Big) \\ &= x_k(2006 - x_k) \leq \frac{2006^2}{4}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{2006}{2}, \\ x_3...x_9 = 0 \end{cases}$. Vậy GTLN của S là $\dfrac{2006^2}{4}$.

Bài tập vận dụng

Bài tập 2.6.7. Trong tam giác ABC, tìm GTLN của

$$T = \frac{a + b + c}{aA + bB + cC}.$$

Hướng dẫn giải:
Giả sử $a \leq b \leq c$ khi đó $A \leq B \leq C$. Áp dụng bất đẳng thức Trêbưsep ta có

$$\begin{aligned} & (A + B + C)(a + b + c) \leq 3(aA + bB + cC) \\ \Rightarrow \quad & \frac{\pi}{3} \leq \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \\ \Rightarrow \quad & \frac{3}{\pi} \geq \frac{a + b + c}{aA + bB + cC}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

3 Ứng dụng

3.1 Giải phương trình, bất phương trình.

3.1.1 Các định lí

Vấn đề tồn tại nghiệm của một phương trình, bất phương trình có điều kiện thường liên quan chặt chẽ tới việc tìm GTLN, GTNN của hàm số. Mối liên hệ ấy thể hiện qua các định lí dưới đây.

Định lí 1. *Xét phương trình,* $f(x) = \alpha\ x \in D$ (1)*. Giả thiết tồn tại*

$$M = \max_{x \in D} f(x), m = \min_{x \in D} f(x)$$

Khi đó phương trình (1) *có nghiệm khi và chỉ khi* $m \leq \alpha \leq M$

Định lí 2. *Xét bất phương trình* $f(x) \geq \alpha\ x \in D$ (2)*. Bất phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi* $M \geq \alpha$*.*

Định lí 3. *Xét bất phương trình* $f(x) \leq \beta\ x \in D$ (3)*. Bất phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi* $m \geq \beta$

Định lí 4. *Bất phương trình* (2) *đúng* $\forall x \in D \Longleftrightarrow m \geq \alpha$*.*
Bất phương trình (3) *đúng* $\forall x \in D \Longleftrightarrow M \leq \beta$*.*

3.1.2 Các ví dụ

Ví dụ 3.1.1. Giải phương trình

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$$

Lời giải. Đặt $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$. Xét trên miền $2 \leq x \leq 4$.
Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$f^2(x) \leq 2(x - 2 + 4 - x) = 4$$

Do $f(x) \geq 0$ nên $f(x) \leq 2$.
Ta thấy $f(3) = 2$. Vậy $\max\limits_{2 \leq x \leq 4} f(x) = 2$.
Đặt $g(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$. Suy ra $g(x) \geq 2, g(3) = 2$. Vậy $\min_{2 \leq x \leq 4} g(x) = 2$.
Vậy phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ g(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \\ (x-3)^2 + 2 = 2 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này có nghiệm duy nhất $x = 3$. Đó chính là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 3.1.2. Giải phương trình:

$$\sqrt{3xs^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

Lời giải. Đặt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3xs^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14} \\ &= \sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) \geq 5.\forall x \in D = \{4-2x-x^2 \geq 0\}$.
$f(x) = 5 \Leftrightarrow x = -1$.
Đặt $g(x) = 4-2x-x^2 = 5-(x+1)^2 \leq 5, g(x) = 5 \Leftrightarrow x = -1$.
Ta có $g(x) \leq 5 \leq f(x)$ Vậy

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3xs^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14} = 5 \ (1) \\ 4-2x-x^2 = 5 \ (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow x = -1$. Mà $x = -1$ cũng thoả mãn (1). Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài tập vận dụng

Bài tập 3.1.1. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1} = 2$$

Bài tập 3.1.2. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} \leq 2$$

Bài tập 3.1.3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3-6x+5} = (x^3+4)(x^2+2x-6) \\ x+\dfrac{2}{x} \geq 1+\dfrac{2}{x^2} \end{cases}$$

Bài tập 3.1.4. Giải phương trình:

$$2\sqrt{7x^3-11x^2+25x-12} = x^2+6x-1$$

Bài tập 3.1.5. Giải phương trình:

$$2x^4+(1-2x)^4 = \frac{1}{27}$$

Bài tập 3.1.6. Giải phương trình:

$$\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4-(x+\frac{1}{x})$$

3.2 Tìm điều kiện cho tham số m để phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, hệ bất phương trình có nghiệm.

Ví dụ 3.2.1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\frac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1} = x^2+2(2m-3)x+5m^2-16m+20$$

Lời giải. Đặt $f(x) = \dfrac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}$. Dùng phương pháp miền giá trị ta suy ra: $\max f(x) = 7$.
Đặt $g(x) = x^2+2(2m-3)x+5m^2-16m+20$. Theo tính chất của hàm số bậc hai thì:

$$\min g(x) = g(3-2m) = m^2-4m+11 = (m-2)^2+7$$

Từ đó ta có: $\min g(x) > 7, \forall m \neq 2$ và $\min g(x) = 7$ khi $m = 2$.
Vậy:

+ Nếu $m \neq 2$ thì $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) < \min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $m = 2$ thì $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = 7$ và phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1} = 7 \ (1) \\ x^2+2x+8 = 7 \ (2) \end{cases}$$

  (2) tương đương với $(x+1)^2+7 = 7 \Leftrightarrow x = -1$. Thay $x = -1$ vào (1) ta có: $VT(1) = \dfrac{13}{2} \neq 7$ suy ra hệ trên vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3.2.2. Tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi $-2 \leq x \leq 1$.

$$m^2x + m(x+1) - 2(x-1) \geq 0$$

Lời giải. Bất phương trình đã cho có thể viết lại là:

$$f(x) = (m^2+m-2)x + m + 2 \geq 0 \ (1)$$

Để (1) đúng với mọi $-2 \leq x \leq 1$ thì phải có $\min\limits_{-2\leq x\leq 1} f(x) \leq 0$.
Vì $f(x)$ là hàm bậc nhất nên ta có:

- Nếu $m^2+m-2 \geq 0$ thì $\min\limits_{-2\leq x\leq 1} f(x) = f(-2) = -2m^2-m+6$. Ta có hệ

$$\begin{cases} m^2+m-2 \geq 0 \\ -2m^2-m+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}$$

- Nếu $m^2 + m - 2 < 0$ thì $\min\limits_{-2 \le x \le 1} f(x) = m^2 + 2m$. Ta có hệ

$$\begin{cases} m^2 + m - 2 < 0 \\ m^2 + 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 1$$

Vậy $0 \le m \le \dfrac{3}{2}$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập vận dụng

Bài tập 3.2.1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10} + 3 - x = 0$$

Hướng dẫn giải: Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10} = x - 3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10 = (x-3)^2 \\ x \ge 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 5} = m \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ này có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{x \ge 3} f(x) \le m \le \max_{x \ge 3} f(x)$$

Sau đó dùng phương pháp miền giá trị để giải quyết bài toán. Đáp số: $m \ge 3$.

Bài tập 3.2.2. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^5 - (x-3)^5 = m \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải: Để ý tới bài toán phụ: "Cho hàm số $f(t) = t^n + (1-t)^n,\ n \in \mathbb{N}^*$" thì

$$\max_{0 \le t \le 1} f(t) = 1;\ \min_{0 \le t \le 1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Chuyển bài toán đã cho về dạng này!
Đáp số: $\dfrac{243}{16} \le m \le 243$.

Bài tập 3.2.3. Tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi $-4 \le x \le 6$

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \le x^2 - 2x + m$$

Hướng dẫn giải: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ ta đi đến đáp số: $m \ge 6$.

Bài tập 3.2.4. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \\ x^2 - mx + m \leq 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải: Viết lại hệ đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - mx + m \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm khi và chỉ khi $\min\limits_{\frac{1}{2} \leq x \leq 3} f(x) \leq 0$, tìm đi tìm $\min\limits_{\frac{1}{2} \leq x \leq 3} f(x)$. Từ đó đi đến đáp số:

$$k \leq -\frac{1}{2} \text{ hoặc } k \geq 4.$$

Bài tập 3.2.5. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + 2|x - m| + m^2 + m - 1 \leq 0$$

Hướng dẫn giải: Bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) \leq 0$

Xét các khả năng:

+ $m > 1$

+ $-1 \leq m \leq 1$

+ $m < -1$

Đáp số: $-1 \leq m \leq \dfrac{1}{2}$.