PHẦN I. TÓM TẮT GIÁO KHOA

A. ĐẠI SỐ

I. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ (3) có $\Delta = b^2 - 4ac$.

1) $\Delta < 0$: (3) vô nghiệm.

2) $\Delta = 0$: (3) có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3) $\Delta > 0$: (3) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Định lý Vi–et (thuận và đảo)

1) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thì $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

2) Nếu biết $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ thì $x,\ y$ là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

2. Bảng xét dấu của tam thức bậc hai f(x) = ax^2 + bx + c

1) $a > 0,\ \Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

2) $a < 0,\ \Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		–	0	+	0	–	

3) $a > 0,\ \Delta = 0$:

x	$-\infty$		$x_{kép}$		$+\infty$
f(x)		+	0	+	

4) $a < 0,\ \Delta = 0$:

x	$-\infty$		$x_{kép}$		$+\infty$
f(x)		–	0	–	

5) $a > 0,\ \Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		+	

6) $a < 0,\ \Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		–	

3. Bảng biến thiên của hàm số bậc hai f(x) = ax^2 + bx + c

1) a > 0:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

2) a < 0:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	$-\infty$

4. So sánh nghiệm của tam thức bậc hai f(x) = ax^2 + bx + c với một số

1) $af(\alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1 < \alpha < x_2$

2) $f(\alpha).f(\beta) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 < \beta \\ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \end{array}\right.$

3) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < x_1 < x_2$

4) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow x_1 < x_2 < \alpha$

7. Phương trình đại số bậc cao

Phương trình bậc n tổng quát có dạng $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0\ (a_0 \neq 0)$.

Thông thường ta chỉ giải được phương trình bậc 3 trở lên bằng cách nhẩm nghiệm.

7.1. Phương trình bậc ba: ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 ($a \neq 0$) (4)

1) Phương pháp giải

Bước 1. Nhẩm 1 nghiệm $x = \alpha$ của (4) (bấm máy tính).

Bước 2. Chia $ax^3 + bx^2 + cx + d$ cho ($x - \alpha$) (dùng sơ đồ Horner), đưa (4) về phương trình tích:

$$(x - \alpha)(ax^2 + Bx + C) = 0.$$

2) Sơ đồ Horner

	a	b	c	d
α	a	α a + b = B	α B + c = C	α C + d = 0

7.2. Phương trình bậc bốn đặc biệt

a) Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) (5)

Phương pháp giải: Đặt $t = x^2,\ t \geq 0$. (5) $\Leftrightarrow$ $at^2 + bt + c = 0$.

b) Phương trình có dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$ với $a + c = b + d$ (6)

Phương pháp giải: Đặt $t = (x + a)(x + c)$, đưa (6) về phương trình bậc 2 theo t.

c) Phương trình có dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ (7)

Phương pháp giải: Đặt $t = x + \dfrac{a+b}{2}$, đưa (7) về phương trình trùng phương theo t.

d) Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$ ($a \neq 0$) (8)

Phương pháp giải

<u>Bước 1.</u> Chia 2 vế cho x^2, $(8) \Leftrightarrow a\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \dfrac{1}{x}\right) + c = 0$.

<u>Bước 2.</u> Đặt $t = x \pm \dfrac{1}{x}$, đưa (8) về phương trình bậc hai theo t.

8. Bất phương trình hữu tỉ $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$

<u>Bước 1.</u> Lập trục xét dấu chung cho P(x) và Q(x).

<u>Bước 2.</u> Dựa vào trục xét dấu để kết luận nghiệm.

9. Điều kiện để phương trình có nghiệm trong khoảng (a; b)

a) Định lý 1

Hàm số f(x) liên tục trên [a; b] thỏa $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình f(x) = 0 có nghiệm trong (a; b) (ngược lại không đúng).

b) Định lý 2

Hàm số $f(x)$ liên tục trên [a; b] và có $f^{/}(x) > 0$ (hoặc $f^{/}(x) < 0$) trong khoảng $(a,\ b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm trong $(a,\ b)$.

II. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ.

1. Các hằng đẳng thức cần nhớ

1) $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, & A \geq 0 \\ -A, & A < 0 \end{cases}$; 2) $A^2 \pm AB + B^2 = \left(A \pm \dfrac{B}{2}\right)^2 + \dfrac{3B^2}{4}$;

3) $(A \pm B)^3 = A^3 \pm B^3 \pm 3AB(A \pm B)$; 4) $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

2. Phương trình và bất phương trình chứa giá trị tuyệt đối

1) $|A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$; 2) $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases}$; 3) $|A| < |B| \Leftrightarrow -|B| < A < |B|$;

4) $|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ -B < A < B \end{cases}$; 5) $|A| > B \Leftrightarrow B < 0 \vee \begin{cases} B \geq 0 \\ A < -B \vee A > B \end{cases}$.

3. Phương trình và bất phương trình vô tỉ

1) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \vee B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$; 2) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow B \geq 0 \wedge A = B^2$; 3) $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$;

4) $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge C \geq 0 \\ \left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)^2 = C \end{cases}$ đưa về dạng $\sqrt{A} = B$; 5) $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$;

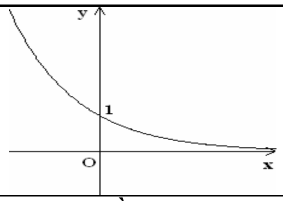
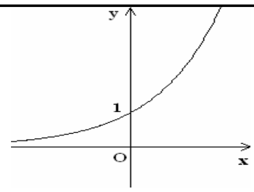
6) $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \wedge B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$; 7) $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$; 8) $\sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A < B$;

9) $\sqrt[2n+1]{A} = B \Leftrightarrow A = B^{2n+1}$; 10) $\sqrt[2n]{A} = \sqrt[2n]{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \vee B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$; 11) $\sqrt[2n]{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^{2n} \end{cases}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

1. Hàm số mũ $y = a^x$ (a > 0)

1) Miền xác định $D = \mathbb{R}$	2) Miền giá trị $G = (0;+\infty)$
3) <u>0< a< 1:</u> Hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$	4) <u>a > 1:</u> Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

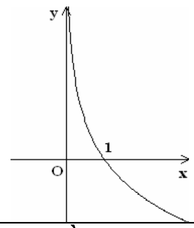
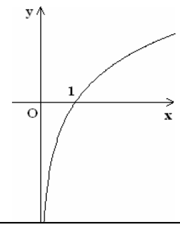
	

Một số công thức cần nhớ (giả sử các điều kiện được thỏa)

1) $a^0 = 1\ (a \ne 0)$; 2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; 3) $a^m.a^n = a^{m+n}$; 4) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

5) $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$; 6) $(ab)^m = a^m.b^m$; 7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

2. Hàm số logarit y = log$_a$x $(0 < a \ne 1)$ **: y = log$_a$x** $\Leftrightarrow$ **x = a^y**

1) Miền xác định $D = (0;+\infty)$	2) Miền giá trị $G = \mathbb{R}$
3) <u>0 < a < 1:</u> Hàm nghịch biến trên D $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ 	4) <u>a > 1:</u> Hàm số đồng biến trên D $\lim\limits_{x\to 0^+} y = -\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ 

Một số công thức cần nhớ (giả sử các điều kiện được thỏa)

1) $a^{\log_a x} = x$; 2) $e^{\ln x} = x$; 3) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$; 4) $\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|$;

5) $\log_{a^\alpha} b^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha}\log_a b$; 6) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; 7) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; 8) $\log_a b.\log_b c = \log_a c$;

9) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$; 10) $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

3. Phương trình và bất phương trình mũ cơ bản

1) $\begin{cases} a^{f(x)} = b \\ 0 < a \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$; 2) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x), g(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$;

3) $\begin{cases} a^{f(x)} > b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b > 0 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} b \le 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right.$; 4) $\begin{cases} a^{f(x)} > b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b > 0 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} b \le 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right.$;

5) $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$; 6) $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

4. Phương trình và bất phương trình logarit cơ bản

1) $\begin{cases} \log_a f(x) = b \\ 0 < a \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = a^b$; 2) $\begin{cases} \log_a f(x) = \log_a g(x) \\ 0 < a \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \log_a f(x) > b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^b$; 4) $\begin{cases} \log_a f(x) > b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > a^b$;

5) $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$; 6) $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

<u>Nhắc lại:</u> Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Đặt $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

1) $D \neq 0$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = D_x / D \\ y = D_y / D \end{cases}$.

2) $D = 0,\ D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ phương trình vô nghiệm.

3) $D = D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm thỏa $a_1x + b_1y = c_1$ hoặc $a_2x + b_2y = c_2$.

1. Hệ phương trình đẳng cấp

Phương pháp chung

1) Nhận xét y = 0 có thỏa hệ phương trình không, nếu có tìm x và thu được nghiệm.

2) Với $y \neq 0$, đặt $x = ty$ thay vào hệ phương trình giải tìm t, y và x.

3) Thử lại nghiệm.

Ví dụ: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} y^3 - x^3 = 7 \\ 2x^2y + 3xy^2 = 16 \end{cases}$.

2. Hệ phương trình đối xứng loại I (cả 2 phương trình đều đối xứng)

Phương pháp chung

1) Xét điều kiện, đặt S = x + y, P = xy $(S^2 \geq 4P)$.

2) Giải hệ tìm S, P rồi dùng Vi–et đảo tìm x, y.

Ví dụ: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$.

3. Hệ phương trình đối xứng loại II

a. Dạng 1 (đổi vị trí x và y thì phương trình này trở thành phương trình kia)

Phương pháp chung

Cách 1. Trừ hai phương trình cho nhau, đưa về phương trình tích, giải x theo y (hay ngược lại) rồi thế vào một trong hai phương trình của hệ.

Ví dụ: $\begin{cases} x^3 + 2x = y \\ y^3 + 2y = x \end{cases}$, $\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 \end{cases}$.

Cách 2 (nếu cách 1 không thực hiện được)

Cộng và trừ lần lượt hai phương trình đưa về hệ mới tương đương gồm hai phương trình tích (thông thường tương đương với 4 hệ mới).

Ví dụ: $\begin{cases} x^3 - 2x = y \\ y^3 - 2y = x \end{cases}$.

Cách 3. Sử dụng hàm số đơn điệu để suy ra x = y.

Ví dụ: $\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \sin y \\ y = \sin x \end{cases}$.

b. Dạng 2 (chỉ có 1 phương trình đối xứng)

Cách 1

Đưa phương trình đối xứng về dạng tích, giải y theo x thế vào phương trình còn lại.

Ví dụ: $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$.

Cách 2

Thường đưa về dạng $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ với hàm f(x) đơn điệu.

Ví dụ: $\begin{cases} e^x - e^y = y - x \\ x^2y - 3y - 18 = 0 \end{cases}$.

4. Hệ phương trình chứa mũ – logarit và dạng khác

Tùy từng trường hợp cụ thể chọn phương pháp thích hợp (thường dùng phương pháp thế).

V. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

1. Bất đẳng thức Cauchy hai số

Cho hai số không âm a và b, ta có: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra khi a = b.

2. Bất đẳng thức Cauchy n số

Cho n số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ta có: $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$. Đẳng thức khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

<u>Chú ý:</u>

Bất đẳng thức Cauchy ngược $a_1.a_2...a_n \le \left(\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n$.

VI. SỐ PHỨC

1. Số phức và các phép tính cơ bản

a) Định nghĩa số phức

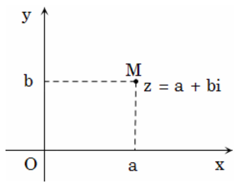
Mỗi biểu thức dạng $a + bi$, trong đó $a,\ b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ được gọi là một số phức.
Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z.
Tập hợp các số phức ký hiệu là $\mathbb{C} = \left\{a + bi \mid a,\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\right\}$.

b) Số phức bằng nhau

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ và } b = d\,.$$

c) Biểu diễn hình học số phức

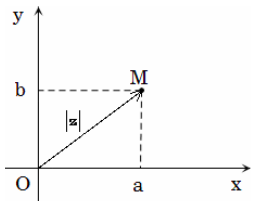
Mỗi số phức $z = a + bi$ hoàn toàn được xác bởi một cặp số thực $(a;\ b)$.
Điểm M(a; b) trong hệ tọa độ vuông góc Oxy được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$.



d) Môđun của số phức

Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm M(a; b) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.
Độ dài của $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z và ký hiệu là $|z|$.

Vậy $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

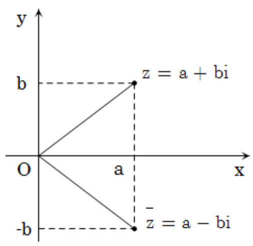


e) Số phức liên hợp

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi $a - bi$ là **số phức liên hợp** của z và ký hiệu là $\bar{z} = a - bi$.

<u>NHẬN XÉT</u>

1) Trên mặt phẳng tọa độ điểm biểu diễn hai số phức liên hợp đối xứng với nhau qua trục Ox.



2) $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow \bar{\bar{z}} = a + bi$ hay $\bar{\bar{z}} = z$.

3) $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

f) Các phép tính cơ bản

1) (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;

2) (a + bi) – (c + di) = (a – c) + (b – d)i.

3) (a + bi)(c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i;

4) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$;

5) $z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$;

6) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1.\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}} = \dfrac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2}$, $z_2 \ne 0$.

<u>Chú ý</u>

i) Phép nhân hai số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức rồi thay $i^2 = -1$ trong kết quả nhận được.
ii) Phép cộng và phép nhân các số phức có tất cả các tính chất của phép cộng và phép nhân các số thực.

iii) Trong thực hành, để tính thương $\dfrac{c + di}{a + bi}$, ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a + bi$.

4i) Số thực a âm có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{|a|}$.

g) Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$. Biệt số của phương trình là $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$.

b) Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt xác định bởi công thức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

c) Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức phân biệt xác định bởi công thức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

2. Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng

a) Dạng lượng giác của số phức

i) Cho số phức z khác 0 có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là M. Số đo (radian) của góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là một **acgumen** của z.

ii) Cho số phức z có mođun r và acgumen là φ thì z = r(cosφ + isinφ) được gọi là dạng lượng giác của z.

b) Nhân và chia hai số phức

Cho hai số phức z = r(cosφ + isinφ) và z' = r'(cosφ' + isinφ'), ta có:

$$zz' = r.r'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')] \text{ và } \frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)] \ (r > 0).$$

c) Công thức Moivre: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

d) Căn bậc hai của số phức

Số phức z dưới dạng lượng giác (r > 0) có hai căn bậc hai là: $\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$ và $\sqrt{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2} + \pi\right)\right]$.

……………………………………………………….

B. LƯỢNG GIÁC

I. CUNG VÀ GÓC – CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Quan hệ giữa độ và radial (rad)

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \ 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0}$$

2. Bảng chuyển đổi thường dùng

Độ	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Radial	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

3. Biểu diễn cung – góc lượng giác

Nếu cung (hoặc góc) lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có số đo là $\alpha + \dfrac{k2\pi}{n}$ (hoặc $a^0 + \dfrac{k.360^\circ}{n}$) với $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^+$ thì có n điểm M trên đường tròn lượng giác cách đều nhau.

4. Bảng giá trị lượng giác của cung (góc) đặc biệt

Cung (góc) α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$
$\cot\alpha$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5. Cung (góc) liên kết

5.1. Cung (góc) đối nhau

1) $\cos(-x) = \cos x$; 2) $\sin(-x) = -\sin x$; 3) $\tan(-x) = -\tan x$; 4) $\cot(-x) = -\cot x$.

5.2. Cung (góc) bù nhau

1) $\cos(\pi - x) = -\cos x$; 2) $\sin(\pi - x) = \sin x$; 3) $\tan(\pi - x) = -\tan x$; 4) $\cot(\pi - x) = -\cot x$.

5.3. Cung (góc) phụ nhau

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; 2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; 3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$; 4) $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$.

5.4. Cung (góc) hơn kém nhau π

1) $\cos(x + \pi) = -\cos x$; 2) $\sin(x + \pi) = -\sin x$; 3) $\tan(x + \pi) = \tan x$; 4) $\cot(x + \pi) = \cot x$.

5.5. Cung (góc) hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$

1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$; 2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$; 3) $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot x$; 4) $\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\tan x$.

6. Công thức cơ bản

1) $\sin^2x + \cos^2x = 1$; 2) tgx.cotgx = 1; 3) $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$.

7. Công thức cộng

1) $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$; 2) $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$; 3) $\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y}$.

8. Công thức nhân đôi

1) $\cos2x = \cos^2x - \sin^2x = 2\cos^2x - 1 = 1 - 2\sin^2x$; 2) sin2x = 2sinxcosx; 3) $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

9. Công thức nhân ba

1) $\cos3x = 4\cos^3x - 3\cos x$; 2) $\sin3x = 3\sin x - 4\sin^3x$; 3) $\tan 3x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$.

10. Công thức hạ bậc

1) $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$; 2) $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; 3) $\cos^3 x=\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$; 4) $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$.

11. Công thức biểu diễn sinx, cosx, tgx theo $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$

1) $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; 2) $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; 3) $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$.

12. Công thức biến đổi tích thành tổng

1) $\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$; 2) $\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$;

3) $\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)]$.

13. Công thức biến đổi tổng thành tích

1) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; 2) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$;

3) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; 4) $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$;

5) $\tan x\pm\tan y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$; 6) $\cot x\pm\cot y=\frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$.

14. Công thức đặc biệt cần nhớ

1) $1 + \sin2x = (\sin x + \cos x)^2$; 2) $1 - \sin2x = (\sin x - \cos x)^2$; 3) $\sin^4x + \cos^4x = 1 - \frac{1}{2}\sin^22x$; 4) $\sin^6x + \cos^6x = 1 - \frac{3}{4}\sin^22x$.

5) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\pi/4\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\pi/4\right)$;

6) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\pi/4\right)=-\sqrt{2}\cos\left(x+\pi/4\right)$.

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác cơ bản

1) $\cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=-\alpha+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin x=\sin\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

3) $\tan x=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

4) $\cot x=\cot\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Phương trình cơ bản đặc biệt cần nhớ

1) $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2) $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3) $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

4) $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

5) $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6) $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2. Các dạng phương trình lượng giác

2.1. Dạng bậc hai theo một hàm số lượng giác

1) $a\cos^2x + b\cos x + c = 0$	3) $a.\tan^2x + b.\tan x + c = 0$
2) $a\sin^2x + b\sin x + c = 0$	4) $a.\cot^2x + b.\cot x + c = 0$

Phương pháp giải toán

Bước 1. Đặt ẩn phụ t = cosx (hoặc t = sinx, t = tanx, t = cotx) và điều kiện của t (nếu có).

Bước 2. Đưa phương trình về dạng $at^2 + bt + c = 0$.

Chú ý

Nếu 1 phương trình lượng giác được biến đổi thành 2 phương trình **cơ bản** trở lên thì sau khi giải xong, ta phải dựa vào đường tròn lượng giác để tổng hợp nghiệm (nếu có).

2.2. Dạng bậc nhất theo sinx và cosx

$$\boxed{a\sin x + b\cos x + c = 0 \ (*) \ (\text{a và b khác } 0)}$$

Phương pháp giải toán

Cách 1. Chia hai vế (*) cho a và đặt $\frac{b}{a} = \tan\alpha$.

$$(*) \Leftrightarrow \sin x + \tan\alpha\cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha.$$

Cách 2. Chia hai vế (*) cho $\sqrt{a^2+b^2}$ và đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$.

$$(*) \Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Chú ý: Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\boxed{a^2 + b^2 \ge c^2}$$

2.3. Dạng đẳng cấp (thuần nhất) theo sinx và cosx

a) Đẳng cấp bậc hai

$$\boxed{a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = 0 \ (*)}$$

Phương pháp giải toán

Cách 1. Kiểm tra $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có là nghiệm của (*) không (nếu có ta thu được nghiệm).

Với $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2x$: (*) $\Leftrightarrow$ $a\tan^2x + b\tan x + c = 0$.

Cách 2. Dùng công thức hạ bậc và nhân đôi, ta đưa (*) về bậc nhất theo sin2x và cos2x.

b) Đẳng cấp bậc cao (giải tương tự)

2.4. Dạng đối xứng đối với sinx và cosx

$$\boxed{a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0 \ (*)}$$

Phương pháp giải toán

Bước 1. Đặt t = sinx + cosx = $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ và $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Bước 2. Thay vào (*) rồi ta giải phương trình bậc hai theo t.

Chú ý

Phương trình a(sinx – cosx) + bsinxcosx + c = 0 cũng có cách giải tương tự với t = sinx – cosx.

2.5. Dạng phương trình khác

Không có cách giải tổng quát, tùy từng bài toán cụ thể ta dùng công thức biến đổi để đưa về các dạng đã biết cách giải.

III. GIẢI TOÁN TRONG TAM GIÁC

1. Liên hệ các góc trong tam giác ABC

1) $A + B + C = \pi \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = \pi - (B+C) \\ B = \pi - (C+A) \\ C = \pi - (A+B) \end{array}\right.$

2) $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \\ \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C+A}{2} \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \end{array}\right.$

2. Các định lý trong tam giác ABC. Trong ΔABC, ta ký hiệu:

1) a, b, c lần lượt là các cạnh đối diện các góc A, B, C.

2) R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp.

3) $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi ΔABC.

4) m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C.

5) h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C.

6) S là diện tích của ΔABC.

2.1. Định lý Phythagore (Pitago)

Cho ΔABC vuông tại A và đường cao AH, ta có:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Hệ quả

1) $BA^2 = BH.BC$, $CA^2 = CH.CB$ 2) $AH.BC = AB.AC$ 3) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

2.2. Định lý hàm số cosin

$$\boxed{1)\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \quad 2)\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B \quad 3)\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C}$$

2.3. Định lý hàm số sin

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

3. Công thức tính độ dài đường trung tuyến

1) $m_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$; 2) $m_b = \sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}}$;

3) $m_c = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}}$; 4) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

4. Công thức tính diện tích

1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$; 2) $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$;

3) S = p.r; 4) $S = \frac{abc}{4R}$; 5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

………………………………………………..

C. GIẢI TÍCH

I. TÍNH CHẴN – LẺ CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa

1) Tập hợp $D \subset \mathbb{R}$ được gọi là đối xứng $\Leftrightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

2) Cho hàm số y = f(x) có MXĐ $D \subset \mathbb{R}$ đối xứng

a) f(x) được gọi là hàm số chẵn $\Leftrightarrow f(-x) = f(x),\ \forall x \in D$.

b) f(x) được gọi là hàm số lẻ $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D$.

<u>Chú ý</u>

Đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ. Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục tung.

II. ĐẠO HÀM – VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

1. Quy tắc tính đạo hàm

Cho u(x), v(x), w(x) là các hàm số theo biến số x và có đạo hàm. Ta có:

1) $(a.u)' = a.u'$ $(a \in \mathbb{R})$ 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3) $(u.v)' = u'.v + u.v'$, $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$ $(v \neq 0)$, $\left(\frac{a}{v}\right)' = -a.\frac{v'}{v^2}$ $(v \neq 0,\ a \in \mathbb{R})$.

2. Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp (hàm số được cho bởi 1 công thức)

Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản	**Đạo hàm của hàm số hợp u = u(x)**
1) $\left(x^\alpha\right)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ 2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ 3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	1) $\left(u^\alpha\right)' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$ 2) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ 3) $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
4) $\left(\sin x\right)' = \cos x$ 5) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$ 6) $\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	4) $\left(\sin u\right)' = u'.\cos u$ 5) $\left(\cos u\right)' = -u'.\sin u$ 6) $\left(\tan u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$

7) $\left(\cot x\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	7) $\left(\cot u\right)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u} = -u'(1+\cot^2 u)$
8) $\left(e^x\right)' = e^x$ 9) $\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$	8) $\left(e^u\right)' = u'.e^u$ 9) $\left(a^u\right)' = u'.a^u.\ln a$
10) $\left(\ln\left\|x\right\|\right)' = \dfrac{1}{x}$ 11) $\left(\log_a\left\|x\right\|\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$	10) $\left(\ln\left\|u\right\|\right)' = \dfrac{u'}{u}$ 11) $\left(\log_a\left\|u\right\|\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

3. Vi phân

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx \text{ hay } dy = y'dx\,.}$$

III. HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU – CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Hàm số đơn điệu

Trừ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, các hàm số còn lại (bậc 3, bậc 4, bậc 2/1) ta dùng kết quả sau:

f(x) đồng biến trên khoảng (a; b) $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a;\ b)$.

f(x) nghịch biến trên khoảng (a; b) $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a;\ b)$.

2. Cực trị của hàm số

Định lý 1. Cho y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) chứa x_0. Nếu f(x) đạt cực trị tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý

a) Hàm số có thể đạt cực trị tại x_0 nhưng không có đạo hàm tại x_0.

b) Hàm số có $f'(x_0) = 0$ nhưng có thể không đạt cực trị tại x_0.

Định lý 2. Cho hàm số f(x) có đạo hàm trong khoảng chứa x_0

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + sang – tại $x = x_0$ thì f(x) đạt cực đại tại x_0

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ – sang + tại $x = x_0$ thì f(x) đạt cực tiểu tại x_0

Định lý 3. Cho hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp hai liên tục trong khoảng chứa x_0

a) Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì f(x) đạt cực tiểu tại x_0; b) Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì f(x) đạt cực tiểu tại x_0.

3. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (tham khảo)

a) Hàm số bậc ba

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Giả sử (C) có hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$, để viết phương trình đường thẳng đi qua A và B ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Chia y cho y' ta được $y = (px + q)y' + \alpha x + \beta$ (*).

Bước 2. Thế tọa độ của A và B vào (*) ta có: $\begin{cases} y_1 = (px_1 + q).y'\left(x_1\right) + \alpha x_1 + \beta \\ y_2 = (px_2 + q).y'\left(x_2\right) + \alpha x_2 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta \\ y_2 = \alpha x_2 + \beta \end{cases}$.

Bước 3. Đường thẳng $(AB): y = \alpha x + \beta$.

Chú ý: Giá trị cực trị là $y_{CT} = \alpha x_{CT} + \beta$.

b) Hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ (tham khảo)

Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đồ thị (C). Giả sử (C) có hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$, để viết phương trình đường thẳng đi qua A và B ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Đặt $U = ax^2 + bx + c,\ V = dx + e$ ta có $y' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$ (*).

Bước 2. Thế tọa độ của A và B vào (*) ta có:

$$y'(x_{1,2}) = \frac{U'(x_{1,2}).V(x_{1,2}) - U(x_{1,2}).V'(x_{1,2})}{V^2(x_{1,2})} \Rightarrow U'(x_{1,2}).V(x_{1,2}) - U(x_{1,2}).V'(x_{1,2}) = 0$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{U(x_{1,2})}{V(x_{1,2})} = \frac{U^/(x_{1,2})}{V^/(x_{1,2})} = \frac{2a}{d}x_{1,2} + \frac{b}{d}.$$

Bước 3. Đường thẳng $(AB): y = \frac{2a}{d}x + \frac{b}{d}$.

Chú ý: Giá trị cực trị là $y_{CT} = (2a / d)x_{CT} + (b / d)$.

IV. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT – GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải toán

1. Hàm số liên tục trên đoạn [a; b]

Cho hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Để tìm giá trị lớn nhất (max) và giá trị nhỏ nhất (min) của f(x) trên đoạn [a; b] ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải phương trình $f^/(x) = 0$ (tìm điểm tới hạn). Giả sử có n nghiệm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc đoạn [a; b] (ta loại các nghiệm nằm ngoài đoạn [a; b]).

Bước 2. Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$.

Bước 3. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong các giá trị ở bước 2 là các giá trị tương ứng cần tìm.

Chú ý:

a) Để cho gọn ta dùng ký hiệu f_{min}, f_{max} thay cho $\min\limits_{x\in X} f(x)$, $\max\limits_{x\in X} f(x)$.

b) Nếu đề bài chưa cho đoạn [a; b] thì ta phải tìm MXĐ của hàm số trước khi làm bước 1.

c) Có thể đổi biến số $t = t(x)$ và viết $y = f(x) = g(t(x))$.

Gọi T là miền giá trị của hàm t(x) (thường gọi là điều kiện của t đối với x) thì: $\min\limits_{x\in X} f(x) = \min\limits_{t\in T} g(t)$, $\max\limits_{x\in X} f(x) = \max\limits_{t\in T} g(t)$.

2. Hàm số liên tục trên khoảng (a; b) hoặc trên $\mathbb{R}$

Cho hàm số y = f(x) liên tục trên $D = (a;b)$ hoặc $D = \mathbb{R}$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải $f^/(x) = 0$ (tìm điểm tới hạn). Giả sử có n nghiệm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc D (ta loại các nghiệm không thuộc D).

Bước 2. Tính $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_1$, $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = L_2$.

Bước 3.

1) $\min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} < \min\{L_1, L_2\} \Rightarrow f_{min} = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ (1).

2) $\max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} > \max\{L_1, L_2\} \Rightarrow f_{max} = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ (2).

3) Nếu không thỏa (1) (hoặc (2)) thì hàm số không đạt min (hoặc max).

Chú ý: Có thể lập bảng biến thiên của hàm số f(x) thay cho bước 3.

V. TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường cong (C): y = f(x)

Bước 1. Kiểm tra điểm M thuộc đường cong (C).

Bước 2. Áp dụng công thức $y - y_0 = f^/(x_0)(x - x_0)$.

2. Tiếp tuyến với đường cong (C): y = f(x) biết hệ số góc là k

Bước 1. Giải phương trình $f^/(x) = k \Rightarrow x_0 \Rightarrow y_0 \Rightarrow M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Bước 2. Áp dụng công thức $y - y_0 = k(x - x_0)$.

3. Tiếp tuyến đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ với đường cong (C): y = f(x) (M có thể thuộc (C))

Bước 1. Tiếp tuyến qua điểm M có dạng (d): $y = k(x – x_0) + y_0$.

Bước 2. (d) tiếp xúc (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_0) + y_0 & (1) \\ f^/(x) = k & (2) \end{cases}$.

Bước 3. Giải hệ phương trình trên bằng cách thế k từ (2) vào (1), giải x và thế trở lại (2) để tìm k. Cuối cùng thế k vào phương trình của (d).

VI. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ (hàm số chẵn)

Gọi $(C): y = f(x)$ và $(C_1): y = f(|x|)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Vẽ đồ thị (C) và chỉ giữ lại phần đồ thị nằm phía bên phải trục tung.

Bước 2. Lấy đối xứng phần đồ thị ở bước 1 qua trục tung ta được đồ thị (C_1).

2. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

Gọi $(C): y = f(x)$ và $(C_2): y = |f(x)|$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Vẽ đồ thị (C).
Bước 2. Giữ lại phần đồ thị của (C) nằm phía trên trục hoành. Lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành của (C) qua trục hoành ta được đồ thị (C_2).

3. Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$

Gọi $(C_1): y = f\left(|x|\right)$, $(C_2): y = \left|f(x)\right|$ và $(C_3): y = \left|f\left(|x|\right)\right|$.
Dễ thấy để vẽ (C_3) ta thực hiện các bước vẽ (C_1) rồi (C_2) (hoặc (C_2) rồi (C_1)).

……………………………………………

D. HÌNH HỌC

Chương I. HÌNH HỌC PHẲNG
I. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$, ta có:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2)$. 2) $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2),\ k \in \mathbb{R}$.

3) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}(b_1 \neq 0 \neq b_2)$.

4) $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. 5) $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

6) $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

7) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

8) Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB} \Rightarrow M\left(\dfrac{x_A - k.x_B}{1-k};\ \dfrac{y_A - k.y_B}{1-k}\right)$.

9) Điểm I là trung điểm của đoạn AB thì $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

10) Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3};\ \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

II. ĐƯỜNG THẲNG
1. Phương trình đường thẳng
1.1. Phương trình tổng quát

Phương trình tổng quát của đường thẳng (d) có dạng $Ax + By + C = 0\ \left(A^2 + B^2 > 0\right)$.

1) $\vec{u} = (-B;\ A)$ hoặc $\vec{u} = (B; -A)$ là vectơ chỉ phương (VTCP) của (d).

2) $\vec{n} = (A;\ B)$ là vectơ pháp tuyến (VTPT) của (d).

3) (d) đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và $\vec{n} = (A;\ B)$ thì (d): $pt(d): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

1.2. Phương trình tham số (ptts)

(d) đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1;\ u_2)$ thì $ptts(d): \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

1.3. Phương trình chính tắc (ptct)

(d) đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1;\ u_2)$ với $u_1u_2 \neq 0$ thì $ptct(d): \dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$.

1.4. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

$pt(AB): \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$ hoặc $pt(AB): \dfrac{x - x_B}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_B}{y_B - y_A}$.

1.5. Phương trình đoạn chắn

Cho (d) đi qua $A(a; 0), B(0; b)$ $(a \neq 0 \neq b)$ thì $pt(d): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

1.6. Đặc biệt

$pt(Ox): y = 0$, $pt(Oy): x = 0$.

2. Một số tính chất

Cho hai đường thẳng (d_1): $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và (d_2): $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

2.1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

1) (d_1) cắt (d_2) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow A_1B_2 \neq A_2B_1$. Hoặc $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ $\left(A_2 \neq 0 \neq B_2\right)$.

2) (d_1) song song (d_2) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ hoặc $\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

3) (d_1) trùng (d_2) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$.

2.2. Góc giữa hai đường thẳng

Gọi $\varphi,\ \vec{n_1},\ \vec{n_2}$ là góc và VTPT của (d_1) và (d_2), ta có: $\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|.\left|\vec{n_2}\right|}$.

2.3. Khoảng cách từ $M_0(x_0;\ y_0)$ đến (d): $d(M_0;\ (d)) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

III. ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I(a; b), bán kính R.

1.1. Phương trình chính tắc (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

1.2. Phương trình tổng quát (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho (d): $Ax + By + C = 0$ và (C) tâm I bán kính R, ta có 3 vị trí tương đối sau đây:

1) (d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow$ d(I; (d)) = R.

2) (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ d(I; (d)) < R.

3) (d) không cắt (C) $\Leftrightarrow$ d(I; (d)) > R.

3. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho (C_1) tâm I_1 bán kính R_1 và (C_2) tâm I_2 bán kính R_2, ta có 5 vị trí tương đối sau đây:

1) (C_1) và (C_2) ngoài nhau $\Leftrightarrow$ $I_1I_2 > R_1 + R_2$.

2) (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) $\Leftrightarrow$ $I_1I_2 = R_1 + R_2$.

3) (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left|R_1 - R_2\right| < I_1I_2 < R_1 + R_2$.

4) (C_1) tiếp xúc trong với (C_2) $\Leftrightarrow I_1I_2 = \left|R_1 - R_2\right|$.

5) (C_1) và (C_2) chứa nhau $\Leftrightarrow I_1I_2 < \left|R_1 - R_2\right|$.

IV. CÁC ĐƯỜNG CONIC

1. ELIP

1.1. Định nghĩa

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và hằng số 2a (a > c > 0). Tập (E) là một elip nếu $M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$.

1) F_1, F_2 là 2 tiêu điểm. 2) $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự.

3) $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ là 4 đỉnh của elip.

1.2. Phương trình chính tắc: $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Trong đó, $\mathbf{b^2 = a^2 - c^2}$ và **a > b > 0**.

1.3. Bán kính qua tiêu điểm

Cho điểm M thuộc $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta có $MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M$, $MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M$.

1.4. Tâm sai

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\ \left(e < 1\right).$$

1.5. Đường chuẩn của elip

$$(\Delta_1): x = -\frac{a}{e} \Leftrightarrow x = -\frac{a^2}{c},\ (\Delta_2): x = \frac{a}{e} \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{c}.$$

1.6. Tiếp tuyến với elip

Điều kiện tiếp xúc

Cho đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$ và elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta có: (d) tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a^2A^2 + b^2B^2 = C^2}$ $(C \neq 0)$.

2. HYPERPOL

2.1. Định nghĩa

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và hằng số $2a$ ($c > a > 0$).

Tập (H) là một hyperpol nếu $M \in (H) \Leftrightarrow \left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$.

1) $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ là 2 tiêu điểm.

2) $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự.

3) $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ là 2 đỉnh thuộc trục thực. $B_1(0;-b)$, $B_2(0; b)$ là 2 đỉnh thuộc trục ảo.

2.2. Phương trình chính tắc (H)

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$.

2.3. Bán kính qua tiêu điểm

1) M thuộc nhánh phải ($x_M > 0$): $\mathbf{MF_1 = ex_M + a,\ MF_2 = ex_M - a}$.

2) M thuộc nhánh trái ($x_M < 0$): $\mathbf{MF_1 = -ex_M - a,\ MF_2 = -ex_M + a}$.

2.4. Tâm sai: $e = \dfrac{c}{a} > 1$

2.5. Đường chuẩn: $x = \pm\dfrac{a}{e} = \pm\dfrac{a^2}{c}$

2.6. Tiệm cận: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

2.7. Điều kiện tiếp xúc với đường thẳng: $\mathbf{a^2A^2 - b^2B^2 = C^2}$ $(C \neq 0)$

Chú ý: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ là hyperpol liên hợp của $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

3. PARAPOL

3.1. Định nghĩa

Cho đường thẳng cố định (Δ) và điểm $F \notin (\Delta)$ cố định. Tập (P) là một parapol nếu $M \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M,\ \Delta)$.

1) $F\left(\dfrac{p}{2};\ 0\right)$ là tiêu điểm, (Δ) là đường chuẩn.

2) $p = d(F,\ \Delta)$ là tham số tiêu.

3) O(0; 0) là đỉnh và MF là bán kính qua tiêu điểm của M (M thuộc parapol).

3.2. Phương trình chính tắc (P): $\mathbf{y^2 = 2px\ (p > 0)}$.

3.3. Tâm sai: e = 1.

3.4. Đường chuẩn: $x = -\dfrac{p}{2}$.

3.4. Điều kiện tiếp xúc: $\mathbf{2AC = B^2p}$.

3.5. Các dạng parapol khác: $\mathbf{y^2 = -2px,\ x^2 = 2py,\ x^2 = -2py\ (p > 0)}$.

Chương II. CÁC TÍNH CHẤT VÀ CÔNG THỨC CƠ BẢN TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. Quan hệ song song

Trong không gian cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P), (Q), (R). Ta có:

1) a // b $\Leftrightarrow$ a, b đồng phẳng và $a \cap b = \varnothing$;

2) a // (P) $\Leftrightarrow a \cap (P) = \varnothing$;

3) a // (P) $\Leftrightarrow a \not\subset (P)$ và $\exists b \subset (P)$: a // b;

4) (P) // (Q) $\Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \varnothing$;

5) (P) // (Q) $\Leftrightarrow \exists a, b \subset (P)$, a cắt b: a, b // (Q);

6) a // (P) và $(P) \cap (Q) = b \Rightarrow$ a // b;

7) (P) // (Q), $(R) \cap (P) = a$ và $(R) \cap (Q) = b \Rightarrow$ a // b;

8) $a \subset (P)$, $b \subset (Q)$, a // b và $(P) \cap (Q) = c \Rightarrow$ a // b // c.

2. Quan hệ vuông góc

Trong không gian cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P), (Q), (R). Ta có:

1) $a \perp b \Leftrightarrow \widehat{(a, b)} = 90^0$;

2) $a \perp (P) \Leftrightarrow \exists b, c \subset (P)$, b cắt c: $a \perp b$, $a \perp c$;

3) $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \exists a \subset (P) : a \perp (Q)$;

4) (P) // (Q), $a \perp (P) \Rightarrow a \perp (Q)$;

5) $(P) \perp (R)$, $(Q) \perp (R)$ và $(P) \cap (Q) = a \Rightarrow a \perp (R)$;

6) $Ch_{(P)}a = b$, $c \subset (P)$ và $c \perp b \Rightarrow c \perp a$ (Định lý 3 đường vuông góc).

3. Thể tích

1) Thể tích khối lăng trụ: $V = Sh$ (S: diện tích đáy, h: độ dài đường cao).

2) Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}Sh$ (S: diện tích đáy, h: độ dài đường cao).

3) Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (R: bán kính đáy, h: độ dài đường cao).

4) Thể tích khối trụ: $V = Sh = \pi R^2 h$ (R: bán kính đáy, h: độ dài đường cao).

5) Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (R: bán kính đáy).

6) Cho khối tứ diện S.ABC. Trên các tia SA, SB, SC lấy lần lượt các điểm A', B', C' khác S.

Khi đó $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.

4. Diện tích

1) Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$ (R: bán kính đáy, l: độ dài đường sinh).

2) Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = \pi R(R + l)$ (R: bán kính đáy, l: độ dài đường sinh).

3) Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi Rh$ (R: bán kính đáy, h: độ dài đường cao).

4) Diện tích toàn phần hình trụ: $S_{tp} = 2\pi R(R + h)$ (R: bán kính đáy, h: độ dài đường cao).

5) Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$ (R: bán kính đáy).

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. CÔNG THỨC CƠ BẢN

Cho $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3),\ \vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$ ta có:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$. 2) $k.\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3),\ k \in R$.

3) Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. 4) $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

5) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$.

6) $\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

7) Tích có hướng $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$.

8) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}\ \left(b_1,\ b_2,\ b_3 \neq 0\right)$.

9) $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] \perp \vec{a},\ \left[\vec{a},\ \vec{b}\right] \perp \vec{b}$.

10) $\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) \Rightarrow \sin(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = \frac{\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$.

11) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\vec{c} = 0$.

12) Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB} \Rightarrow M\left(\frac{x_A - k.x_B}{1 - k}; \frac{y_A - k.y_B}{1 - k}; \frac{z_A - k.z_B}{1 - k}\right)$.

13) Điểm I là trung điểm của đoạn AB thì $I\left(\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2};\ \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

14) Tọa độ trọng tâm G của ΔABC : $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3};\ \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

15) Trọng tâm G của tứ diện ABCD thỏa $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ và có tọa độ:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4};\ \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4};\ \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right).$$

16) Diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right|$.

17) Thể tích hình hộp ABCD.A’B’C’D’: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

18) Thể tích tứ diện ABCD: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

19) $DE \perp (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ hoặc $\overrightarrow{DE} \parallel \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]$.

20) $DE \parallel (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DE}.\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = 0 \\ D \notin (ABC) \vee E \notin (ABC). \end{cases}$

21) Góc α giữa đường thẳng AB và CD thỏa $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{AB.CD}$.

22) Khoảng cách giữa điểm M và đường thẳng AB là $d\left(M,\ AB\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{AB}\right]\right|}{AB}$.

23) Khoảng cách giữa AB và CD chéo nhau: $d\left(AB,\ CD\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD}\right]\right|}$.

II. MẶT PHẲNG

1. Vector pháp tuyến và cặp vector chỉ phương của mặt phẳng

Định nghĩa 1

Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ vuông góc với mặt phẳng (α) là pháp vector của (α).

Định nghĩa 2

Hai vector $\vec{a},\ \vec{b}$ không cùng phương, khác $\vec{0}$ và *nằm trên* (α) (hoặc các mặt phẳng chứa $\vec{a},\ \vec{b}$ *song song* với (α)) là cặp vector chỉ phương (VTCP) của (α).

<u>Chú ý</u>

1) Nếu $\vec{a},\ \vec{b}$ là cặp VTCP của (α) thì $\vec{n} = \left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$ là pháp vector của (α).

2) Nếu ba điểm $A,\ B,\ C \in (\alpha)$ và không thẳng hàng thì $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]$ là PVT của (α).

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$ làm pháp vectơ thì phương trình tổng quát của (α):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

<u>Chú ý</u>

Nếu mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$ là pháp vector.

3. Các trường hợp riêng

a) Mặt phẳng tọa độ

$$(Oxy): z = 0,\ (Oxz): y = 0,\ (Oyz): x = 0.$$

b) Mặt phẳng chắn 3 trục tọa độ

Cho (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) $\left(a,\ b,\ c \neq 0\right)$ thì phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (gọi là *phương trình theo đoạn chắn*).

4. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α) : $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và (β) : $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có các pháp vector tương ứng là $\vec{n}_\alpha = \left(A_1;\ B_1;\ C_1\right),\ \vec{n}_\beta = \left(A_2;\ B_2;\ C_2\right)$.

1) (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha,\ \vec{n}_\beta$ không cùng phương $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$.

2) (α) trùng với $(\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

3) (α) song song với $(\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

III. ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa

Vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là *vector chỉ phương* (VTCP) của đường thẳng d nếu $\vec{u}$ nằm trên d hoặc đường thẳng chứa $\vec{u}$ song song với d.

Chú ý

Đường thẳng trong không gian **không có** pháp vector.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ thì: $\text{ptts d}: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ với $u_1 u_2 u_3 \neq 0$ thì

$$\text{ptct d}: \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 có VTCP là $\vec{u_1},\ \vec{u_2}$. Gọi điểm $M_1 \in d_1$ và $M_2 \in d_2$, ta có:

a) Trường hợp 1: d_1 và d_2 đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u_1},\ \vec{u_2}\right]\overrightarrow{M_1M_2} = 0$.

1) d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow \left[\vec{u_1},\ \vec{u_2}\right]\overrightarrow{M_1M_2} = 0$ và $\left[\vec{u_1},\ \vec{u_2}\right] \neq \vec{0}$ (không cùng phương).

2) d_1 song song với d_2 $\Leftrightarrow \left[\vec{u_1},\ \vec{u_2}\right] = \vec{0}$ và $M_1 \notin d_2$ (hoặc $M_2 \notin d_1$).

3) d_1 trùng với d_2 $\Leftrightarrow \left[\vec{u_1},\ \vec{u_2}\right] = \vec{0}$ và $M_1 \in d_2$ (hoặc $M_2 \in d_1$).

b) Trường hợp 2: d_1 chéo d_2 $\Leftrightarrow \left[\vec{u_1},\ \vec{u_2}\right]\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ (không đồng phẳng).

Chú ý: Ta có thể xét hệ phương trình của d_1 và d_2 để suy ra vị trí tương đối như sau:

1) Hệ phương trình **có nghiệm duy nhất** $\Leftrightarrow$ d_1 **cắt** d_2.

2) Hệ phương trình có **vô số nghiệm** $\Leftrightarrow$ d_1 **trùng** d_2.

3) Hệ phương trình **vô nghiệm** và $\vec{a_1},\ \vec{a_2}$ **cùng phương** $\Leftrightarrow$ d_1 **song song** với d_2.

4) Hệ phương trình **vô nghiệm** và $\vec{a_1},\ \vec{a_2}$ **không cùng phương** $\Leftrightarrow$ d_1 và d_2 **chéo nhau**.

6. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d đi qua điểm M và có VTCP $\vec{u}$, mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}$.

1) d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n} \neq 0$ (hoặc hệ phương trình có **nghiệm duy nhất**).

2) $d \parallel (\alpha) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n} = 0$ và $M \notin (\alpha)$ (hoặc hệ phương trình **vô nghiệm**).

3) $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n} = 0$ và $M \in (\alpha)$ (hoặc hệ phương trình có **vô số nghiệm**).

4) $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \left[\vec{u},\ \vec{n}\right] = \vec{0}$.

IV. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

1. Khoảng cách

a) Khoảng cách từ $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (P): Ax + By + Cz + D = 0

$$d\left[M,\ (P)\right] = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

b) Khoảng cách từ M đến đường thẳng d: $d(M,\ d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MA},\ \vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|},\ (A \in d)$.

Chú ý: Ta có thể tìm hình chiếu H của M trên d và d(M, d) = MH.

c) Khoảng cách giữa d_1 song song d_2 $(M_1 \in d_1,\ M_2 \in d_2)$: $d(d_1, d_2) = d(M_1, d_2) = d(M_2, d_1)$

d) Khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) song song $(M \in d)$: d[d, (P)] = d[M, (P)]

e) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P), (Q) song song $\left(M_1 \in (P),\ M_2 \in (Q)\right)$:

$d[(P), (Q)] = d[M_1, (Q)] = d[M_2, (P)]$

f) Khoảng cách giữa d_1 chéo d_2: $d(d_1, d_2) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right]\right|}, \ (M_1 \in d_1, M_2 \in d_2)$.

2. Góc

Công thức cơ bản: $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$

a) Góc giữa d_1 và d_2: $\cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Chú ý: 1) $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \left(\widehat{d_1, d_2}\right) = 0^0$. 2) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0$.

b) Góc giữa hai mặt phẳng: $\cos\left(\widehat{(P), (Q)}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}$.

Chú ý: 1) $(P) \parallel (Q) \Rightarrow \left(\widehat{(P), (Q)}\right) = 0^0$. 2) $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0$.

c) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: $\sin\left(\widehat{d, (P)}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|\left|\overrightarrow{n_P}\right|}$.

Chú ý: 1) $d \subset (\alpha)$ hoặc $d \parallel (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 0$. 2) $d \perp (P) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}\right] = \vec{0}$.

V. MẶT CẦU

1. Phương trình chính tắc của mặt cầu

Mặt cầu (S) tâm I(a; b; c), bán kính R có phương trình chính tắc là: **(S): $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$**

2. Phương trình tổng quát của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} > 0$.

3. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) tâm I, bán kính R ta có:

a) Mặt phẳng không cắt mặt cầu $\Leftrightarrow d\left[I,(P)\right] > R$.

b) Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu $\Leftrightarrow d\left[I,(P)\right] = R$.

c) Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn $\Leftrightarrow d\left[I,(P)\right] < R$.

Chú ý: Khi $I \in (P)$ thì giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính bằng bán kính mặt cầu.

…………………………………………………….

E. TÍCH PHÂN

I. NGUYÊN HÀM

1. Tính chất

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; 2) $\int a.f(x)dx = a.\int f(x)dx \ (a \neq 0)$; 3) $\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

2. Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm của hàm số cơ bản	Nguyên hàm mở rộng, u = u(x)
1) $\int a.dx = ax + C, \ a \in \mathbb{R}$	1) $\int adu = au + C, \ a \in \mathbb{R}$
2) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$	2) $\int u^\alpha du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$
3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\left\|x\right\| + C, \ x \neq 0$	3) $\int \dfrac{du}{u} = \ln\left\|u\right\| + C, \ u \neq 0$
4) $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$	4) $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	5) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
6) $\int e^x dx = e^x + C$	6) $\int e^u du = e^u + C$
7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	7) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
8) $\int \cos x dx = \sin x + C$	8) $\int \cos u du = \sin u + C$
9) $\int \sin x dx = -\cos x + C$	9) $\int \sin u du = -\cos u + C$
10) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	10) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$
11) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	11) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$

<u>Đặc biệt</u>

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Các công thức thường gặp:

1) $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; 2) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}.\ln\left|ax+b\right| + C$;

3) $\int e^{ax+b} = \frac{1}{a}.e^{ax+b} + C$; 4) $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}.\sin(ax+b) + C$;

5) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}.\cos(ax+b) + C$; 6) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}.\text{tg}(ax+b) + C$.

II. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số f(x) liên tục trên khoảng $\left(\alpha;\ \beta\right)$ và F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên khoảng đó, với $a,\ b \in \left(\alpha;\ \beta\right)$ ta gọi hiệu $F(b) - F(a)$ là **tích phân** từ **a** đến **b** của f(x).

Ký hiệu: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ (***công thức Newton - Leibniz***).

<u>Nhận xét:</u> $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ... = F(b) - F(a)$.

2. Tính chất

Cho hai hàm số f(x), g(x) liên tục trên khoảng $\left(\alpha;\ \beta\right)$ và $a,\ b,\ c \in \left(\alpha;\ \beta\right)$ ta có:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$; 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

3) $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\ \forall k \in \mathbb{R}$; 4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

5) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

6) $f(x) \ge 0\ \forall x \in \left[a;\ b\right] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$, $f(x) \le 0\ \forall x \in \left[a;\ b\right] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le 0$;

7) $f(x) \ge g(x)\ \forall x \in \left[a;\ b\right] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$;

8) $m \le f(x) \le M\ \forall x \in \left[a;\ b\right] \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$;

9) Nếu t biến thiên trên [a; b] thì $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ là một nguyên hàm của f(t) thỏa G(a) = 0.

3. Các kết quả cần nhớ

1) Với $a > 0$, hàm số $f(x)$ lẻ và liên tục trên đoạn [–a; a] thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

2) Với $a > 0$, hàm số $f(x)$ chẵn và liên tục trên đoạn [–a; a] thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

III. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

1. Công thức

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \quad (1)}$$

2. Phương pháp giải toán

Giả sử cần tính tích phân $\int_a^b f(x)g(x)dx$ ta thực hiện như sau:

Bước 1. Đặt $u = f(x),\ dv = g(x)dx$ (hoặc ngược lại) sao cho dễ tìm nguyên hàm $v(x)$ và vi phân $du = u'(x)dx$ không quá phức tạp. Hơn nữa, tích phân $\int_a^b vdu$ phải tính được.

Bước 2. Thay vào công thức (1) để tính kết quả.

Đặc biệt:

1) $\int_a^b P(x)\sin ax dx,\ \int_a^b P(x)\cos ax dx,\ \int_a^b e^{ax}.P(x)dx$, (P(x): đa thức) ta đặt $u = P(x)$.

2) $\int_a^b P(x)\ln^{\alpha} x dx$ ta đặt $u = \ln^{\alpha} x$.

Chú ý: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

IV. TÍCH PHÂN CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp giải toán

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)|dx$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1

Lập bảng xét dấu (BXD) của hàm số f(x) trên đoạn [a; b], giả sử f(x) có BXD:

x	a		x_1		x_2		b
f(x)		+	0	–	0	+	

Bước 2

Tính $I = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx$.

Chú ý: Nếu trong khoảng (a; b) phương trình f(x) = 0 không có nghiệm thì:

$$\boxed{\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|}$$

V. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

1. Tính diện tích hình phẳng

1.1. Trường hợp 1

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$ là:

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx}$$

1.2. Trường hợp 2

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = g(x)$ là:

$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x) - g(x)\right|dx}$$

Trong đó $\alpha,\ \beta$ là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của f(x) = g(x).

Chú ý:

1) Nếu trong khoảng $(\alpha;\ \beta)$ phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thì:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x) - g(x)\right|dx = \left|\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x) - g(x)\right]dx\right|}$$

2) Nếu tích S giới hạn bởi x = f(y) và x = g(y) thì ta đổi vai trò x cho y trong công thức trên.

2. Tính thể tích khối tròn xoay

2.1. Trường hợp 1

Thể tích khối tròn xoay V do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) \geq 0\quad \forall x \in [a;\ b]$, y = 0, x = a và x = b (a < b) ***quay quanh trục Ox*** là:

$$\boxed{V = \pi\int_{a}^{b} f^2(x)dx}$$

2.2. Trường hợp 2

Thể tích khối tròn xoay V do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y) \geq 0\quad \forall y \in [c;\ d]$, x = 0, y = c và y = d (c < d) ***quay quanh trục Oy*** là:

$$\boxed{V = \pi\int_{c}^{d} g^2(y)dy}$$

2.3. Trường hợp 3

Thể tích khối tròn xoay V do hình phẳng giới hạn bởi các đường y = f(x), $y = g(x)$, x = a và x = b $\left(a < b,\ f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0\ \forall x \in [a;\ b]\right)$ ***quay quanh trục Ox*** là:

$$\boxed{V = \pi\int_{a}^{b}\left|f^2(x) - g^2(x)\right|dx}$$

2.4. Trường hợp 4

Thể tích khối tròn xoay V do hình phẳng giới hạn bởi các đường x = f(y), $x = g(y)$, y = c và y = d $\left(c < d,\ f(y) \geq 0,\ g(y) \geq 0\ \forall y \in [c;\ d]\right)$ ***quay quanh trục Oy*** là:

$$\boxed{V = \pi\int_{c}^{d}\left|f^2(y) - g^2(y)\right|dy}$$

……………………………………………………..

E. ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Chương I. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

I. QUY TẮC CỘNG VÀ NHÂN

1. Quy tắc đếm

1.1. Quy tắc

Với điều kiện là khoảng cách giữa các số bằng nhau (cách đều), ta có:

$$\boxed{\text{số các số} = \frac{\text{số lớn nhất} - \text{số nhỏ nhất}}{\text{khoảng cách giữa 2 số liền kề}} + 1}.$$

1.2. Các dấu hiệu chia hết

1) Chia hết cho 2: số có chữ số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
2) Chia hết cho 3: số có tổng các chữ số chia hết cho 3.
3) Chia hết cho 4: số có 2 chữ số tận cùng lập thành số chia hết cho 4.
4) Chia hết cho 5: số có chữ số tận cùng là 0, 5.
5) Chia hết cho 6: số chia hết cho 2 và 3.
6) Chia hết cho 8: số có 3 chữ số tận cùng lập thành số chia hết cho 8.

7) Chia hết cho 9: số có tổng các chữ số chia hết cho 9.
8) Chia hết cho 10: số có chữ số tận cùng là 0.
9) Chia hết cho 11: số có hiệu của tổng các chữ số ở hàng lẻ và tổng các chữ số ở hàng chẵn chia hết cho 11 (ví dụ 1345729 vì (1 + 4 + 7 + 9) – (3 + 5 + 2) = 11).
10) Chia hết cho 25: số có 2 chữ số tận cùng là 00, 25, 50, 75.

2. Quy tắc cộng

1) Nếu một quá trình (bài toán) có thể thực hiện được một trong hai cách (trường hợp) loại trừ lẫn nhau: cách thứ nhất cho m kết quả và cách thứ hai cho n kết quả. Khi đó việc thực hiện quá trình trên cho m + n kết quả.
2) Nếu một quá trình (bài toán) có thể thực hiện được k cách (trường hợp) loại trừ lẫn nhau: cách thứ nhất cho m_1 kết quả, cách thứ hai cho m_2 kết quả, …, cách thứ k cho m_k kết quả. Khi đó việc thực hiện quá trình trên cho $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ kết quả.

2. Quy tắc nhân

1) Nếu một quá trình (bài toán) được thực hiện theo hai giai đoạn (bước) liên tiếp nhau sao cho có m cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, đồng thời ứng với mỗi cách đó có n cách để thực hiện giai đoạn thứ hai. Khi đó có mn cách thực hiện quá trình trên.
2) Nếu một quá trình (bài toán) được thực hiện theo k giai đoạn (bước) liên tiếp nhau sao cho có m_1 cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, với mỗi cách đó có m_2 cách để thực hiện giai đoạn thứ hai, …, có m_k cách thực hiện giai đoạn thứ k. Khi đó, toàn bộ quá trình có $m_1.m_2\ldots m_k$ cách thực hiện.

II. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

1. Hoán vị

Định nghĩa

Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $\left(n \ge 0\right)$. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của X theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử. Số các hoán vị của n phần tử được ký hiệu là P_n.

$$\boxed{P_n = n! = 1.2\ldots n}$$

2. Chỉnh hợp

Định nghĩa

Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $\left(n \ge 0\right)$. Mỗi cách chọn ra k $\left(0 \le k \le n\right)$ phần tử của X và sắp xếp theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A_n^k.

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

3. Tổ hợp

Định nghĩa

Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $\left(n \ge 0\right)$. Mỗi cách chọn ra k $\left(0 \le k \le n\right)$ phần tử của X được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k.

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

<u>Nhận xét:</u>

1) Điều kiện để xảy ra hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp là n phần tử phải phân biệt.
2) Chỉnh hợp và tổ hợp khác nhau ở chỗ là sau khi chọn ra k trong n phần tử thì chỉnh hợp có sắp thứ tự còn tổ hợp thì không.

4. Phương pháp giải toán

4.1. Phương pháp 1.

Bước 1. Đọc kỹ các yêu cầu và số liệu của đề bài. Phân bài toán ra các trường hợp, trong mỗi trường hợp lại phân thành các giai đoạn.
Bước 2. Tùy từng giai đoạn cụ thể và giả thiết bài toán để sử dụng quy tắc cộng, nhân, hoán vị, chỉnh hợp hay tổ hợp.
Bước 3. Đáp án là tổng kết quả của các trường hợp trên.

4.2. Phương pháp 2.

Đối với nhiều bài toán, phương pháp 1 rất dài. Do đó ta sử dụng phương pháp loại trừ (phần bù) theo phép toán $A \cup \overline{A} = X \Rightarrow A = X \setminus \overline{A}$.

Bước 1. Chia yêu cầu của đề thành 2 phần là yêu cầu chung X (tổng quát) gọi là **loại 1** và yêu cầu riêng A. Xét $\overline{A}$ là phủ định của A, nghĩa là không thỏa yêu cầu riêng gọi là **loại 2**.
Bước 2. Tính số cách chọn loại 1 và loại 2.
Bước 3. Đáp án là số cách chọn loại 1 trừ số cách chọn loại 2.

<u>Chú ý</u>

1) Cách phân loại 1 và loại 2 có tính tương đối, phụ thuộc vào chủ quan của người giải.
2) Phương pháp phần bù có ưu điểm là ngắn tuy nhiên nhược điểm là thường sai sót khi tính số lượng từng loại.

Chương II. XÁC SUẤT

I. BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN

1. Phép thử và biến cố

– Phép thử là việc thực hiện 1 thí nghiệm nào đó hay quan sát một hiện tượng nào đó để xem có xảy ra hay không. Hiện tượng có xảy ra hay không trong phép thử được gọi là biến cố ngẫu nhiên. Biến cố ngẫu nhiên thường được ký hiệu A, B, C…

VD 1

+ Tung đồng tiền lên là một phép thử, biến cố là "mặt sấp xuất hiện" hay "mặt ngửa xuất hiện".
+ Chọn ngẫu nhiên một số sản phẩm từ một lô hàng để kiểm tra là phép thử, biến cố là "chọn được sản phẩm tốt" hay "chọn được phế phẩm".
+ Gieo một số hạt lúa là phép thử, biến cố là "hạt lúa nảy mầm" hay "hạt lúa không nảy mầm".

2. Các loại biến cố

– Trong một phép thử, tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra được gọi là *không gian mẫu* ký hiệu là Ω.

– Mỗi phần tử $\omega \in \Omega$ không thể phân nhỏ thành hai biến cố được gọi là biến cố sơ cấp.

a) Biến cố chắc chắn. Trong một phép thử, biến cố nhất định xảy ra là chắc chắn, ký hiệu là Ω.

VD 2

+ Trong phép thử thả viên bi thì biến cố "viên bi rơi xuống đất" là Ω.
+ Trong phép thử sinh viên thi hết môn XSTK thì biến cố "sinh viên có điểm" là Ω.

b) Biến cố không thể. Biến cố không thể xảy ra khi thực hiện phép thử, ký hiệu $\varnothing$.

VD 3

Biến cố "chọn được 3 con bài Át cùng màu" là không thể.

c) Số trường hợp đồng khả năng

– Hai hay nhiều biến cố trong một phép thử có khả năng xảy ra như nhau được gọi là đồng khả năng.

– Trong một phép thử mà mọi biến cố sơ cấp đều đồng khả năng thì số phần tử của không gian mẫu được gọi là số trường hợp đồng khả năng của phép thử.

VD 4. Gọi một sinh viên trong nhóm để kiểm tra thì mỗi sinh viên trong nhóm đều có khả năng bị gọi như nhau.

d) Các phép toán

Cho A, B là các biến cố bất kỳ. Khi đó:

1) Tổng của A và B là $C = A \cup B$ hay C = A + B. C xảy ra khi ít nhất 1 trong hai biến cố A, B xảy ra.

VD 5

Bắn hai viên đạn vào 1 tấm bia. Gọi A_1: "viên thứ nhất trúng bia", A_2: "viên thứ hai trúng bia" và

C: "bia bị trúng đạn" thì $C = A_1 \cup A_2$.

2) Tích của A và B là $C = AB = A \cap B$. C xảy ra khi và chỉ khi cả A và B cùng xảy ra.

VD 6

Một người chọn mua áo. Gọi A: "chọn được áo màu xanh", B: "chọn được áo sơ–mi" và

C: "chọn được áo sơ–mi màu xanh" thì C = AB.

VD 7

Chọn ngẫu nhiên 10 linh kiện trong 1 lô ra kiểm tra. Gọi A_i: "chọn được linh kiện thứ i tốt" và

C: "chọn được 10 linh kiện tốt" thì $C = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{10} = \bigcap_{i=1}^{10} A_i$.

3) Phần bù của A, ký hiệu $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$.

3. Quan hệ giữa các biến cố

a) Biến cố xung khắc

– Hai biến cố và B được gọi là xung khắc nếu chúng không đồng thời xảy ra trong một phép thử.

– Họ các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là xung khắc (hay đôi một xung khắc) khi một biến cố bất kỳ trong họ xảy ra thì các biến cố còn lại không xảy ra. Nghĩa là $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j$.

VD 8

Một hộp có 3 viên phấn màu đỏ, xanh và trắng. Chọn ngẫu nhiên 1 viên. Gọi A: "chọn được viên màu đỏ", B: "chọn được viên màu trắng" và C: "chọn được viên màu xanh" thì A, B, C là xung khắc.

b) Biến cố đối lập

– Hai biến cố A và B được gọi là đối lập nhau nếu chúng thỏa mãn 2 điều sau:

1) A và B xung khắc với nhau.

2) Phải có ít nhất một trong 2 biến cố xảy ra, nghĩa là $A \cup B = \Omega$.

VD 9. Trồng 1 cây bạch đàn. Gọi A: "cây bạch đàn sống", B: "cây bạch đàn chết" thì A và B là đối lập.

– Họ các biến cố $\{A_i\}$ (i = 1,…, n) được gọi là hệ đầy đủ các biến cố nếu thỏa mãn 2 điều sau:

1) Họ xung khắc, nghĩa là $A_i.A_j = \varnothing, \forall\ i \neq j$.

2) Phải có ít nhất 1 biến cố trong họ xảy ra, nghĩa là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

VD 10. Họ {A, B, C} trong VD 9 là đầy đủ.

II. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Định nghĩa xác suất (dạng cổ điển)

Trong một phép thử có tất cả n biến cố sơ cấp đồng khả năng, trong đó có m khả năng thuận lợi cho biến cố A xuất hiện thì xác suất của A là:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Số biến cố thuận lợi cho A}}{\text{Số tất cả các biến cố có thể}}}.$$

2. Tính chất của xác suất

i) $0 \le P(A) \le 1$, với mọi biến cố A; ii) $P(\varnothing) = 0$; iii) $P(\Omega) = 1$.

3. Ý nghĩa của xác suất

Xác suất là số đo mức độ tin chắc, thường xuyên xảy ra của 1 biến cố trong phép thử.

Chú ý

– Xác suất phụ thuộc vào điều kiện của phép thử.

III. CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1. Công thức cộng xác suất

a) Biến cố xung khắc

– A và B xung khắc thì: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

– Họ {A_i} (i = 1, 2,…, n) thì: $P\left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\right) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

b) Biến cố tùy ý

– A và B là hai biến cố tùy ý thì: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

– Họ {A_i} (i = 1, 2,…, n) các biến cố tùy ý thì:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + ... + (-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n).$$

c) Biến cố đối lập

$$\boxed{P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)}.$$

2. Công thức nhân xác suất

a) Xác suất có điều kiện

Trong một phép thử, xét 2 biến cố bất kỳ A, B với $P(B) > 0$. Xác suất có điều kiện của A với điều kiện B đã xảy ra được ký hiệu và định nghĩa $P\left(A\middle|B\right) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

– Xác suất có điều kiện cho phép chúng ta sử dụng thông tin về sự xảy ra của 1 biến cố để dự báo xác suất xảy ra biến cố khác.

– Tính chất: $0 \le P\left(A\middle|B\right) \le 1$; $P\left(B\middle|B\right) = 1$; $P\left(\overline{A}\middle|B\right) = 1 - P\left(A\middle|B\right)$;

$P\left(A_1 \cup A_2\middle|B\right) = P\left(A_1\middle|B\right) + P\left(A_2\middle|B\right)$ nếu A_1 và A_2 xung khắc.

b) Công thức nhân

– A và B là 2 biến cố độc lập nếu B có xảy ra hay không cũng không ảnh hưởng đến *khả năng xảy ra* A và ngược lại, nghĩa là $P\left(A\middle|B\right) = P(A)$ và $P\left(B\middle|A\right) = P(B)$. Khi đó ta có $P(AB) = P(A).P(B)$.

– Với A, B không độc lập (phụ thuộc) thì $P(AB) = P(B)P\left(A\middle|B\right) = P(A)P\left(B\middle|A\right)$.

Chương III. NHỊ THỨC NEWTON

I. ĐỊNH NGHĨA

Nhị thức Newton là khai triển tổng lũy thừa có dạng:

$$\boxed{\left(a+b\right)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + ... + C_n^ka^{n-k}b^k + ... + C_n^nb^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k}$$

1) Số hạng thứ k+1 là $T_{k+1} = C_n^ka^{n-k}b^k$ thường được gọi là số hạng tổng quát.

2) Các hệ số C_n^k được tính theo công thức tổ hợp chập.

Tính chất

1) $C_n^k = C_n^{n-k}\ (0 \le k \le n)$; 2) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k\ (1 \le k \le n)$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Dạng khai triển

Dấu hiệu nhận biết: Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa là 1 hoặc 1 và – 1 xen kẽ nhau.

1) Khai triển $\left(a+b\right)^n$ hoặc $\left(a-b\right)^n$.

2) Cộng hoặc trừ hai vế của 2 khai triển trên.

2. Dạng đạo hàm cấp 1

Dấu hiệu nhận biết: Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa tăng dần từ 1 đến n (hoặc giảm dần từ n đến 1) (không kể dấu).

Hai khai triển thường dùng:

$\left(1+x\right)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^kx^k + ... + C_n^nx^n$ (1).

$\left(x+1\right)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + ... + C_n^kx^{n-k} + ... + C_n^n$ (2).

1) Đạo hàm 2 vế của (1) hoặc (2).

2) Thay số thích hợp vào (1) hoặc (2) sau khi đã đạo hàm.

3. Tìm số hạng trong khai triển nhị thức Newton

3.1. Dạng tìm số hạng thứ k

Số hạng thứ k trong khai triển $(a+b)^n$ là $C_n^{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$.

3.2. Dạng tìm số hạng chứa x^m

1) Số hạng tổng quát trong khai triển $(a+b)^n$ là $C_n^ka^{n-k}b^k = M(k).x^{f(k)}$ (a, b chứa x).

2) Giải phương trình $f(k) = m \Rightarrow k_0$, số hạng cần tìm là $C_n^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$ và hệ số của số hạng chứa x^m là $M(k_0)$.

3.3. Dạng tìm số hạng hữu tỉ

1) Số hạng tổng quát trong khai triển $(a+b)^n$ là $C_n^ka^{n-k}b^k = C_n^k.\alpha^{\frac{m}{p}}.\beta^{\frac{r}{q}}$ ($\alpha,\ \beta$ là hữu tỉ).

2) Giải hệ $\begin{cases} \dfrac{m}{p} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{r}{q} \in \mathbb{N} \end{cases}$ $(k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n) \Rightarrow k_0$. Số hạng cần tìm là $C_n^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$.

4. Dạng tìm hệ số lớn nhất trong khai triển Newton

Xét khai triển $(a+bx)^n$ có số hạng tổng quát là $C_n^ka^{n-k}b^kx^k$.

Đặt $u_k = C_n^ka^{n-k}b^k,\ 0 \le k \le n$ ta có dãy hệ số là $\left\{u_k\right\}$.

Để tìm số hạng lớn nhất của dãy ta thực hiện:

Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} u_k \ge u_{k+1} \\ u_k \ge u_{k-1} \end{cases} \Rightarrow k_0$. Suy ra hệ số lớn nhất là $C_n^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$.

………………………………………………….

PHẦN II. 15 BỘ ĐỀ LUYỆN TẬP

ĐỀ SỐ 1

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x-m}$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 2.
2. Tìm điều kiện tham số m để hàm số (1) nghịch biến trên tập xác định.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Tìm nghiệm $x \in [1;\ 3]$ của phương trình: $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$.
2. Giải bất phương trình: $3^{\log_3^2 x} + 2x^{\log_3 x} \le 243$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg}x - x + 1}{\cos^2 x}dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh bằng 2a. Trên hai đường tròn đáy tâm O và O’ lấy lần lượt hai điểm A, B sao cho $AB = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối tứ diện OO’AB theo a.

Câu V (*1,0 điểm*)

Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} 1 + \log_4(4y - 3x - 3) = \log_4(4y) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 \end{cases}.$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(2; 1) và đường thẳng (d): x – y = 0.
   Tìm điểm B thuộc (d) sao cho $\cos\widehat{OAB} = -\dfrac{4}{5}$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 điểm A(1; 6; 2), B(4; 0; 6), C(5; 0; 4), D(5; 1; 3). Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc mặt phẳng (BCD). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Rút gọn tổng $S = \dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \dfrac{1}{A_4^2} + ... + \dfrac{1}{A_n^2}$, với $n \ge 2,\ n \in \mathbb{Z}$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại A. Biết tọa độ đỉnh B(1; 1) và đường tròn đường kính AB là $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ cắt cạnh BC tại H sao cho BC = 4BH. Tìm tọa độ đỉnh A và C.
2. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ và điểm A(1; 0; 0).
   Tìm điểm B thuộc đường thẳng d sao cho $\cos\widehat{OAB} = -\dfrac{1}{3}$.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Chứng minh: $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$, với $4 \le k \le n$ và $n, k \in \mathbb{Z}$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 2

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - m$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = –2.
2. Tìm điều kiện tham số m để phương trình $x^3 + (m-1)x^2 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $\dfrac{\cos^6 x + \sin^6 x - \dfrac{1}{4}\sin 2x}{1 - \sqrt{2}\sin x} = 0$.
2. Giải phương trình: $x^3 - 3x.9^{\log_2 x} + 2.27^{\log_2 x} = 0$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \int\limits_{-2}^{2} \left| \left| x^2 - 1 \right| - 3 \right| dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình chóp S.ABCD có đường cao SA bằng a và đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, $AD = a\sqrt{2}$. Gọi M, N là trung điểm của AD và SC. K là giao điểm của AC và BM.
Chứng tỏ $BK \perp (ANK)$ và tính diện tích của ΔANK theo a.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho x, y không âm thỏa x + y = 1. Tìm max, min của $P = \sqrt{1 + x^{2009}} + \sqrt{1 + y^{2009}}$.

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm A(1; 1), B(–2; 3) và đường thẳng (d): 2x – 3y + 5 = 0.
   Chứng tỏ đường thẳng (d) cắt đoạn thẳng AB.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1},\ d_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}.$$

   Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và song song với cả hai đường thẳng d_1, d_2.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Một hộp có 12 viên phấn gồm: 4 viên màu xanh, 4 viên màu trắng và 4 viên màu đỏ. Chọn từ hộp ra 4 viên, tính số cách chọn sao cho trong 4 viên được chọn phải có đủ 3 màu.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có điểm M(–1; 1) là trung điểm của cạnh AB và $(AC): 2x + y - 2 = 0$, $(BC): x + 3y - 3 = 0$. Tìm tọa độ 2 đỉnh A, B của ΔABC.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1},\ d_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}.$$

   Tìm điểm M trên d_1, N trên d_2 sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Chọn ngẫu nhiên lần lượt (có hoàn lại) từng sản phẩm từ một kho hàng cho đến khi gặp phế phẩm thì dừng. Biết xác suất chọn được phế phẩm mỗi lần chọn là 3%. Tính xác suất sao cho phải chọn đến lần thứ 5?

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 3

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

2. Tìm m để (C) cắt $(d): y = \frac{1}{2}x - m$ tại 2 điểm phân biệt A, B và AB nhỏ nhất.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

2. Giải bất phương trình: $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + 2} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + 2)} \le 5$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos 2x - \cos x} dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho tứ diện S.ABC có đường cao SA bằng 2a và ΔABC có AB = AC = a, $\widehat{C} = 30^0$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính thể tích của khối AMBCN theo a.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho 4 số thực dương x, y, z, t thỏa $x + y + z + t \le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{x}\right).$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4y = 0$ và đường thẳng (d): $x - y - 1 = 0$. Tìm điểm M trên (d) sao cho đường tròn tâm M, bán kính bằng 1 tiếp xúc ngoài với (C).

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3) và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1},\ d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

Tìm điểm B đối xứng điểm A qua đường thẳng d_1.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Cho số phức $z = (1+i)^2.\frac{1-2i}{3+2i}$. Tính $|z|$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4y = 0$ và đường thẳng (d): $x - y = 0$. Tìm điểm M trên (d) sao cho đường tròn tâm M, bán kính bằng 1 tiếp xúc trong với (C).

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3) và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1},\ d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

Viết phương trình đường thẳng d_3 đi qua A, vuông góc d_1 và cắt d_2.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Viết số phức $z = \left[4\sqrt{3} + 1 + i\left(\sqrt{3} - 4\right)\right].\frac{1-i}{5-3i}$ dưới dạng lượng giác.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 4

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 7$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $(d) : y = mx - 9$.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $\dfrac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3^{3x+1} + 5.8^x - 2.6^x = 6 \\ 2.27^x + 3.8^x + 3.6^x = 8 \end{cases}.$$

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng S giới hạn bởi $4y = x^2$ và $y = x$ quay quanh Ox.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm ΔSAC và khoảng cách từ G đến (SCD) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tính khoảng cách từ tâm O của đáy đến (SCD) và thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho 3 số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} + \sqrt[3]{4(y^3 + z^3)} + \sqrt[3]{4(z^3 + x^3)} + 2\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right).$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(2; 1) và (d_1): x – y – 1 = 0, (d_2): x – 2y – 6 = 0. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với (d_1) tại A và có tâm thuộc (d_2).
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O(0; 0; 0) và các đỉnh A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), $S\left(0;\ 0;\ 2\sqrt{2}\right)$. Gọi M là trung điểm cạnh bên SA. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và DM.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(1 - 3x\right)^n$, biết $A_n^2 + C_n^2 = 315$ với $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh A(2;–7). Biết trung tuyến CM và đường cao BK lần lượt có phương trình x + 2y + 7 = 0, 3x + y + 11 = 0. Tìm tọa độ đỉnh B và C.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O(0; 0; 0) và các đỉnh A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), $S\left(0;\ 0;\ 2\sqrt{2}\right)$. Gọi M là trung điểm cạnh bên SA. Mặt phẳng (CDM) cắt SB tại điểm N. Tính thể tích của khối tứ diện S.CMN.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $\left(2x + 1\right)^{19}$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 5

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm M(–1; 5) và có hệ số góc k. Tìm điều kiện của k để đồ thị (C) cắt (d) tại 3 điểm phân biệt.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình:

$$3\tan^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2.\frac{1 - \sin x}{\sin x}.$$

2. Giải phương trình:

$$\frac{1 + \log_3 x}{1 + \log_9 x} = \frac{1 + \log_{27} x}{1 + \log_{81} x}.$$

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3 + 4\sin x - \cos 2x}dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho tứ diện ABCD có cạnh CD = 2a, AB = BC = CA = AD = DB = $a\sqrt{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng tỏ rằng IK là đoạn vuông góc chung của AB, CD và tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho 2 số thực x, y thỏa $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + y}.$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho (d_1): 3x + 4y + 5 = 0, (d_2): 4x – 3y – 5 = 0.
   Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc (d_3): x – 6y – 10 = 0.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(3; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 3) và mặt phẳng (P): x + 2y + 2z – 1 = 0. Tìm tọa độ điểm M cách đều A, B, C và (P).

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $(C): x^2 + y^2 - 4x = 0$ và $(d): x + y - 6 = 0$.
   Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp (C), biết đỉnh A thuộc (d).
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm A(3; 1; 2) và B(1; 2; 0).
   Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B và tạo với mp(Oxy) góc φ thỏa $\cos\varphi = \frac{1}{3}$.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Rút gọn tổng $S = 2011C_{2009}^0 + 2010C_{2009}^1 + 2009C_{2009}^2 + ... + 3C_{2009}^{2008} + 2C_{2009}^{2009}$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 6

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = \dfrac{(3m+1)x - m}{x+m}$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.
2. Tìm điều kiện của m để tiếp tuyến với đồ thị hàm số (1) tại giao điểm M với trục hoành song song đường thẳng (d): y = – x – 5.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \text{tg}x - 2\sqrt{3} = \sin x\left(1 + \text{tg}x\,\text{tg}\dfrac{x}{2}\right)$.
2. Giải phương trình: $\left(\log_3 \dfrac{3}{x}\right)\log_2 x - \log_3 \dfrac{x^3}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình khối lăng trụ tam giác đều ABC.A’B’C’ có AA’ = h, AB = a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và CC’. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh BB’ tại Q.

Tính thể tích V của khối đa diện PQBCNM theo a và h.

Câu V (*1,0 điểm*)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(1 + 4^{2x-y}\right).5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln\left(y^2 + 2x\right) = 0 \end{cases}$.

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng (d_1): x – 2y + 3 = 0 và (d_2): 4x + 3y – 5 = 0. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I trên (d_1), tiếp xúc (d_2) và bán kính là R = 2.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ và điểm M(2; 2; 0).

   Viết phương trình đường thẳng d_2 đi qua M, vuông góc với d_1 và nằm trong (P): x – y + z = 0.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Cho số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$. Tính $z^2 + \left(\bar{z}\right)^2$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (2m+1)x + m^2 + m + 4}{2(x+m)}$ (1), m là tham số.

   Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có điểm cực đại, cực tiểu và tính khoảng cách giữa hai điểm đó.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm M thuộc mặt cầu

   (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$.

   Tìm tọa độ điểm M để khoảng cách từ đó đến mặt phẳng (P): 2x – y + 2z – 14 = 0 bằng 7.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Viết số phức $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{2009}$ dưới dạng lượng giác.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 7

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng y = 2x + m cắt (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $\sqrt{3}(2\cos^2 x + \cos x - 2) + (3 - 2\cos x)\sin x = 0$.
2. Giải bất phương trình: $2^{\log_3 x^2 + 1} - 5.2^{\log_3 x} + 2 \le 0$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x\ln^2(x^2+1)}{x^2+1}$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \sqrt{e-1}$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác cân với AB = AC = $\sqrt{5}\text{cm}$. Biết (SBC) ⊥ (ABC), cạnh SA = $\sqrt{6}\text{cm}$ và SB = SC = 3cm. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Câu V (*1,0 điểm*)

Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 1 \le m\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)^3$ có nghiệm.

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm I(1; 2) và đường thẳng (d): 3x + 4y – 1 = 0. Viết phương trình đường tròn (C) tâm I cắt (d) tại hai điểm A, B sao cho ΔIAB vuông cân.
2. Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm A(1; 1;–1) và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{3}$.

   Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là A và tiếp xúc với đường thẳng d.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Từ một nhóm gồm 7 nam và 3 nữ chọn liên tiếp 3 lần (có hoàn lại) ra 4 người. Tìm xác suất sao cho trong 3 lần chọn có ít nhất 1 lần chọn được nhiều nhất 2 người nữ ?

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d_1): x – 2y + 3 = 0 và điểm M(1; 1).

   Viết phương trình đường thẳng (d_2) qua M và tạo với (d_1) góc φ thỏa $\cos\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = m + mt \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - mt \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

Tìm giá trị của m để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Một lô hàng chứa 20 sản phẩm trong đó có 8 phế phẩm. Chọn từ lô hàng ra 8 sản phẩm.

1. Lập công thức tính xác suất chọn được k phế phẩm, với $0 \le k \le 8$.
2. Chứng minh rằng $C_8^0C_{12}^8 + C_8^1C_{12}^7 + C_8^2C_{12}^6 + ... + C_8^7C_{12}^1 + C_8^8C_{12}^0 = C_{20}^8$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 8

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x - m^2$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi m = 1.
2. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc bé nhất.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\left|\sin 2x\right|$.
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3.2^{2x} + 6^x - 2.3^y = 0 \\ y = 2^{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}} \end{cases}$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cot x dx}{2\sin^4 x + 1}$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng $2\sqrt{3}\mathrm{cm}$. Gọi M, N là trung điểm của các cạnh SB, SC. Biết $(AMN) \perp (SBC)$, tính thể tích của khối chóp S.ABC.

Câu V (*1,0 điểm*)

Chứng tỏ phương trình $\ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} = -1$ có nghiệm thực duy nhất.

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho biết tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$ cắt đường thẳng nối 2 tâm tại điểm M. Tìm tọa độ của điểm M.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm M(1;–1; 1). Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt cả hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và $d_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Từ một nhóm gồm 25 người, trong đó có 4 cặp vợ chồng người ta chọn ra 4 người sao cho không có cặp vợ chồng nào. Tính số cách chọn.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔOAB vuông tại A. Biết phương trình cạnh OA là $\sqrt{3}x - y = 0$, $B \in Ox$ và bán kính của đường tròn nội tiếp ΔOAB bằng 2. Tìm tọa độ A, B.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng cắt cả hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và $d_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ đồng thời vuông góc với mp(Oxy).

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển Nhị thức $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt[5]{5}\right)^{10}$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 9

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số và vẽ đồ thị (C).
2. Tìm điều kiện m để phương trình: $\left|x^3 - 3x^2 + 2\right| - \log_2 m = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $2\sin x + \sqrt{2\sin x - 1} = 2\sin 2x + \sqrt{2\sin 2x - 1}$.
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = xy(\ln y - \ln x) \\ 9^x - 3^{y+1} + 2 = 0 \end{cases}$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \int_0^1 \dfrac{(x+1)^{2007}}{(x+2)^{2009}}\,dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho đường tròn (C) có đường kính AB = 20cm và M là trung điểm của cung AB. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng chứa (C) lấy điểm S sao cho AS = 15cm. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SB, cắt SB và SM lần lượt tại H và K. Tính thể tích của khối chóp S.AHK.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa $x^2 + y^2 + z^2 \le \dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 4(x+y)(y+z)(z+x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right).$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$ và điểm M(7; 3).
   Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M cắt (C) tại A, B phân biệt sao cho AB = 6.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 3 điểm O(0; 0; 0), A(0; 0; 4), B(2; 0; 0) và
   mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 5 = 0$. Chứng tỏ rằng mặt phẳng (P) không cắt đoạn thẳng AB.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Một tập thể gồm 14 người trong đó có A và B. Từ tập thể đó người ta chọn ra 1 tổ công tác gồm 6 người sao cho trong tổ phải có 1 tổ trưởng, hơn nữa A và B không đồng thời có mặt.
Tính số cách chọn.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng (d_1): x + y – 2 = 0, (d_2) : x + y – 8 = 0 và điểm A(2; 2). Tìm tọa độ của điểm B thuộc (d_1) và C thuộc (d_2) để ΔABC vuông cân tại A.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 3 điểm O(0; 0; 0), A(0; 0; 4), B(2; 0; 0) và
   mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 5 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm O, A, B và có khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{5}{\sqrt{6}}$.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Cho biết $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211$. Tính tổng $S = \dfrac{1.C_n^0}{A_1^1} + \dfrac{2.C_n^1}{A_2^1} + \dfrac{3.C_n^2}{A_3^1} + ... + \dfrac{(n+1).C_n^n}{A_{n+1}^1}$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 10

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{1-x}$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số và vẽ đồ thị (C).
2. Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C). Tìm trên hai nhánh của (C) hai điểm A, B sao cho AB vuông góc với đường thẳng OI và có độ dài AB ngắn nhất.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $\mathrm{cotg}x + \sqrt{3 + \mathrm{tg}x + 2\mathrm{cotg}2x} - 3 = 0$.
2. Giải bất phương trình: $\sqrt{\log_{0,5}^2 x + 4\log_2 \sqrt{x}} \le \sqrt{2}\left(4 - \log_{16} x^4\right)$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy, $\widehat{ASC} = 90^0$ và SA tạo với đáy một góc bằng 30^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho 2 số thực x, y thỏa đẳng thức $x + y - 3\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} - 1\right) = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A = \sqrt{(x-2)(y+1)}$.

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC cân có đáy là BC. Đỉnh A có tọa độ là các số dương, hai điểm B và C nằm trên trục Ox, phương trình $AB: y = 3\sqrt{7}(x-1)$.
   Cho biết chu vi ΔABC bằng 18. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm A(0; 0;–3), B(2; 0;–1) và mặt phẳng $(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Tìm tọa độ của điểm C trên (P) sao cho ΔABC đều.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Lớp 12A gồm 45 học sinh, trong đó có 29 nữ. Từ lớp đó người ta chọn ra 1 bí thư đoàn, 1 phó bí thư và 3 ủy viên. Hỏi có mấy cách chọn sao cho trong 5 người được chọn phải có nữ.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ có hai điểm A, B phân biệt mà tại đó tiếp tuyến song song với nhau. Chứng tỏ rằng A và B đối xứng qua giao điểm I của 2 tiệm cận.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 20 + 3\sqrt{131} = 0$ và ba điểm A(1; 1; 0), B(3;–1; 0), C(–3; 3; 0).
   Tìm tọa độ điểm M cách đều A, B, C và (P).

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Viết số phức sau dưới dạng lượng giác: $z = (1-i)^{2008}\left(\sqrt{3} + i\right)^{2009}$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 11

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số và vẽ đồ thị (C).

2a. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ O(0; 0).

b. Tìm những điểm trên (C) có tổng khoảng cách từ đó đến 2 tiệm cận của (C) là nhỏ nhất.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $2\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin 2x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2 = 0$.

2. Giải phương trình: $\log_{3-2x}(2x^2 - 9x + 9) + \log_{3-x}(4x^2 - 12x + 9) - 4 = 0$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 - 4x + 2}}$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có diện tích đáy S = 30cm^2 và AA' = 10cm. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Biết AA_1 = 3cm, BB_1 = 4cm và CC_1 = 5cm. Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được phân chia bởi (P).

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho 2 số thực x, y thỏa $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = x^4 + y^4 + x^3y^3 - 2xy(x+y)^2 + 3xy.$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có cạnh AC đi qua điểm M(0;– 1). Cho biết AB = 2AM, đường phân giác trong (AD): x – y = 0, đường cao (CH): 2x + y + 3 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hãy viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm M(3;–1;–4) cắt trục Oy và song song với mặt phẳng (P): 2x + y = 0.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Cho tập hợp A có n phần tử (n > 6), biết số tập hợp con chứa 6 phần tử của A bằng 21 lần số tập hợp con chứa 1 phần tử của A. Tính số tập hợp con lớn nhất chứa k ($0 \le k \le n$) phần tử của A.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \text{ và } d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}.$$

1. Chứng minh rằng d_1 và d_2 đồng phẳng. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và d_2.

2. Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi (P) và 3 mặt phẳng tọa độ.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Xét tổng $S = (n+3)C_n^0 + (n+2)C_n^1 + (n+1)C_n^2 + ... + 3C_n^n$ với $n \ge 4,\ n \in \mathbb{Z}$.

Tính n, biết $S = 8192$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 12

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số và vẽ đồ thị (C).
2. Tìm những điểm M trên trục tung sao cho từ đó vẽ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} + \dfrac{4 + 2\sin 2x}{\sin 2x} - 2\sqrt{3} = 2\left(\text{cotg}x + 1\right)$.
2. Giải bất phương trình: $2x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \ge 2^{\frac{3}{2}\log_2 x}$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\,dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho ΔABC cân tại A, nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R = 10cm và $\widehat{A} = 120^0$. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABC) tại A lấy điểm S sao cho $SA = 5\sqrt{3}cm$. Gọi I là trung điểm BC. Tính số đo góc giữa SI với (ABC) và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

Câu V (*1,0 điểm*)

Tìm điều kiện của m để phương trình sau có nghiệm thực thuộc đoạn $\left[1;\ 1 + \sqrt{3}\right]$:

$$m\left(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1\right) + x(2 - x) = 0.$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung ngoài của (C_1) và (C_2).
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): x – y + 2 = 0 và hai điểm A(0; 1; 2), B(– 1; 1; 0). Tìm tọa độ điểm M nằm trên mặt phẳng (P) sao cho ΔMAB vuông cân tại B.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển nhị thức $\left(x^2 - 3x - 4\right)^{12}$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 0 \end{cases}$ cắt mặt phẳng (P): y – 3 = 0 lần lượt tại A, B.

1. Tính $S_{\Delta OAB}$ và chứng tỏ hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1, d_2 và có khoảng cách đến d_1 gấp 3 lần khoảng cách đến d_2.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Tìm số phức z thỏa đẳng thức: $z^2 = \dfrac{\sqrt{3} + 1 + i\left(1 - \sqrt{3}\right)}{1 + i}$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 13

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (m^2 - 6m)x + m^2 - 4m$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi m = 1.
2. Tìm trên đường thẳng x =1 những điểm từ đó kẻ đúng hai tiếp tuyến đến (C).

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $2\cos^3 x + \sin x\cos x + 1 = 2(\sin x + \cos x)$.
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \log_3 y = 3 \\ \left(2y^2 - y + 12\right).3^x = 81y \end{cases}$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = \sqrt{e^x + 1}$, trục hoành và hai đường thẳng x = ln3, x = ln8.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = SB = a. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện S.ABD.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\left(a+b-c\right)^3}{4c} + \frac{\left(b+c-a\right)^3}{4a} + \frac{\left(c+a-b\right)^3}{4b}.$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A(1; 0), B(3; –1) và đường thẳng (d): x – 2y –1 = 0. Tìm điểm C thuộc (d) sao cho diện tích tam giác ABC bằng 6.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2},\ d_2 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \text{ và mặt phẳng } \left(P\right) : x - y + z = 0.$$

Tìm tọa độ hai điểm $M \in d_1$, $N \in d_2$ sao cho $MN \parallel \left(P\right)$ và $MN = \sqrt{2}$.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $(1 + x)^{10}(x + 1)^{10}$.

Từ đó suy ra giá trị của tổng $S = \left(C_{10}^0\right)^2 + \left(C_{10}^1\right)^2 + \left(C_{10}^2\right)^2 + ... + \left(C_{10}^{10}\right)^2$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC với B(– 6; 0), C(6; 0). Tìm tọa độ của đỉnh A biết $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ và độ dài đường cao AH = 4.
2. Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng chéo nhau $d_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Tìm số phức z thỏa: $z^3 = -i$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 14

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 0.
2. Tìm giá trị của tham số m để trên đồ thị của hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng (d): y = x + 2.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \dfrac{3}{2}\sin 4x$.
2. Giải phương trình: $\log_3(2^x + 1).\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+1} + 2) + 2\log_3^2 2 = 0$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_e^{e^3} \frac{1 - \ln x}{\ln^2 x}dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SA = 3a. Đáy ABCD là hình bình hành, AB = a, BC = 2a và $\widehat{ABC} = 60^0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và SD. Chứng minh MN song song với mặt phẳng (SAB). Tính thể tích khối tứ diện ACMN theo a.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa đẳng thức $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

Chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{x^2}{x + yz} + \dfrac{y^2}{y + zx} + \dfrac{z^2}{z + xy} \geq \dfrac{x + y + z}{4}$.

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Từ điểm M(1; 4) vẽ 2 tiếp tuyến MA, MB với (C) (A, B là 2 tiếp điểm).
   Viết phương trình đường thẳng AB và tính độ dài dây cung AB.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm A(1;–1; 3), B(2; 4; 0) và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 2.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển $(1 + x + x^2 + x^3)^{10}$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho (C_1): $x^2 + y^2 = 16$ và (C_2): $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
   Viết phương trình đường tròn tâm I, $x_I = 2$ tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2).
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.
   Gọi giao điểm của (S) với 3 trục tọa độ là A, B, C (khác O).
   Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Cho đẳng thức: $C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + ... + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n} = 2^8 - 1$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$).

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển và rút gọn biểu thức $(1 - x + x^3 - x^4)^n$.

……………………Hết……………………..

ĐỀ SỐ 15

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số và vẽ đồ thị (C).
2. Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $\cos^8 x + \sin^8 x = \dfrac{1}{8}$.
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 x + 3\sqrt{5 - \log_3 y} = 5 \\ 3\sqrt{\log_2 x - 1} - \log_3 y = -1 \end{cases}$.

Câu III (*1,0 điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx$.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình nón có bán kính đáy R = 10cm và thiết diện qua trục là tam giác đều. Một hình trụ nội tiếp hình nón có thiết diện qua trục là hình chữ nhật có hai cạnh song song với trục hình trụ dài gấp đôi hai cạnh còn lại. Tính thể tích của khối trụ.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho 3 số thực không âm x, y, z thỏa $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{xy}{1+z} + \frac{yz}{1+x} + \frac{zx}{1+y}.$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC vuông tại A(1; 0) và (BC): y – 2 = 0. Đường tròn (C) tâm A tiếp xúc (BC) cắt cạnh AC tại trung điểm M. Tìm tọa độ của B và C.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{-2} \text{ và } d_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Viết phương trình hai mp lần lượt chứa d_1, d_2 và song song với nhau.

Câu VII.a (*1,0 điểm*)

Tìm số phức z thỏa: $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}.i$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (*2,0 điểm*)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho 3 đường thẳng (d_1): x – 3y = 0, $(d_2) : 2x + y - 5 = 0$ và (d_3): x – y = 0. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết A, C lần lượt thuộc (d_1), (d_2) và hai đỉnh còn lại thuộc (d_3).
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{-2},\ d_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} \text{ và } d_3 : \frac{x}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{7}.$$

Viết phương trình đường thẳng cắt d_1, d_2 và song song với d_3.

Câu VII.b (*1,0 điểm*)

Chứng minh rằng: $\left(C_{2009}^{0}\right)^2 + \left(C_{2009}^{1}\right)^2 + ... + \left(C_{2009}^{2008}\right)^2 + \left(C_{2009}^{2009}\right)^2 = C_{4018}^{2009}$.

……………………Hết……………………..