Sổ Tay
Giải Tích 12

Sáo Sang Sông

www.saosangsong.com.vn

Chương 1. Ứng dụng của đạo hàm

1. Tính đơn điệu.

- Hàm số y = f(x) **đồng biến** trên K nếu : $\forall$ $x_1, x_2 \in K$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$
- Hàm số y = f(x) **nghịch biến** trên K nếu : $\forall$ $x_1, x_2 \in K$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$

Định lí : Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm trên khoảng I..

a) Nếu **f'(x) > 0** với mọi x $\in$ I thì hàm số **f(x) đồng biến** trên khoảng I.

b) Nếu **f'(x) < 0** với mọi x $\in$ I thì **hàm số f(x) nghịch biến** trên khoảng I.

c) Nếu f'(x) = 0 với mọi x $\in$ I thì hàm số f(x) không đổi trên khoảng I

Nhớ :Nếu dấu của f'(x) là dấu của tam thức $ax^2 + bx + c$

thì : a) f(x) **đồng biến trên R** $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \le 0 \end{cases}}$

b) f(x) **nghịch biến trên R** $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \le 0 \end{cases}}$

2. Cực trị.

Định lí 1 : Giả sử hàm số y = f(x) đạt cực trị tại x_0 .Khi đó, nếu f(x) có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$

Định lí 2 :

Giả sử hàm số y = f(x) liên tục trên khỏang K =(x_0 – h ; x_0 + h) và có đạo hàm trên K

a) Nếu f'(x) đổi dấu từ **dương sang âm** khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt **cực đại** tại điểm x_0

b) Nếu f'(x) đổi dấu từ **âm sang dương** khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm x_0

Định lí 3 : Giả sửhàm số y = f(x) có đạo hàm cấp hai trên khoảng (x_0 – h ; x_0 + h) . Khi đó

a) Nếu $\mathbf{f'(x_0) = 0}$, $\mathbf{f''(x_0) > 0}$ thì x_0 là điểm cực tiểu

b) Nếu $\mathbf{f'(x_0) =}$, $\mathbf{f''(x_0) < 0}$ thì x_0 là điểm cực đại

Nhớ:

1. f(x) có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ f ' (x) = 0 có ít nhất 2 nghiệm phân biệt
2. f(x) có CĐ (CT) tại x_0 => $f'(x_0) = 0$ => m. Sau đó thử lại bằng dấu của f' hay f '' (x_0).

3.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [a ; b]

1. Tìm các điểm $x_1 ,x_2 , \dots , x_n$ trên [a;b] tại đó **f '(x) = 0** hay không xác định
2. Tính f(a), $f(x_1)$, $f(x_2)$, … , $f(x_n)$, f(b)
3. Tìm **số lớn nhất M** và **số nhỏ nhất m** trong các số trên thì : $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ và $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

4. Tiệm cận : (C) : y = f(x)

- y = y_0 là **đường tiệm cận ngang** của (C) nếu $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_o}$
- x = x_0 được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số y = f(x) nếu $\boxed{\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \infty}$
- y = ax + b , a $\neq$ 0 **đường tiệm cận xiên** nếu : $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0}$

5. Phép biến đổi đồ thị .

5.1. Phép đối xứng :

a) qua trục Ox của đồ thị **y = f(x)** là đồ **thị y = - f(x)**

b) qua trục Oy của đồ thị **y = f(x)** là đồ thị **y = f(- x)**

c) qua gốc tọa độ của đồ thị **y = f(x)** là đồ thị **y = - f(- x)**

5.2. Công thức đổi trục bằng phép tịnh tiến

$\overrightarrow{OI} = (x_0; y_0)$: $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = X + x_o} \\ \mathbf{y = Y + y_o} \end{cases}}$

(C) : y = f(x) $\Leftrightarrow$ (C) : $\mathbf{Y = f(X + x_0) - y_0}$

Cho (C) : y = f(x) :

- Đồ thị (C_1) : y = f(|x|) gồm 2 phần :
  - ❖ Phần (I) trùng với phần (C) ứng với x ≥ 0
  - ❖ Phần (II) đối xứng phần (I) qua Oy.
- Đồ thị (C_2) : y = | f(x) | gồm 2 phần :
  - ❖ Phần (I) trùng với phần (C) ở phía trên O x
  - ❖ Phần (II) đối xứng qua Ox với phần (C) ở phía dưới Ox

6.1. KHẢO SÁT HÀM SỐ 1. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

- D = R
- $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $\Delta' = b^2 - 3ac$

  $\Delta' \leq 0$: $a > 0 \Rightarrow$ y đồng biến trên R

  $a < 0 \Rightarrow$ y nghịch biến trên R

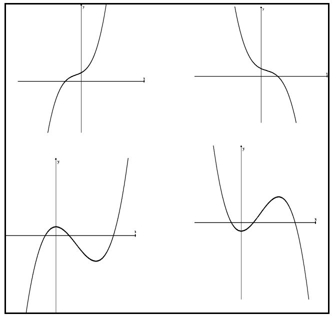
  $\Delta' > 0$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = x_{1,2}$: cực trị

a > 0

x	- oo		x_1		x_2		+ oo
y'		+	0	-	0	+	
y		↗		↘		↗	

a < 0

x	- oo		x_1		x_2		+ oo
y'		-	0	+	0	-	
y		↘		↗		↘	



(C) nhận điểm uốn làm **tâm đối xứng**

6.2. $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

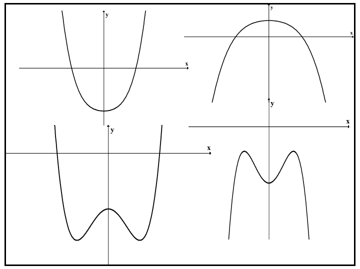
- D = R
- $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$
  - ❖ $ab \geq 0$: 1cực trị
  - ❖ $ab < 0$: 3 cực trị

a > 0, b > 0

x	- oo		0		+ oo
y'		-	0	+	
y		↘		↗	

a > 0, b < 0

x	- oo		$-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$		0		$\sqrt{\frac{-b}{2a}}$		+ oo
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	



© nhận Oy làm **trục đối xứng**

6.3. Hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$)

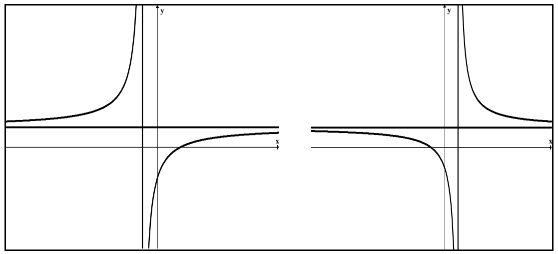
- Tập xác định $D = R \setminus \{-d/c\}$
- $y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$
  - ❖ Nếu ad – bc > 0 thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định
  - ❖ Nếu ad – bc < 0 thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định
  - ❖ Nhớ: Nếu ad = bc = 0 thì y = a/c
- TCN: y = a/c , TCĐ : x = - d/c
- BBT

ad – bc > 0

x	- oo		-d/c		+ oo
y'		+	||	+	
y		↗	||	↗	

ad – bc < 0

x	- oo		-d/.c		+oo
y'		-	||	-	
y		↘	||	↘	



Tâm đối xứng là giao điểm hai tiệm cận

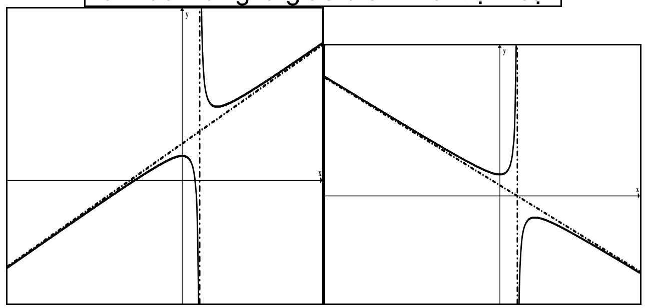
4. Hàm số phân thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'} = px + q + \frac{r}{b'x + c'}$

($prb' \neq 0$)

- Tập xác định R \ { - c'/b'}
- $y' = \frac{ab'x^2 + 2ac'x + bc' - b'c}{(b'x + c')^2} = \frac{g(x)}{(b'x + c')^2}$
  - ❖ Nếu g(x) VN :y đồng biến khi ab' > 0 hay nghịch biến nếu ab' < 0 trên từng k xác định.
  - ❖ Nếu g(x) có 2 nghiệm : y có 2 cực trị.
- TCĐ: x = - c'/b', TC X : y = px + q
- Đồ thị là hyperbol xiên góc có tậm đối xứng là giao điểm của hai tiệm cận
- BBT (trường hợp có 2 cực trị và p > 0)

x	- oo		x_1		- c'/b'		x_2		+ oo
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y		↗		↘	||	↘		↗	

Tâm đối xứng là giao điểm hai tiệm cận



7. Một số bài toán về KSHS

7.1.Giao điểm của hai đồ thị

Cho (C_1) y = f(x) và(C_2) y = g(x) . Hệ pt tọa độ giao điểm :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \quad (1) \\ y = f(x) \end{cases}$$: phương trình hoành độ giao điểm

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của (C_1) và (C_2

7.2. Phương trình tiếp tuyến

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số y = f(x) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ thuộc (C) là : $\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$

7.3. Điều kiện tiếp xúc của hai đường cong

Định lí : (C_1) và (C_2) tiếp xúc ⇔ hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \ \ (1) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có n_o.

Nếu (1) là pt bậc 2 thì đktx là $\Delta = 0$.

Áp dụng : Viết phương trình tiếp tuyến của (C) : y = f(x) biết d qua điểm A.

- Bước 1: Pt d qua A có dạng $y = k(x - x_A) + y_A$
- Bước 2 : d tiếp xúc (C) ⇔ $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \ \ (1) \\ f'(x) = k \ \ (2) \end{cases}$
- Thế k từ (2) vào (1), ta được pt tính hoành độ tiếp điểm
- Giải để tìm x , thế vào (2), được k => pt của d.

7.4. Họ đồ thị qua các điểm cố định .

Cho họ đồ thị (C_m) : y = f(x) phụthuộc tham số m.

- $M(x_0; y_0) \in (C_m)$ ⇔ $y_0 = f(x_0)$ (*)
- Biến đổi (*) về dạng Am + B = 0 (1) hay $Am^2 + Bm + C = 0$ (2)
- (C_m) qua đ cố định thoả A = B = 0 (A = B = C = 0)

7.5. Tìm tập hợp những điểm M thỏa một tính chất nào đó.

- Tìm điều kiện m $\in K$ để điểm M tồn tại.
- Tìm hoành độ x theo tham số m và tung độ y theo x và m : y = f(x, m)
- Tính m theo x và thế vào y = f(x, m) ta được y = g(x).
- Giải điều kiện m $\in K$ thành điều kiện của x $\in D$. Kết luận : tập hợp là đồ thị hàm số y = g(x) với x $\in D$.

ÔN ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm của hàm số y = f (x) tại điểm x_o :

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}}$$

2.. Ý nghĩa hình học của đạo hàm :

Định lý : Đạo hàm của hàm số tại điểm x_o là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M_o(x_o, f(x_o))$ thuộc (C)

•Phương trình của tiếp tuyến với (C) tại $M_o(x_o, y_o)$ thuộc (C) là : $\boxed{\mathbf{y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)}}$.

3 . Các quy tắc tính đạo hàm

(u + v – w)’ = u’ + v’ – w’ ; (uv)’ = u’v + uv’

(ku)’ = k.u’ ; (u^n)’ = nun – 1. u’

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \ ; \left(\frac{k}{v}\right)' = \frac{-kv'}{v^2}$$

$$\left(f\left[u(x)\right]\right)' = f'[u].u'(x)$$

4. Bảng công thức đạo hàm.

(C’) = 0	(a x + b)’ = a
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}.u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
(sinx)’ = cosx	(sinu)’ = u’.cosu
(cosx)’ = - sinx	(cosu)’ = - u’.sinu
(tanx)’ = $\frac{1}{\cos^2 x}$ = $1 + \tan^2 x$	(tanu)’ = $\frac{u'}{\cos^2 u}$ = $(1 + \tan^2 u)$. u’
(cotx)’ = $-\frac{1}{\sin^2 x}$ = $-(1 + \cot^2 x)$	(cotgu)’ = $-\frac{u'}{\sin^2 u}$ = $-(1+ \cot^2 u)$. u’

Chương 2. Hàm số lũy thừa, mũ, lôgarit

1. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Với $a \in R^+$ và số hữu tỉ r = m/n (tối giản) trong đó $m \in Z$, $n \in N^*$, ta định nghĩa : $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Lũy thừa với số mũ vô tỉ

a) Định nghĩa . Cho số vô tỉ $\alpha = \lim_{n \to +\infty} r_n$, thế thì

$a^\alpha = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n}$

b) Tính chất . Cho a, b > 0 , $\alpha, \beta \in R$, ta có :

- $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
- $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\beta$; $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\beta}$
- $a^\alpha > 0 ; (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$
- Nếu a > 1 : $a^\alpha > a^\beta \iff \alpha > \beta$
- Nếu 0 < a < 1 : $a^\alpha > a^\beta \iff \alpha < \beta$

2. Hàm số lũy thừa y = x^α

- **Đạo hàm :** Với mọi x > 0 và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

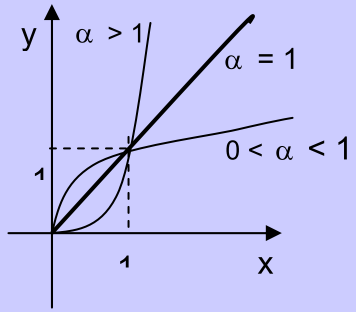
  Tổng quát : $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} u'$

Khảo sát y = x^α trên (0 ; + ∞)

a) $\alpha > 0$:

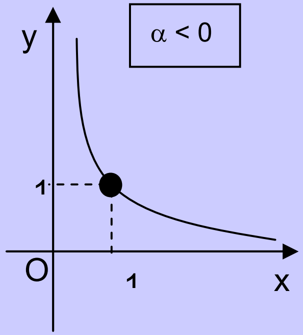
- Hàm số luôn đồng biến từ 0 đến + ∞.
- Không có tiệm cận

Đồ thị luôn qua điểm (1 ; 1) .



$\alpha < 0$

- Hàm số luôn nghịch biến từ $+\infty$ đến 0.
- Tc ngang Ox , tc đứng Oy
- Đồ thị luôn qua điểm (1;1)



3. Lôgarit

- **Định nghĩa lôgarit**

$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b \quad (a , b > 0 , a \neq 1)$

(a : cơ số , b đối số)

- **Tính chất**

$\forall \; a, b > 0 , a \neq 1 :\quad \boxed{\begin{array}{l} \log_a 1 = 0 \quad ; \; \log_a a = 1 \\ a^{\log_a b} = b \quad ; \log_{a^{\alpha}} a^{\alpha} = \alpha \; (\alpha \in R) \end{array}}$

- **Quy tắc tính lôgarit**

Định lí 1 : $\forall \; a, b_1, b_2 > 0$ và $a \neq 1$:

$$\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2 \; ; \; \log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2 \; ;$$
$$\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b \quad (\forall \alpha \in R)$$

Đặc biệt: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \; ; \; \log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \log_a b$

- **Công thức đổi cơ số**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \; ; \; \log_{a^{\alpha}} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \; ; \; \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

4. Hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0 , \neq 1$).

- Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm là $y' = e^x$, $\forall$ x.
- Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm là $y' = a^x \ln a$, $\forall$ x.

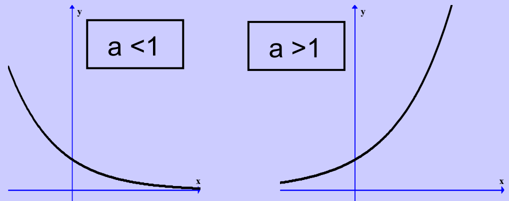
Tổng quát : $\boxed{\mathbf{(e^u)' = e^u . u' \; ; \; (a^u)' = a^u . \ln a . u'}}$

❖ Có tập xác định là R.

❖ Đạo hàm : $y' = a^x \ln a$, suy ra :

* a > 1 : đồng biến từ (-oo; + oo) đến (0 ; + oo).

* 0 < a < 1: nghịch biến từ (-oo; + oo) đến (+ oo ; 0).



5. Hàm số lôgarit $y = \log_a x$ ($a > 0 , \neq 1$)

* Hàm số y = lnx có đạo hàm là $y' = 1/x$, $\forall \; x > 0$.

* Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm $y' = \frac{1}{x \ln a}$, $\forall \; x > 0$

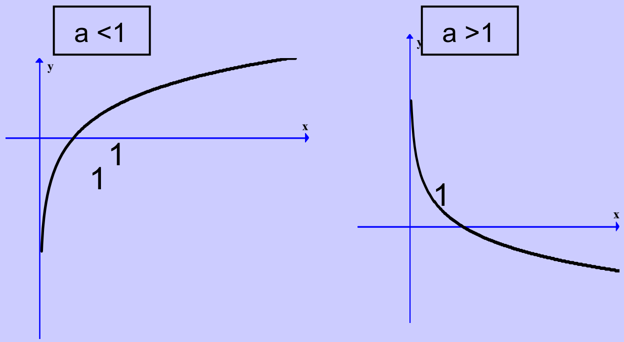
Tổng quát : $\mathbf{(\ln|u|)' = u'/u \; ; \; (\log_a|u|)' = u'/(u\ln a)}$; $\forall \; u \neq 0$

❖ Có tập xác định là (0 ; + ∞).

❖ Đạo hàm y' = 1/(xlna) , suy ra :

* a > 1 : đồng biến từ (0 ; + ∞) đến (- oo ; + oo).

* 0 < a < 1 : nghịch biến từ (0 ; + ∞) đến (+ oo ; - oo)



6. Phương trình mũ

Dạng 1 $\quad a^x = b \; (a > 0 , \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$

$a^{u(x)} = a^{v(x)} \iff u(x) = v(x)$ với $a > 0 , \neq 1$

Dạng 2 : Đưa về dạng : $a^{u(x)} = b^{v(x)}$ (a, b > 0 , $\neq$ 1)

Lấy lôgarit cớ số a hai vế : $u(x) = v(x). \log_a b$

Dạng 3 : Bằng cách đưa về cùng một cơ số rồi **đặt ẩn số phụ** để được phương trình bậc 2, 3 theo ẩn số phụ .

Dạng 4 : Sử dụng chiều biến thiên để giải pt f(x) = 0

- Tìm một nghiệm x_0 bằng phép thử $f(x_0) = 0$
- Nếu f(x) luôn đồng biến hay luôn nghịch biến thì x_0 là nghiệm duy nhất.

7. Phương trình lôgarit

Dạng 1: Phương trình dạng cơ bản :

❖ $\log_a u(x) = b \iff \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ u(x) = a^b \end{cases}$

❖ $\log_a u(x) = \log_a v(x) \iff \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ u(x) > 0 \text{ (hay } v(x) > 0) \\ u(x) = v(x) \end{cases}$

Dạng 2 : Trong trường hợp tổng quát ta đưa phương trình về dạng cơ bản theo các bước sau :

- Đặt **điều kiện** cho các cơ số (> 0 , $\neq$ 1) , đối số (> 0).
- Đưa các biểu thức về **cùng cơ số** và dùng quy tắc tính toán để biến đổi phương trình về dạng cơ bản $\log_a u(x) = \log_a v(x)$
- Giải phương trình u(x) = v(x) rồi chọn nghiệm thỏa điều kiện đã nêu.

Dạng 3: Đưa p trình về dạng bậc 2, 3 qua **phép đặt ẩn số phụ**

Dạng 4 : Sử dụng chiều biến thiên để giải pt f(x) = 0

8. Hệ phương trình mũ – lôgarit

Nhắc lại các phương pháp giải hệ đả biết :

- Phương pháp thế
- Phương pháp cộng
- Phương pháp đặt ẩn số phụ để biến đổi hệ về các dạng quen thuộc như hệ bậc nhất , hệ đối xứng. . .

9. Bất phương trình mũ

1) Bất phương trình mũ cơ bản .

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ hay $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

2) Tương tự như đối với phương trình mũ , ta có thể biến đổi bất phương trình về dạng cơ bản bằng cách sử dụng các phương pháp :

- lôgarit hóa hai vế
- đặt ẩn số phụ

3) Dùng phương pháp khảo sát hàm số :

- Nếu f là hàm số đồng biến trên K thì $\forall \; x_1, x_2 \in K$: $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- Nếu f là hàm số nghịch biến trên K thì $\forall \; x_1, x_2 \in K$: $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$

10. Bất phương trình lôgarit

1) Bất phương trình lôgarit cơ bản .

- $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$ hay $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$
- Đặc biệt $\log_a f(x) > 0$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$
- $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$
  $\begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$

2) Đặt ẩn phụ

3) Dùng phương pháp khảo sát như đối với phương trình mũ

Chương 3. Nguyên hàm và tích phân

§1.Nguyên hàm .

I.Định nghĩa. Hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a;b) $\Leftrightarrow$ **F'(x) = f(x)** với mọi x thuộc khoảng (a;b)

II. Định lý1. F(x) và G(x) là nguyên hàm của hàm số f(x) $\Leftrightarrow$ G(x) = F(x) + C (C là một hằng số)

Tập hợp tất cả các nguyên hàm F(x) + C kí hiệu $\int f(x)dx$

III. Tính chất của nguyên hàm .

1 . $\left(\int f(x)\right)' = f(x)$; $\int (f(x))'dx = f(x) + C$.

2 . $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k là một hằng số)

3 . $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

IV. Định lý 3. Mọi hàm số f(x) liên tục trên một khoảng đều có có nguyên hàm trên khoảng đó.

V. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp .

$\int 0dx = C$	$\int dx = x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$	$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$
$\int \frac{1}{kx}dx = \frac{1}{k}\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$
$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 kx}dx = \frac{1}{k}\tan kx + C$
$\int a^{kx}dx = \frac{a^{kx}}{k\ln a} + C\ (a > 0; a \neq 1)$	$\int \frac{1}{\sin^2 kx}dx = -\frac{1}{k}\cot kx + C$

VI. Phương pháp tìn nguyên hàm

1. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý 1 : $\int u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

hay $\int udv = u.v - \int vdu$

2. Phương pháp đổi biến số .

Định lý 2 : $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$

Áp dụng:

$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a} + C\ \ (n \neq -1)$

$\int \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$ $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ . . .

2. Tích phân .

I. Định nghĩa tích phân . F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên đoạn [a,b] . Hiệu số **F(b) – F(a)** được gọi là tích phân ác định trên đoạn [a.b] của f(x)), ký hiệu $\int_a^b f(x)dx$ hay

$F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số F(b) – F(a).

II. Tính chất của tích phân .

1 : $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k là một hằng số).

2 : $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3 : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. (a < c < b)

4. Nếu hàm số f(x) không âm trên đoạn [a,b] và liên tục trên đoạn này thì : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

III.Phương pháp tính tích phân.

1.Phương pháp tích phân từng phần .

Định lý 1 : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v'(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$. Hay

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

II. Phöông phaùp tính nguyeân1. Phöôn

2. Phương pháp đổi biến số .

Dạng 1: $\int_a^b f(u(x)).u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$

Dạng 2 .Nếu $x=\varphi(t)$, $\varphi(\alpha)=a;\varphi(\beta)=b$ thì:

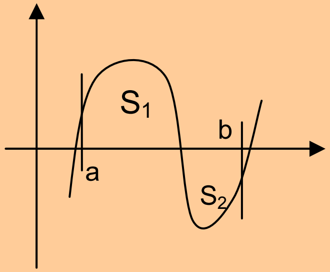
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt}.$$

3 . Ứng dụng của tích phân trong hình học.

I. Tính diện tích .

a. **Diện** tích hình thang cong hạn định bởi (C) y = f(x) , trục Ox , hai đường thẳng x = a ; x = b cho bởi :

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|dx\ (a<b)}.$$



Đặc biệt : Diện tích giới hạn bởi (C) y = f(x) và trục hoành là $\int_n^l |f(x)|dx$, trong đó n, l lần lượt là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình hoành độ giao điểm : f(x) = 0

b. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong y = $f_1(x)$; y = $f_2(x)$

$$\boxed{S=\int_n^l |f_1(x)-f_2(x)|dx\ (n<l)}.$$

trong đó n, l lần lượt là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình hoành độ giao điểm : f(x) – g(x) = 0

II. Tính thể tích khối tròn xoay .

a. Khi quay hình phẳng $\begin{cases} y=f(x)\\ y=0\ (\text{trục Ox})\\ x=a\ ;\ x=b\end{cases}$ quanh trục O x ta được khối có thể tích là V_x cho bởi công thức :

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b [f(x)]^2dx}.$$

b. Công thức tương tự khi cho một hình phẳng

$\begin{cases} x=f(y)\\ x=0\ \text{trục Oy)}\\ y=a\ ;\ y=b\end{cases}$ quay quanh trục Oy.

$$\boxed{V_y=\pi\int_a^b [g(y)]^2dy}.$$

Chương 4. Số phức

1. Số i . Căn bậc hai của số thực âm .

* Số i là số thỏa $i^2=-1$.

*. Căn bậc hai của số âm A là $\boxed{\pm i\sqrt{-A}}$

2. Dạng đại số của số phức .

* Tập hợp các số phức là C :

$$\boxed{C=\{z=a+bi\,/\,a,b\in R;i^2=-1\}}$$

a được gọi là phần thực của z ; b được gọi là phần ảo của z .

* $\boxed{a+bi=a'+b'i\Leftrightarrow\begin{cases}a=a'\\ b=b'\end{cases}}$

* Biểu diễn hình học của số phức .

Điểm M(a,b) trong hệ trục Oxy được gọi là điểm biểu diễn của số phức z = a + bi .

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **môđun** của số phức z và ký hiệu là $|z|$. $\boxed{|z|=|\overrightarrow{OM}|\ hay\ |a+bi|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a^2+b^2}}$

* Số phức liên hợp .

Số phức $\boxed{\bar z=\ a-bi}$ được gọi là **số phức liên hợp** của z = a + bi

Ta có các tính chất sau :

$\bullet\ \bar{\bar z}=z\quad \bullet\ |\bar z|=|z|$

Trong mặt phẳng phức , các điểm biểu diễn của z và $\bar z$ đối xứng nhau qua trục Ox .

3 . Các phép toán trên số phức

I. Phép cộng – Phép trừ .

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

(a + bi) – (c + di) = (a – c) – (b – d)i

II. Phép nhân .

$\boxed{(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)}$

Chú ý : $i^2=-1$; $i^3=i^2.i=-i$; $i^4=i^2.i^2=(-1).(-1)=1$ v..v ..

III.Tổng và tích của hai số phức liên hợp .

$$\boxed{\begin{aligned} z+\bar z&=(a+bi)+(a-bi)=2a\\ z.\bar z&=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2\end{aligned}}$$

IV. Nghịch đảo của số phức số phức $z\neq 0$ là $\dfrac{1}{z}$ và :

$$\boxed{\frac{1}{z}=\frac{\bar z}{|z|^2}\ ;\ \frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}}$$

V. Chia hai số phức : Nhân tử và mẫu với (a – bi) .

$$\boxed{\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i}$$

VI. Liên hợp của tổng , hiệu , tích , thương hai số phức .

$\boxed{\overline{z_1\pm z_2}=\bar z_1\pm\bar z_2}$; $\boxed{\overline{z_1.z_2}=\bar z_1.\bar z_2}$; $\boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar z_1}{\bar z_2}\ (z_2\neq 0)}$;

$\boxed{\overline{z^n}=(\bar z)^n}$

$\boxed{|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|}$; $\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\quad |z^n|=|z|^n}$

4.Khai phương và giải phương trình bậc hai .

I. Cho số thực âm A (A < 0) . Hai căn số bậc hai của A là :

$$\pm i\sqrt{-A}\,[\,do\ (\pm i\sqrt{-A})^2=i^2(-A)=A]$$

II.Căn bậc hai của số phức (a + bi) là số phức (x + yi) định bởi :

$$\boxed{\begin{aligned} x+iy&=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)\ khi\ b\geq 0\\ x+iy&=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)khi\ b<0\end{aligned}}$$

III.Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ cho bởi công thức :

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\omega}{2a}(a\neq 0)}.$$

trong đó ω là một căn bậc hai của $\Delta=b^2-4ac$.

Định lý Vi-ét: $\boxed{x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\ ;\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}}$

5 .DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

I. Môđun và argumen của số phức

M là điểm biểu diễn của số phức z:

- độ dài OM được gọi là ***môđun*** của số phức z.
- Góc lượng giác $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ được gọi là argumen của số phức z và kí hiệu là **arg(z)**

Argumen của số phức z được xác định sai khác một bội số của 2π nhưng ta thường coi arg(z) là giá trị không âm nhỏ nhất của φ

II. .Dạng lượng giác của số phức

Gọi r và φ là môđun và argumen của $z = a + bi$:

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r} ; \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

dạng lượng giác của số phức z

III. $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi \end{cases}$$

6. CÔNG THỨC MOA-VRƠ

Cho $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ và $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

- $z_1.z_2 = r_1.r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $z_1 / z_2 = (r_1/r_2)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
- . $\dfrac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$
- $\boxed{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]}$

(Moa-vrơ)