Sổ Tay
Hình Học 12

Sáo Sang Sông

Trần Thành Minh
Phan Lưu Biên
Trần Quang Nghĩa

www.saosangsong.com.vn

Chương 1. Khối đa diện

I. Khối đa diện lồi .

Khối đa diện (H) được gọi là lồi khi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của (H) luôn thuộc (H) .

II. Khối đa diện đều .

Định nghĩa : Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có các tính chất sau :

a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh
b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt

Khi đó , khối đa diện đều này là loại đa diện đều loại $\{p,q\}$.

Tất cả các mặt của một khối đa diện đều là những đa giác đều bằng nhau .

Định lý : Chỉ có năm loại đa diện đều gồm các loại $\{3,3\}$; $\{4,3\}$; $\{3,4\}$; $\{5,3\}$; $\{3,5\}$.

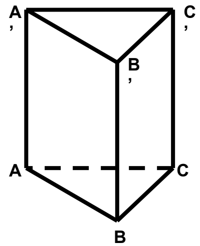
Tên gọi lần lượt là : khối tứ diện đều ; khối lập phương ; khối bát diện đều ; khối mười hai mặt đều ; khối hai mươi mặt đều .

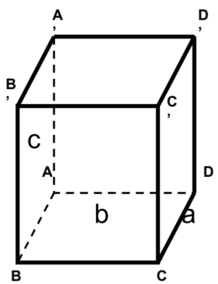
2.. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

I .Thể tích khối lăng trụ .

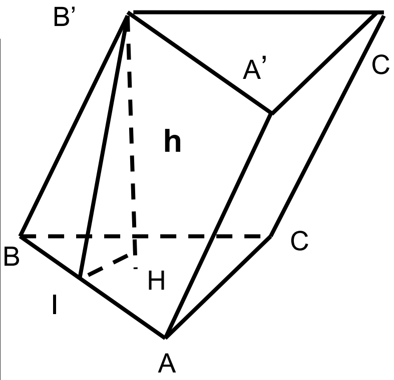
Định lý : Thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đáy B nhân với chiều cao h : $\boxed{V_{KLT} = Bh}$.

Đặc biệt : Thể tích của khối hình hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó $\boxed{V_{HHCN} = abc}$





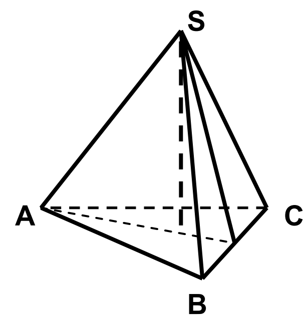
LT đều :
Đáy là đa giác đều
Cạnh bên vuông góc đáy

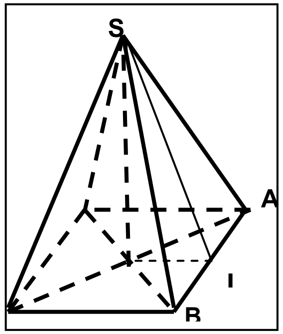


* Kẻ B'H vuông góc (ABC) : B'H là đường cao
* Khí đó góc B'BH là góc cạnh bên và đáy.
* Kẻ HI vuông góc AB thì góc B'IH là góc mặt bên ABB'A' và đáy

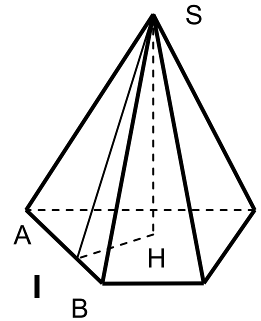
II. Thể tích khối chóp.

Định lý : Thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy B nhân với chiều cao h : $\boxed{V_{KC} = \frac{1}{3}Bh}$





Hình chóp đều : là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao là tâm O của đáy. Trong hình chóp đều:
* Tất cà cạnh bên bằng nhau và hợp với đáy góc α = SAO
* Tất cà mặt bên bằng nhau và hợp với đáy góc β = SIO



* Kẻ SH vuông góc(ABC) : SH là đường cao
* Khí đó góc SAH là góc cạnh bên SA và đáyABC
* Kẻ HI vuông góc AB thì góc SIH là góc mặt bên SAB và đáy ABC.

Chương 2. Khối tròn xoay

§1. MẶT CẦU

I. Mặt cầu : $\boxed{M \in S(O\ ;\ R) \Leftrightarrow OM = R}$

- Dây cung AB= 2r đi qua tâm O là một đường kính của mặt cầu.
- Mặt cầu là mặt tròn xoay sinh bởi nửa đường tròn quay quanh đường kính của nửa đường tròn đó.

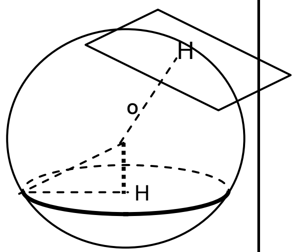
II. Giao của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu S(O ;r) và mặt phẳng (P) . Kẻ OH = h $\perp$ (P).

- nếu h > r : (P) không cắt mặt cầu
- nếu h = r : (P) tiếp xúc với mặt cầu tại H, H là tiếp điểm và (P) là tiếp diện của mặt cầu

Nhớ :(P) tiếp xúc mặt cầu S(O ; r) tại H $\Leftrightarrow$ OH $\perp$ (P)

- nếu h < r : (P) cắt mặt cầu theo đường tròn tâm H, bán kính r' $= \sqrt{r^2 - h^2}$



Đặc biệt khi h = 0 thì giao tuyến của (P) với mặt cầu là đường tròn tâm O bán kính r, gọi là đường tròn lớn

III. Giao của mặt cầu với đường thẳng.

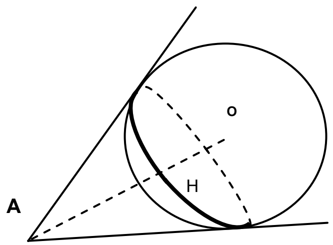
Cho mặt cầu S(O ;r) và đường thẳng Δ. Kẻ OH = d $\perp$ (P).

- Nếu d > r thì Δ không cắt mặt cầu S(O ;r)
- Nếu d = r thì Δ tiếp xúc với mặt càu S(O ;r) tại H và H là tiếp điểm, đường thẳng Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu
- Nếu d < r thì Δ cắt mặt cầu S(O ;r) tại hai điểm M , N đối xứng nhau qua H

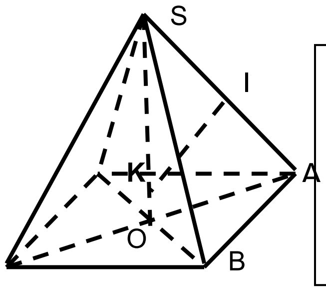
Nhận xét :

a. Qua điểm A $\in$ mặt cầu S(O) có vô số tiếp tuyến của (S) nằm trong tiếp diện tại A.

b. Qua một điểm A ngòai mặt cầu S(O) có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đã cho. Các tiếp điểm thuộc một đường tròn và cách đều điểm A.

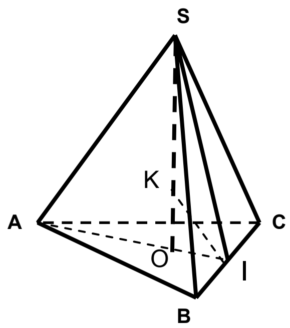


Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều



- Tâm K là giao điểm của trung trực của cạnh bên SA và đường cao SO
- Bán kính là KS
- Chú ý hai tam giác đồng dạng SIK và SOA

Mặt cầu nội tiếp hình chóp đều



- Tâm K là giao điểm của phân giác của góc SIO và đường cao SO
- Bán kính là KO
- Chú ý tính chất phân giác của tam giác SOI.

IV. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

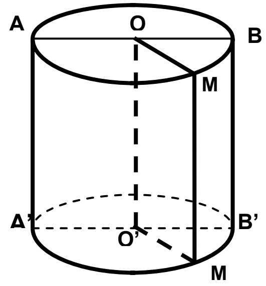
Diện tích mặt cầu bán kính r : $\boxed{S = 4\pi r^2}$

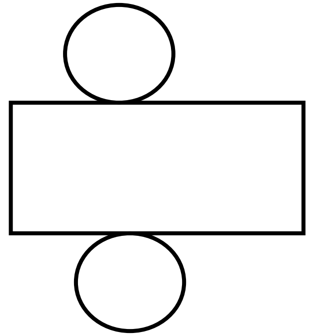
Thể tích khối cầu bán kính r : $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$

§2. MẶT TRỤ

1. Cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau và cách nhau một khỏang r .Khi quay xung quanh Δ đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay gọi là mặt trụ tròn xoay (hay mặt trụ) .
   Δ : trục, l : đường sinh , r : bán kính .
2. Hình giới hạn bởi mặt trụ và hai mặt phẳng vuông góc với trục gọi là hình trụ.

Khi quay hình chữ nhật OO'M'M quanh OO' thì hai cạnh OM và O'M' sẽ tạo hai hình tròn đáy và MM' tạo ra mặt xung quanh hình trụ.





3. Diện tích hình trụ và thể tích khối trụ

a. Diện tích xung quanh của hình trụ là giới hạn của diện tích xung quanh hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn :

$\boxed{S_{xq} = 2\pi rh}$: r bán kính, h : chiều cao

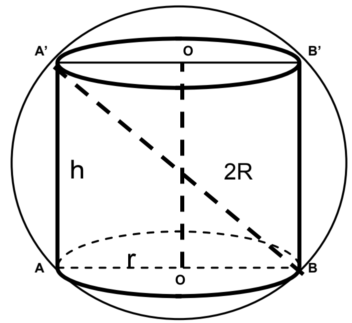
b. Thể tích của khối trụ là giới hạn của thể tích khối lăng trụ đều nội tiếp khối trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn

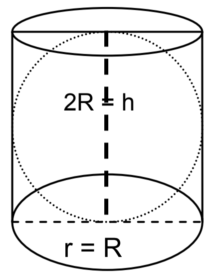
$\boxed{V = \pi r^2 h}$

4. Hình càu và hình trụ.

Gọi r và h là bán kính đáy và chiều cao hình trụ, R là bán kính mặt cầu

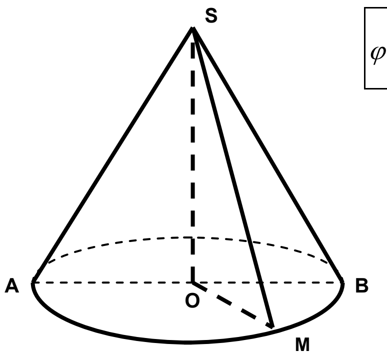
- Hình câu nội tiếp hình trụ: $\boxed{h = 2R \text{ và } R = r}$
- Hình cầu ngoại tiếp hình tru: $h^2 + 4r^2 = 4R^2$



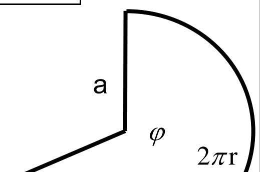


§3. MẶT NÓN

1. **C**ho đường thẳng Δ và l cắt Δ tại O và không vuông góc Δ. .Khi quay xung quanh Δ đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay gọi là mặt nón tròn xoay (hay mặt nón) .
   Δ : trục, l : đường sinh ,
   góc α của l và Δ: nửa góc đỉnh
2. Hình giới hạn bởi mặt nón và mặt phẳng vuông góc Δ gọi là hình nón.
   * Khi quay tam giác vuông SOM quanh cạnh góc vuông SO thì cạnh OM sẽ tạo hình tròn đáy và SM tạo ra mặt xung quanh của hình nón .
   * Khai triển mặt xung quanh hình nón quang một đường sinh ta được một hình quạt tròn bán kính bằng đường sinh hình nón và góc ở tâm là φ .



$$\boxed{\varphi = \frac{r.180^o}{a}}$$



3. Diện tích hình nón và thể tích khối nón

a. Diện tích xung quanh của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn :

$\boxed{S_{xq} = \pi ra}$: r bán kính, a : đường sinh

b. Thể tích của khối nón là giới hạn của thể tích khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

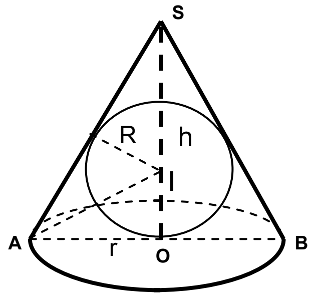
4. Hình cầu và hình nón

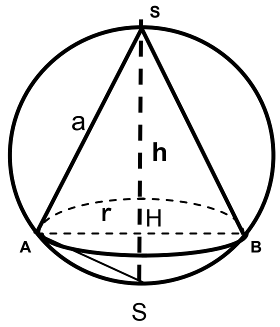
Gọi r và h là bán kính đáy và chiều cao hình trụ, R là bán kính mặt cầu

a. **Hình câu nội tiếp hình nón:**

R = bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB =>

$$\boxed{R = \frac{S_{SAB}}{p_{SAB}} = \frac{rh}{r + \sqrt{r^2 + h^2}}}$$





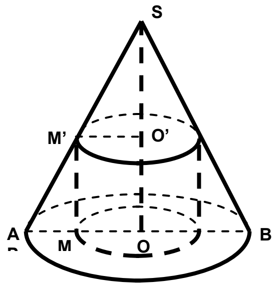
b. Hình cầu ngoại tiếp hình nón:

Kẻ đường kính SS'= 2R và dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAS' : $\boxed{r^2 = h(2R - h)}$

$\boxed{a^2 = h.\ 2R}$

3. Hình nón (r, h) ngoại tiếp hình trụ(r' , h')

$$\boxed{\frac{O'M'}{OA} = \frac{SO'}{SO} \Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{h - h'}{h}}$$

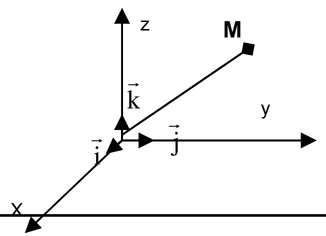


Chương 3. Phương pháp toạ độ không gian

§1. HỆ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

1. Hệ trục Oxyz :

- $\vec{u} = (x;y;z) \Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$
- **M = (x ; y ; z)** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$



2. Công thức

Cho $\vec{a}$ = (a_1, a_2, a_3) và $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ta có :

- $\boxed{\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}}$
- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$ với k là một số thực
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương
  $\Leftrightarrow a_1 = kb_1,\ a_2 = kb_2, a_3 = kb_3$
- $\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)}$
- Tích vô hướng: $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$
- Độ dài vectơ : $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Khoảng cách AB = $\boxed{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$
- Góc giữa hai vectơ
  $$\boxed{\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$
- Điều kiện vuông góc : $\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0}$

3. Tích có hướng của hai vectơ

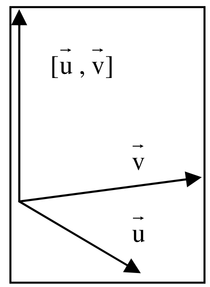
a .Định nghĩa : Cho hai vectơ

$\vec{u}$ = (a, b, c) và $\vec{v}$ = (a', b',,c')

Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là vectơ kí hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$ hoặc $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ có tọa độ là :

$[\vec{u}, \vec{v}]$ = (bc' – b'c, ca' – c'a , ab; - a'b).

$$= \boxed{\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)}$$



Chú ý :

$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}; [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}; [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$

b.Tính chất của tích vectơ :

a) $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$

b) $[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{u}$; $[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{v}$,tức là :

$$\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{u} = \left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{v} = 0$$

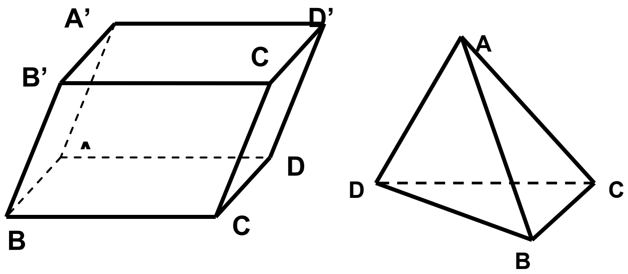
c) $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương ⇔ $[\vec{u},\vec{v}]=\vec{0}$

d) $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a},\vec{b})$

c. Ứng dụng của tích có hướng:

• Diện tích hình bình hành ABCD là $S_{ABCD} = \boxed{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]\right|}$

• Diện tích tam giác ABC là $S_A = \boxed{\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|}$



• $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng ⇔ $[\vec{a},\vec{b}].\vec{c}=0$

• Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D'

là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

• $\boxed{V_{ABCD} = {}^{1}/_{6}\,.[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}}$

4. Phương trình mặt cầu

a. Trong không gian Oxyz , phương trình mặt cầu tâm I(a;b;c) bán kính R có phương trình là ;

$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$

b. Trong không gian Oxyz mọi phương trình : $\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu * tâm I (a ; b ; c) ,

* bán kính R = $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá vuông góc với mặt phẳng (α) .

- Quy tắc : Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

2.. Cho mặt phẳng (α) qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A ; B; C)$, thế thì :

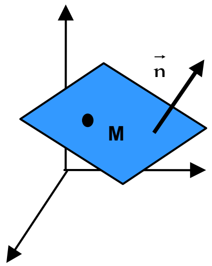
$\boxed{\mathbf{M(x ; y ; z) \in (\alpha) \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}}$

⇔ Ax + By + Cz + D = 0 (1) (với $A^2+B^2+C^2 \neq 0$)

(1) là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng .

- Mặt phẳng Ax + By + Cz + D = 0 ⊥ $\vec{n}$ = (A ; B ;C)
- Phương trình mặt phẳng $\begin{cases} \text{qua } M_0(x_0;y_0;z_0) \\ \text{VTPT } \vec{n}(A;B;C) \end{cases}$ là

$\boxed{\mathbf{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}}$



3. Các trường hợp riêng.

- (α) qua gốc O
  ⇔ (α): Ax + By + Cz = 0
- (α) // Ox ⇔ (α) : By + Cz + D = 0
- (α) ⊥ Ox ⇔ (α): Ax + D = 0
- (α) qua A(a ; 0 ; 0) , B(0 ; b ; 0) , C(0 ; 0 ; c)
  ⇔ (α) : $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$

3.. Vị trí tương đối giữa 2 mặt phẳng .

Cho (α) : Ax + By + Cz + D = 0 và

(α') : A'x + B'y + C'z + D' = 0

1. (α) , (α ') cắt nhau ⇔ A : B : C ≠ A' : B' : C'

2. (α) // (α ') ⇔ $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$

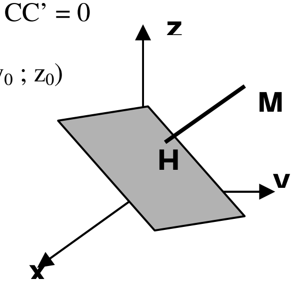
3. (α) , (α ') trùng nhau ⇔ $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$

2. (α) ⊥ (β) ⇔ AA' + BB' + CC' = 0

4. Khoảng cách từ điểm $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ đến mặt phẳng (α):

d(M, (α)) = MH

$= \boxed{\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$



§3. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

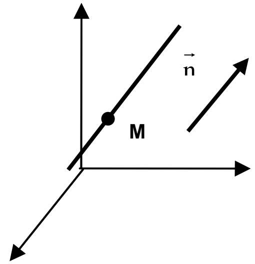
1. Định lí : Δ là đường thẳng qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ = (a ; b ; c) , thế thì :

$\boxed{\mathbf{M(x ; y ; z)} \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad (a^2+b^2+c^2 \neq 0) \\ z = z_0 + ct \end{cases}}$ **(1)**

phương trình tham số của đường thẳng Δ

- **(1)** ⇔ $\boxed{\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}}$

  phương trình chính tắc của Δ .



2. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} \text{qua } M_1(x_1;y_1;z_1) \\ \text{VTCP } \vec{a} \end{cases}$ và

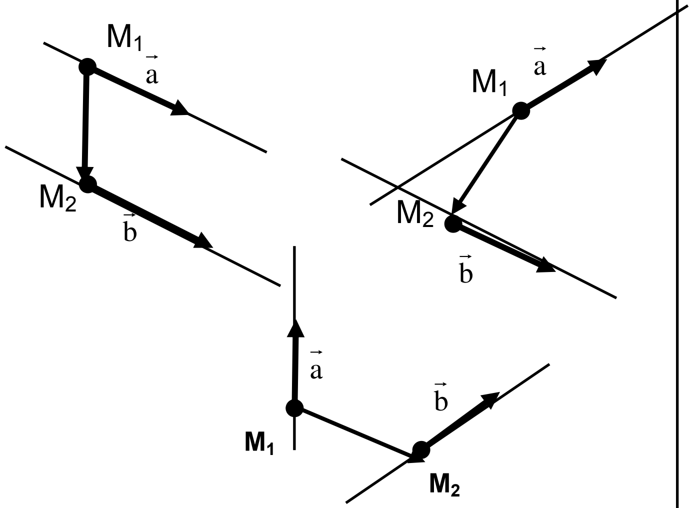
$\Delta_2 : \begin{cases} \text{qua } M_2(x_2;y_2;z_2) \\ \text{VTCP } \vec{b} \end{cases}$

Tính tọa độ vecto $\overrightarrow{M_1M_2}$

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ cùng phương ⇔ Δ_1 **và** Δ_2 trùng nhau
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương và không cùng phương $\overrightarrow{M_1M_2}$ ⇔ Δ_1 **và** Δ_2 song song
- $[\vec{a}, \vec{b}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$ ⇔ Δ_1 **và** Δ_2 cắt nhau
- $[\vec{a}, \vec{b}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ ⇔ Δ_1 **và** Δ_2 chéo nhau

Ngoài phương pháp vectơ , ta có thể giải vị trí tương đối của 2 đường thẳng bằng phương pháp đại số là giải hệ phương trình tham số của chúng. Khi đó :

- Δ_1 // Δ_2 ⇔ 2 vectơ chỉ phương cùng phương và hệ vô nghiệm
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau ⇔ 2 vectơ chỉ phương không cùng phương và hệ vô nghiệm
- Δ_1 , Δ_2 cắt nhau ⇔ hệ có nghiệm duy nhất
- Δ_1 , Δ_2 trùng nhau ⇔ hệ có vô số nghiệm



3. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng .

Cho mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$ (1) ; vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A ; B; C)$

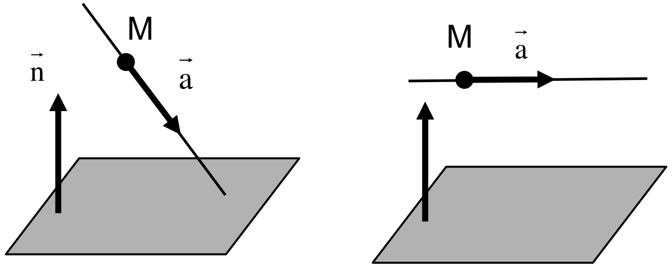
và đường thẳng d : $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ (2) qua $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và

vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$

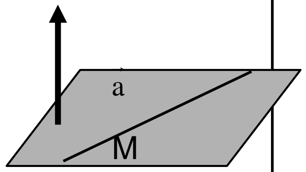
Thế (1) vào (2) ta được phương trình tính tham số t ứng với giao điểm của (α) và d .

- (α) và d cắt nhau ⇔ phương trình ẩn t có nghiệm duy nhất
- (α) và d song song ⇔ phương trình ẩn t vô nghiệm
- (α) chứa d ⇔ phương trình ẩn t có vô số nghiệm

Ngoài phương pháp đại số , ta có thể giải bằng phương pháp vectơ như sau:



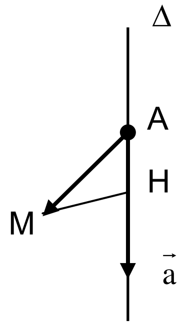
- (α) cắt d ⇔ $\vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0$($\vec{n}$ và $\vec{a}$ không vuông góc)
- (α) // d ⇔ $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$
- (α) chứa d ⇔ $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$



4. Khoảng cách :

a. Cho Δ qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ thì :

$$d(M, \Delta) = MH = \boxed{\frac{|[\vec{AM}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}}$$

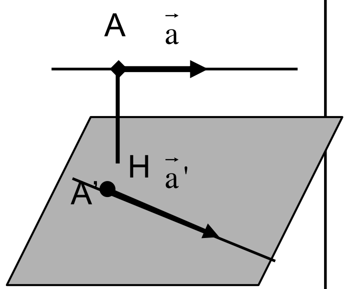


b. Cho Δ : $\begin{cases} \text{qua } A \\ \text{VTCP } \vec{a} \end{cases}$

Δ' : $\begin{cases} \text{qua} A' \\ \text{VTCP } \vec{a'} \end{cases}$

khoảng cách

$$d(\Delta, \Delta') = \boxed{\frac{|[\vec{a}, \vec{a'}].\vec{AA'}|}{|[\vec{a}, \vec{a'}]|}}$$



Chú ý : Nếu gọi α là mặt phẳng qua Δ' và song song với Δ thì :

$\boxed{d(\Delta, \Delta') = AH = d(A, \alpha)}$
với A là điểm bất kì của a.

Và nhiều điều khác nữa . . .

Hãy bước vào:

www.saosangsong.com.vn