Nguyễn Phú Khánh –Nguyễn Tất Thu

Để các em thuận tiện trong việc ôn luyện thi Đại học và Cao đẳng năm 2009 . Chúng tôi gởi tặng các em bài viết nhỏ mang tính tổng quát giải tích hàm số lớp 12 , cũng như một số ứng dụng độc đáo để giải quyết khá triệt để những dạng toán từng đề cập các lớp học dưới mà các em còn bỏ ngõ . Tài liệu được đề cập nhiều chủ đề chuyên đề phù hợp việc ôn luyện thi cấp tốc chuẩn bị kỳ thi Đại học tháng 7/2009 .

Trong quá trình biên soạn chắc hẳn còn nhiều chỗ thiếu sót khách quan, chúng tôi rất mong đóng góp quý báu của các bạn độc giả gần xa , thư góp ý gởi về email: phukhanh1009@gmail.com . Tài liệu này còn được lưu trữ tại hai website : http://www.mathsvn.violet.vn và http://www.maths.vn .

Bài 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa :

Giả sử K là một khoảng , một đoạn hoặc một nửa khoảng . Hàm số f xác định trên K được gọi là

- Đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$;
- Nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$.

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu :

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I

- Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'\left(x\right) \ge 0$ với mọi $x \in I$.
- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'\left(x\right) \le 0$ với mọi $x \in I$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu :

Định lý 1 : Định lý về giá trị trung bình của phép vi phân (Định lý Lagrange):
Nếu hàm số f liên tục trên $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm trên khoảng $\left(a;b\right)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in \left(a;b\right)$ sao cho $f\left(b\right) - f\left(a\right) = f'\left(c\right)\left(b-a\right)$.

Định lý 2 :
Giả sử I là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn , f là hàm số liên tục trên I và có đạo hàm tại mọi điểm trong của I (tức là điểm thuộc I nhưng không phải đầu mút của I) .Khi đó :

- Nếu $f'\left(x\right) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I ;
- Nếu $f'\left(x\right) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I ;
- Nếu $f'\left(x\right) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I .

Chú ý :

- Nếu hàm số f liên tục trên $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm $f'\left(x\right) > 0$ trên khoảng $\left(a;b\right)$ thì hàm số f đồng biến trên $\left[a;b\right]$.
- Nếu hàm số f liên tục trên $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm $f'\left(x\right) < 0$ trên khoảng $\left(a;b\right)$ thì hàm số f nghịch biến trên $\left[a;b\right]$.
- Ta có thể mở rộng định lí trên như sau :

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I . Nếu $f'(x) \ge 0$ với $\forall x \in I$
(hoặc $f'(x) \le 0$ với $\forall x \in I$) và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I .

1.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.

Dạng 1 : Xét chiều biến thiên của hàm số .

Xét chiều biến thiên của hàm số $y = f\left(x\right)$ ta thực hiện các bước sau:

- Tìm tập xác định D của hàm số .
- Tính đạo hàm $y' = f'\left(x\right)$.
- Tìm các giá trị của x thuộc D để $f'\left(x\right) = 0$ hoặc $f'\left(x\right)$ không xác định

(ta gọi đó là điểm tới hạn hàm số).

- Xét dấu $y' = f'\left(x\right)$ trên từng khoảng x thuộc D.
- Dựa vào bảng xét dấu và điều kiện đủ suy ra khoảng đơn điệu của hàm số.

Ví dụ 1 :Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 26$
2. $y = x^3 - 3x^2 + 2$
3. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Giải:

1. $y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 26$.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = -3x^2 - 6x + 24$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

$y' > 0, x \in \left(-4;2\right) \Rightarrow y$ đồng biến trên khoảng $\left(-4;2\right)$,

$y' > 0, x \in \left(-\infty;-4\right),\left(2;+\infty\right) \Rightarrow y$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-4\right),\left(2;+\infty\right)$.

Hoặc ta có thể trình bày :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = -3x^2 - 6x + 24$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-4;2\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-4\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

2. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Vậy hàm đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến $(0;2)$.

3. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 = 6x + 3 = 3(x+1)^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \neq -1$

Vì hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-1]$ và $[-1;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hoặc ta có thể trình bày :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

Vì hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-1]$ và $[-1;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2 :Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$
2. $y = x^4 + 2x^2 - 3$
3. $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$

Giải:

1. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^3 + 4x = -x(x^2 - 4)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy, hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right)$, $\left(0;2\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(-2;0\right),\left(2;+\infty\right)$.

2. $y = x^4 + 2x^2 - 3$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 4x = 4x\left(x^2 + 1\right)$

Vì $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$.

3. $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x-1)^2(x+2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$			

Vậy,hàm đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Nhận xét:

* Ta thấy tại $x = 1$ thì $y = 0$, nhưng qua đó y' không đổi dấu.

* Đối với hàm bậc bốn $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ luôn có ít nhất một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến. Do vậy với hàm bậc bốn

không thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3 :Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$
2. $y = \dfrac{x+2}{x-1}$
3. $y = \dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$
4. $y = \dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$

Giải:

1. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $\left(-\infty;-1\right) \cup \left(-1;+\infty\right)$.

Ta có: $y' = \dfrac{3}{\left(x+1\right)^2} > 0, \forall x \neq -1$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

2. $y = \dfrac{x+2}{x-1}$

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $\left(-\infty;1\right) \cup \left(1;+\infty\right)$.

Ta có: $y' = -\dfrac{3}{\left(x-1\right)^2} < 0, \forall x \neq 1$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

3. $y = \dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $\left(-\infty;-2\right) \cup \left(-2;+\infty\right)$.

Ta có: $y' = \dfrac{-x^2-4x+5}{\left(x+2\right)^2}, \forall x \neq -2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗		↘	$-\infty$

Vậy, hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-5;-2\right)$ và $\left(-2;1\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-5\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

4. $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;+\infty\right)$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+4x+5}{\left(x+2\right)^2}>0,\forall x\neq -2$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy , hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(-2;+\infty\right)$.

<u>Nhận xét:</u>

* Đối với hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a.c\neq 0)$ luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

* Đối với hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ luôn có ít nhất hai khoảng đơn điệu.

* Cả hai dạng hàm số trên không thể luôn đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 4 :Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y=|x^2-2x-3|$
2. $y=\sqrt{3x^2-x^3}$

Giải:

1. $y=|x^2-2x-3|$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\begin{cases}x^2-2x-3 & \text{khi } x\leq -1 \ \cup\ x\geq 3\\ -x^2+2x+3 & \text{khi } -1<x<3\end{cases}$

$\Rightarrow y'=\begin{cases}2x-2 & \text{khi } x<-1\cup x>3\\ -2x+2 & \text{khi } -1<x<3\end{cases}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=1$

Hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$ và $x=3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

2. $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$

Hàm số đã cho xác định trên nửa khoảng $(-\infty;3]$

Ta có: $y' = \dfrac{3(2x - x^2)}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}, \forall x < 3, x \neq 0$.

$\forall x < 3, x \neq 0:\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = 0, x = 3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$		
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$			

Hàm đồng biến trên khoảng $(0;2)$, nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;3)$.

> Ví dụ 5 :
> Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $f(x) = \sin x$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

Giải:

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(0;2\pi)$.

Ta có : $f'(x) = \cos x, x \in (0;2\pi)$.

$f'(x) = 0, x \in (0;2\pi) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{3\pi}{2}$

Chiều biến thiên của hàm số được nêu trong bảng sau :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

2. $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$

2. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$
2. $y = x^4 - 2x^2 - 5$
3. $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$
4. $y = \sqrt{2x - x^2}$

3. Chứng minh rằng hàm số:

1. $y = \sqrt{4 - x^2}$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;2\right]$.
2. $y = x^3 + x - \cos x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
3. $y = \cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

4. Cho hàm số $y = \sin^2 x + \cos x$.

$a)$ Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$và nghịch biết trên đoạn$\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

$b)$Chứng minh rằng với mọi $m \in \left(-1;1\right)$, phương trình $\sin^2 x + \cos x = m$có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[0;\pi\right]$.

Hướng dẫn

1.

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right) = x^2 - 6x + 8$

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 4$

Chiều biến thiên của hàm số được nêu trong bảng sau :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;2\right)$và $\left(4;+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(2;4\right)$

2. $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$

Hàm số đã cho xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x+2}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{\left(x-1\right)^2+1}{\left(x-1\right)^2}>0,x\neq 1$

Chiều biến thiên của hàm số được nêu trong bảng sau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$

2.

1\. $y=2x^3+3x^2+1$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right)=6x^2+6x$

$f'\left(x\right)>0,x\in\left(-\infty;-1\right),\left(0;+\infty\right)\Rightarrow f\left(x\right)$đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$.

$f'\left(x\right)<0,x\in\left(-1;0\right)\Rightarrow f\left(x\right)$nghịch biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$.

Ngoài ra : Học sinh có thể giải $f'\left(x\right)=0$, tìm ra hai nghiệm $x=-1,x=0$, kẻ bảng biến thiên rồi kết luận.

2\. $y=x^4-2x^2-5$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right)=4x^3-4x$

$f'\left(x\right)>0,x\in\left(-1;0\right),\left(1;+\infty\right)\Rightarrow f\left(x\right)$đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

$f'\left(x\right)<0,x\in\left(-\infty;-1\right),\left(0;1\right)\Rightarrow f\left(x\right)$nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$và $\left(0;1\right)$.

Ngoài ra : Học sinh có thể giải $f'\left(x\right)=0$, tìm ra hai nghiệm $x=-1,x=0,x=1$, kẻ bảng biến thiên rồi kết luận.

3\. $y=-\dfrac{4}{3}x^3+6x^2-9x-\dfrac{2}{3}$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right)=-4x^2+12x-9=-\left(2x-3\right)^2$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ và $f'\left(x\right)<0$ với mọi $x\neq\dfrac{3}{2}$

Vì hàm số nghịch biến trên mỗi nửa khoảng $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$và $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

4. $y = \sqrt{2x - x^2}$

Hàm số đã cho xác định trên $\left[0;2\right]$.

Ta có $f'\left(x\right) = \dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}, x \in \left(0;2\right)$

$f'\left(x\right) > 0, x \in \left(0;1\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$;

$f'\left(x\right) < 0, x \in \left(1;2\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Hoặc có thể trình bày :

$f'\left(x\right) > 0, x \in \left(0;1\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[0;1\right]$;

$f'\left(x\right) < 0, x \in \left(1;2\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ nghịch biến trên đoạn $\left[1;2\right]$.

3.

1. $y = \sqrt{4 - x^2}$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và có đạo hàm $f'\left(x\right) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} < 0$ với mọi $x \in \left(0;2\right)$. Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[0;2\right]$.

2. $y = x^3 + x - \cos x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right) = 3x^2 + 1 + \sin x$

Vì $\begin{cases} 3x^2 \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ 1 + \sin x \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ nên $f'\left(x\right) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

3. $y = \cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right) = -2\left(\sin 2x + 1\right) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hàm số nghịch biến trên mỗi đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; -\dfrac{\pi}{4} + \left(k+1\right)\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

4.

$a)$ Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ và nghịch biết trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$.

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[0;\pi\right]$ và $y' = \sin x\left(2\cos x - 1\right), x \in \left(0;\pi\right)$

Vì $x \in (0;\pi) \Rightarrow \sin x > 0$ nên trong khoảng $(0;\pi)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

- $y' > 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$
- $y' < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{3};\pi\right)$ nên hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

$b)$ Chứng minh rằng với mọi $m \in (-1;1)$, phương trình $\sin^2 x + \cos x = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[0;\pi]$.

- $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ ta có $y(0) \le y \le y\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 1 \le y \le \frac{5}{4}$ nên phương trình cho không có nghiệm $m \in (-1;1)$
- $x \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ ta có $y(\pi) \le y \le y\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow -1 \le y \le \frac{5}{4}$. Theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục

với $\forall m \in (-1;1) \subset \left(-1;\frac{5}{4}\right)$, tồn tại một số thực $c \in \left(\frac{\pi}{3};\pi\right)$ sao cho $y(c) = 0$. Số c là nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \cos x = m$ và vì hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ nên trên đoạn này , phương trình có nghiệm duy nhất .

Vậy phương trình cho có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[0;\pi]$.

Dạng 2 : Hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Sử dụng định lý về điều kiện cần

- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1 : Tìm m để hàm số sau luôn giảm (nghịch biến) trên $\mathbb{R}$

$y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m+1)x - 3m + 2$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = -x^2 + 4x + 2m + 1$ và có $\Delta' = 2m + 5$

Bảng xét dấu Δ'

m	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$	

- $m = -\frac{5}{2}$ thì $y' = -(x-2)^2 \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}, y' = 0$ chỉ tại điểm $x = 2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- $m < -\frac{5}{2}$ thì $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- $m > -\frac{5}{2}$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Trường hợp này không thỏa mãn .

Chú ý : cách giải sau đây không phù hợp ở điểm nào ?
Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' = -x^2 + 4x + 2m + 1 \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m + 5 \le 0 \Leftrightarrow m \le -\frac{5}{2}$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \le -\frac{5}{2}$

Ví dụ 2 : Tìm a để hàm số sau luôn tăng (đồng biến) trên $\mathbb{R}$
$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$.

Giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.
Ta có $y' = x^2 + 2ax + 4$ và có $\Delta' = a^2 - 4$
Bảng xét dấu Δ'

a	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Nếu $-2 < a < 2$ thì $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $a = 2$ thì $y' = (x+2)^2$, ta có : $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2, y' > 0, x \ne -2$. Hàm số y đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty; -2]$ và $[-2; +\infty)$ nên hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Tương tự nếu $a = -2$. Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $a < -2$ hoặc $a > 2$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Giả sử $x_1 < x_2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$,đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$. Do đó $a < -2$ hoặc $a > 2$ không thoả mãn yêu cầu bài toán .

Vậy hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-2 \le a \le 2$

Ví dụ 3 : Tìm m để hàm số $y = x + m\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.
Ta có $y' = 1 - m\sin x$.
Cách 1: Hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 1 - m\sin x \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m\sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

* $m = 0$ thì (1) luôn đúng

* $m > 0$ thì $(1) \Leftrightarrow \sin x \le \frac{1}{m}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{m} \Leftrightarrow 0 < m \le 1$.

* $m < 0$ thì $(1) \Leftrightarrow \sin x \ge \frac{1}{m}$ $\forall x \in R$ $\Leftrightarrow -1 \ge \frac{1}{m} \Leftrightarrow -1 \le m < 0$.

Vậy $-1 \le m \le 1$ là những giá trị cần tìm.

Cách 2: Hàm đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \min y' = \min\{1-m;1+m\} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m \geq 0 \\ 1+m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

Chú ý :

Phương pháp:

* Hàm số $y = f(x,m)$ tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underset{x\in\mathbb{R}}{min} \ y' \geq 0$.

* Hàm số $y = f(x,m)$ giảm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underset{x\in\mathbb{R}}{max} \ y' \leq 0$.

Chú ý:

1) *Nếu* $y' = ax^2 + bx + c$ *thì*

* $y' \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

* $y' \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

2) Hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì nó phải xác định trên $\mathbb{R}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm m để hàm số sau luôn giảm (nghịch biến) trên $\mathbb{R}$

$$y = f\left(x\right) = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 + \left(m-8\right)x + m^2 - 1.$$

2. Tìm m để hàm số sau luôn tăng (đồng biến) trên $\mathbb{R}$

$a.\ \ y = f\left(x\right) = \frac{1}{3}\left(m^2 - 1\right)x^3 + \left(m+1\right)x^2 + 3x + 5$

$b.\ \ y = f\left(x\right) = \dfrac{\left(m-1\right)x^2 + 2x + 1}{x+1}$

3. Với giá trị nào của m, các hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó ?

$a.\ \ y = x + 2 + \dfrac{m}{x-1}$

$b.\ \ y = \dfrac{-2x^2 + \left(m+2\right)x - 3m + 1}{x-1}$

Hướng dẫn :

1. $y = f\left(x\right) = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 + \left(m-8\right)x + m^2 - 1$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + m - 8$.

* $m = -2$, khi đó $y' = -10 \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. * $m \ne -2$ tam thức

$y' = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + m - 8$ có $\Delta' = 10(m+2)$

Bảng xét dấu Δ'

m	$-\infty$		-2		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$	

- $m < -2$ thì $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- $m > -2$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 $\left(x_1 < x_2\right)$. Hàm số đồng biến

trên khoảng $\left(x_1; x_2\right)$. Trường hợp này không thỏa mãn .

Vậy $m \le -2$ là những giá trị cần tìm.

2. Tìm m để hàm số sau luôn tăng (đồng biến) trên $\mathbb{R}$

$a.$ $y = f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}\left(a^2 - 1\right)x^3 + \left(a+1\right)x^2 + 3x + 5$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = \left(a^2 - 1\right)x^2 + 2\left(a+1\right)x + 3$ và có $\Delta' = 2\left(-a^2 + a + 2\right)$

Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\left(1\right)$

- Xét $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

+ $a = 1 \Rightarrow y' = 4x + 3 \Rightarrow y' \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{3}{4} \Rightarrow a = 1$ không thoả yêu cầu bài toán.

+ $a = -1 \Rightarrow y' = 3 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow a = -1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

- Xét $a^2 - 1 \ne 0 \Leftrightarrow a \ne \pm 1$

Bảng xét dấu Δ'

a	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
Δ'		$-$	0		$+$		0	$-$	

- Nếu $a < -1 \vee a > 2$ thì $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $a = 2$ thì $y' = 3\left(x+1\right)^2$, ta có : $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1, y' > 0, x \ne -1$. Hàm số y đồng biến trên mỗi nửa khoảng $\left(-\infty; -1\right]$ $va`$ $\left[-1; +\infty\right)$ nên hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $-1 < a < 2, a \ne 1$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Giả sử $x_1 < x_2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(x_1; x_2\right)$,đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; x_1\right)$ và $\left(x_2; +\infty\right)$. Do đó $-1 < a < 2, a \ne 1$ không thoả mãn yêu cầu bài toán .

Vậy hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < -1 \vee a \ge 2$.

$b.$ $y = f\left(x\right) = \dfrac{\left(m-1\right)x^2 + 2x + 1}{x+1}$

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{\left(m-1\right)x^2 + 2\left(m-1\right)x + 1}{\left(x+1\right)^2} = \dfrac{g\left(x\right)}{\left(x+1\right)^2}$,

Với $g\left(x\right) = \left(m-1\right)x^2 + 2\left(m-1\right)x + 1, x \ne -1$

Dấu của y' là dấu của $g\left(x\right)$.

Hàm số y đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $g\left(x\right)\ge 0,\forall x\ne -1$ $\left(1\right)$

- Xét $m-1=0\Leftrightarrow m=1\Rightarrow g\left(x\right)=1>0,\forall x\ne -1\Rightarrow m=1$ $\left(a\right)$ thoả mãn yêu cầu bài toán .
- Xét $m-1\ne 0\Leftrightarrow m\ne 1$

Tương tự trên $1<m\le 2$ $\left(b\right)$ thỏa yêu cầu bài toán .

Từ $\left(a\right)$ và $\left(b\right)$ suy ra $1\le m\le 2$ thì hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

3.

$a.\ y=x+2+\dfrac{m}{x-1}$

$a)y=x+2+\dfrac{m}{x-1}\Rightarrow y'=1-\dfrac{m}{\left(x-1\right)^2},x\ne 1$

- $m\le 0$ thì $y'>0;\forall x\ne 1$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.
- $m>0$ thì $y'=1-\dfrac{m}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{\left(x-1\right)^2-m}{\left(x-1\right)^2},x\ne 1$ và $y'=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{m}$. Lập bảng biến thiên ta thấy

hàm số nghịch biến
trên mỗi khoảng $\left(1-\sqrt{m};1\right)$ và $\left(1;1+\sqrt{m}\right)$; do đó không thoả điều kiện .

Vậy :hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $m\le 0$

Chú ý : Bài toán trên được mở rộng như sau

$a_1)$ Tìm giá trị của m để hàm số đồng biến $\left(-\infty;-1\right)$

$a_2)$ Tìm giá trị của m để hàm số đồng biến $\left(2;+\infty\right)$

$a_3)$ Tìm giá trị của m để hàm số nghịch biến trong khoảng có độ dài bằng 2.

$a_4)$ Tìm giá trị của m để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(0;1\right)$ và $\left(1;2\right)$.

$a_5)$ Gọi $x_1<x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\left(x-1\right)^2-m=0$. Tìm m để :

$a_{5.1})\ x_1=2x_2$

$a_{5.2})\ x_1<3x_2$

$a_{5.3})\ x_1+3x_2<m+5$

$a_{5.4})\ x_1-5x_2\ge m-12$

$b.\ y=\dfrac{-2x^2+\left(m+2\right)x-3m+1}{x-1}=-2x+m+\dfrac{1-2m}{x-1}$

$\Rightarrow y'=-2+\dfrac{2m-1}{\left(x-1\right)^2}$

- $m\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow y'<0,x\ne 1$, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;1\right)$ $va`\left(1;+\infty\right)$

- $m > \frac{1}{2}$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(x_1;1\right)$ và $\left(1;x_2\right)$, trường hợp này không thỏa .

Dạng 3 : Hàm số đơn điệu trên tập con của $\mathbb{R}$.

Phương pháp:

* Hàm số $y = f(x,m)$ tăng $\forall x \in I \Leftrightarrow y' \geq 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow \min\limits_{x\in I} \ y' \geq 0$.

* Hàm số $y = f(x,m)$ giảm $\forall x \in I \Leftrightarrow y' \leq 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow \max\limits_{x\in I} y' \leq 0$.

Ví dụ 1 : Tìm m để các hàm số sau

1. $y = f\left(x\right) = \dfrac{mx+4}{x+m}$ luôn nghịch biến khoảng $\left(-\infty;1\right)$.
2. $y = x^3 + 3x^2 + \left(m+1\right)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

Giải :

1. $y = f\left(x\right) = \dfrac{mx+4}{x+m}$ luôn nghịch biến khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-m\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{\left(x+m\right)^2}, x \neq -m$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in \left(-\infty;1\right) \\ -m \notin \left(-\infty;1\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \notin \left(-\infty;1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$

Vậy : với $-2 < m \leq -1$ thì thoả yêu cầu bài toán .

2. $y = x^3 + 3x^2 + \left(m+1\right)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $f'\left(x\right) = 3x^2 + 6x + m + 1$

Cách 1 :

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$ khi và chỉ khi $f'\left(x\right) \leq 0, \forall x \in \left(-1;1\right)$ hay

$m \leq -\left(3x^2 + 6x + 1\right), \forall x \in \left(-1;1\right) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{x\in\left(-1;1\right)} g\left(x\right) \quad \left(1\right)$.

Xét hàm số $g\left(x\right) = -\left(3x^2 + 6x + 1\right), \forall x \in \left(-1;1\right)$

$\Rightarrow g'\left(x\right) = -6x - 6 < 0, \forall x \in \left(-1;1\right) \Rightarrow g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$ và

$\lim\limits_{x\to -1^+} g\left(x\right) = -2, \lim\limits_{x\to 1^-} g\left(x\right) = -10$

Bảng biến thiên.

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	-2	$\searrow$	-10

Vậy $m \le -10$ thoả yêu cầu bài toán .

Cách 2 :

$f''(x) = 6x + 6$

Nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ là $x = -1 < 1$. Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $m \le \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -10$.

Vậy $m \le -10$ thoả yêu cầu bài toán .

Ví dụ 2 : Tìm m để các hàm số sau

1. $y = f(x) = 2x^3 - 2x^2 - mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
2. $y = f(x) = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$.
3. $y = f(x) = \dfrac{1}{3}mx^3 + 2(m-1)x^2 + (m-1)x + m$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Giải :

1. $y = f(x) = 2x^3 - 2x^2 - mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Hàm số đã cho xác định trên $(1;+\infty)$.

Ta có : $y' = 6x^2 - 4x + m$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow g(x) = 6x^2 - 4x \ge -m, x > 1$.

Xét hàm số $g(x) = 6x^2 - 4x$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có

$g'(x) = 12x - 4 > 0, \forall x > 1 \Leftrightarrow g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

và $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (6x^2 - 4x) = 2, \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Bảng biến thiên.

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$+\infty$

2

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $2 \ge -m \Leftrightarrow m \ge -2$

2. $y = f\left(x\right) = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên khoảng $\left(-3;0\right)$.

Hàm số đã cho xác định trên $\left(-3;0\right)$.

Ta có : $y' = 3mx^2 - 2x + 3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-3;0\right)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in \left(-3;0\right)$

Hay $3mx^2 - 2x + 3 \ge 0, \forall x \in \left(-3;0\right) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{2x+3}{3x^2}, \forall x \in \left(-3;0\right)$

Xét hàm số $g\left(x\right) = \dfrac{2x+3}{3x^2}$ liên tục trên khoảng $\left(-3;0\right)$, ta có

$g'\left(x\right) = \dfrac{-6x^2 + 18x}{9x^4} < 0, \forall x \in \left(-3;0\right) \Rightarrow g\left(x\right)$ nghịch biến trên

khoảng $\left(-3;0\right)$ và $\lim\limits_{x \to -3^+} g\left(x\right) = -\dfrac{1}{9}, \lim\limits_{x \to 0^-} g\left(x\right) = -\infty$

Bảng biến thiên.

x	-3		0
$g'\left(x\right)$		$-$	
$g\left(x\right)$		$-\dfrac{1}{9} \searrow -\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \ge -\dfrac{1}{9}$

3. $y = f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}mx^3 + 2\left(m-1\right)x^2 + \left(m-1\right)x + m$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Hàm số đã cho xác định trên $\left(2;+\infty\right)$.

Ta có : $y' = mx^2 + 4\left(m-1\right)x + m - 1$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$y' \ge 0, \forall x \in \left(2;+\infty\right) \Leftrightarrow mx^2 + 4\left(m-1\right)x + m - 1 \ge 0, \forall x \in \left(2;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + 4x + 1\right)m \ge 4x + 1, \forall x \in \left(2;+\infty\right) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{4x+1}{x^2+4x+1}, \forall x \in \left(2;+\infty\right)$

Xét hàm số $g\left(x\right) = \dfrac{4x+1}{x^2+4x+1}, x \in \left(2;+\infty\right)$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-2x(2x+1)}{(x^2+4x+1)^2} < 0, \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow g(x)$$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \frac{9}{13}, \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$$

Bảng biến thiên.

x	2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{9}{13}$	$\searrow$	0

Vậy $m \geq \frac{9}{13}$ thoả yêu cầu bài toán .

Ví dụ 3 : Tìm tất cả các tham số m để hàm số
$y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1?.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = 3x^2 + 6x + m$ có $\Delta' = 9 - 3m$

- Nếu $m \geq 3$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $m \geq 3$ không thoả yêu cầu bài toán .
- Nếu $m < 3$, khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$ và hàm số nghịch biến trong đoạn$[x_1; x_2]$ với độ dài $l = x_2 - x_1$

Theo Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = -2, x_1x_2 = \frac{m}{3}$

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng $1 \Leftrightarrow l = 1$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{3}m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$$

Câu hỏi nhỏ : Tìm tất cả các tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 .

Có hay không yêu cầu bài toán thoả : $l = x_2 - x_1 \geq 1$?.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.Tìm điều kiện của tham số m sao cho hàm số :

$a.\quad y = x^3 - mx^2 - (2m^2 - 7m + 7)x + 2(m-1)(2m-3)$ đồng biến

trên khoảng $(2;+\infty)$.

$b.\quad y=\dfrac{mx^2+\left(m+1\right)x-1}{2x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

2. Tìm m để hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+m(2m-1)$ đồng biến trên$\left[2;+\infty\right)$.

3. Định m để hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

4. Định m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+1$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn :

1

$a.$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y'=3x^2-2mx-\left(2m^2-7m+7\right)=g\left(x\right)$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\left(2;+\infty\right)$

Xét hàm số $g\left(x\right)=3x^2-2mx-\left(2m^2-7m+7\right)$ trên khoảng $x\in\left(2;+\infty\right)$ và $g'\left(x\right)=6x-2m$

Cách 1:

Hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $g\left(2\right)\ge 0\Leftrightarrow 3.2^2-2m.2-\left(2m^2-7m+7\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow -2m^2+3m+5\ge 0\Leftrightarrow -1\le m\le\dfrac{5}{2}$

Với cách giải này học sinh nên dùng cho bài trắc nghiệm, góc độ bài toán tự luận thiếu đi tính chuẩn xác và trong sáng của bài toán .

Cách 2 :

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{m}{3}$

- Nếu $\dfrac{m}{3}\le 2\Leftrightarrow m\le 6$, khi đó $g\left(x\right)\ge 0,x\in\left(2;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \min\limits_{x\in\left(2;+\infty\right)} g\left(x\right)\ge 0\Leftrightarrow -2m^2+3m+5\ge 0\Leftrightarrow -1\le m\le\dfrac{5}{2}$

- Nếu $\dfrac{m}{3}>2\Leftrightarrow m>6$, khả năng này không thể xảy ra (vì sao ?).

$b.$

Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

- Nếu $m=0$, ta có $y=\dfrac{x-1}{2x}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2x^2}>0,\forall x\ne 0$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$, do đó cũng đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$

Vậy $m=0$ $\left(a\right)$ thoả mãn yêu cầu bài toán .

- Nếu $m\neq 0$, ta có $y'=\dfrac{2mx^2-2m^2x-m^2-m+2}{\left(2x-m\right)^2}=\dfrac{g\left(x\right)}{\left(2x-m\right)^2}$,

$g\left(x\right)=2mx^2-2m^2x-m^2-m+2$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2m>0\\ \dfrac{m}{2}\notin\left(1;+\infty\right)\\ g\left(1\right)=-3m^2+m+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m\leq 2\\ -\dfrac{2}{3}\leq m\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq 1\ \left(b\right)$$

Từ $\left(a\right)$ và $\left(b\right)$ suy ra $0\leq m\leq 1$ thì thoả mãn yêu cầu bài toán .

2. Ta có $y'=3x^2-2(m+1)x-(2m^2-3m+2)$, hàm đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$. $\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\left[2;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow f(x)=3x^2-2(m+1)x-(2m^2-3m+2)\geq 0,\quad \forall x\in[2;+\infty)$

Vì tam thức $f(x)$ có

$\Delta'=(m+1)^2+3(2m^2-3m+2)=7m^2-7m+7>0\ \forall m\ \in\mathbb{R}$ nên $f(x)$

có hai nghiệm: $x_1=\dfrac{m+1-\sqrt{\Delta'}}{3};x_2=\dfrac{m+1+\sqrt{\Delta'}}{3}$.

Vì $x_1<x_2$ nên $f(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq x_1\\ x\geq x_2\end{array}\right.$.

Do đó $f(x)\geq 0\ \forall x\in[2;+\infty)\Leftrightarrow x_2\leq 2\Leftrightarrow\sqrt{\Delta'}\leq 5-m$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 5\\ \Delta'\leq(5-m)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 5\\ 2m^2+m-6\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq m\leq\frac{3}{2}.$$

3. Ta có $y'=\dfrac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2}$ nên để hàm nghịch biến trên $[1;+\infty)$

$\Leftrightarrow f(x)=mx^2+4mx+14\leq 0\quad\forall x\in[1;+\infty)\ \left(*\right)$.

Cách 1: Dùng tam thức bậc hai

- Nếu $m=0$ khi đó $\left(*\right)$ không thỏa mãn.
- Nếu $m\neq 0$. Khi đó $f(x)$ có $\Delta=4m^2-14m$

Bảng xét dấu Δ

m	$-\infty$		0		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Nếu $0<m<\dfrac{7}{2}$ thì $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, nếu $f(x)$ có hai nghiệm x_1,x_2

thì $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$ nên $(*)$ không thỏa mãn.

- Nếu $m < 0$ hoặc $m > \frac{7}{2}$. Khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm

$x_1 \frac{-2m + \sqrt{4m^2 - 14m}}{m}; x_2 = \frac{-2m - \sqrt{4m^2 - 14m}}{m}$

Vì $m < 0$ hoặc $m > \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le x_1 \\ x \ge x_2 \end{array}\right.$

Do đó $f(x) \le 0 \ \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow x_2 \le 1 \Leftrightarrow -3m \ge \sqrt{4m^2 - 14m}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 5m^2 + 14m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -\frac{14}{5}$.

Cách 2: $(*) \Leftrightarrow m \le \frac{-14}{x^2 + 4x} = g(x) \quad \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{x \ge 1} g(x)$

Ta có $\min\limits_{x \ge 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{5} \Rightarrow m \le -\frac{14}{5}$.

4. Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$, $\forall x \in (2; +\infty)$.

Cách 1.

- Nếu $m = 0$ khi đó $y' = 2x - 6$ và $y' \ge 0$ chỉ đúng với mọi $x \ge 3$.
- Nếu $m \ne 0$ khi đó $\Delta' = -2m^2 + 4m + 1$

Tương tự trên , ta tìm được $m \ge \frac{2}{3}$

Cách 2: Hàm đồng biến trên $\forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0 \quad \forall x \in (2; +\infty)$

$\Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \ge 0 \ \forall x \in (2; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \ge \frac{6 - 2x}{x^2 - 2x + 3} = g(x) \ \forall x \in (2; +\infty)$.

Xét hàm số $g(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$

Ta có : $g'(x) = \frac{2(x^2 - 6x + 3)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \ \forall x \in [2; +\infty)$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{6} \quad (vi\grave{} \ x \ge 2)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Lập bảng biến thiên ta có $\max\limits_{x \ge 2} g(x) = g(2) = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow m \ge g(x) \ \forall x \in [2; +\infty) \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{x \ge 2} g(x) = \frac{2}{3}$.

Dạng 4 : Sử dụng tính đơn điệu của hàm số CM bất đẳng thức.

- Đưa bất đẳng thức về dạng $f\left(x\right) \ge M, x \in \left(a;b\right)$.
- Xét hàm số $y = f\left(x\right), x \in \left(a;b\right)$.
- Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $\left(a;b\right)$.
- Dựa vào bảng biến thiên và kết luận.

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng : $\sin x + \tan x > 2x \ ,\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Giải :

Xét hàm số $f\left(x\right) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có : $f'\left(x\right) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ và $f\left(x\right) > f\left(0\right), \quad \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

hay $\sin x + \tan x > 2x \ ,\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng

1. $\sin x \le x \quad , \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2. $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} \quad ,\forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$

3. $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ , \forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$

4. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x \quad , \forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$.

Giải :

1. $\sin x \le x \quad , \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - x$ liên tục trên đoạn $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Ta có: $f'(x) = \cos x - 1 \le 0 \ ,\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra $f(x) \le f(0) = 0 \Leftrightarrow \sin x \le x \ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (đpcm).

2. $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} \quad ,\forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ liên tục trên nửa khoảng $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f''(x) = -\sin x + x \ge 0 \ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ (theo câu 1)

$\Rightarrow f'(x) \ge f'(0) = 0 \ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) \ge f(0) = 0 \ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{3!}$, $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

3. $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $\forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$

Xét hàm số $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ liên tục trên nửa khoảng $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $g'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6} \le 0 \ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ (theo câu 2)$\Rightarrow g(x) \le g(0) = 0 \ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$(Đpcm).

4. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$, $\forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$.

Theo kết quả câu 2, ta có: $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6} \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{24}(1 - \frac{x^2}{9})$$

Vì $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{9} > 0 \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Mặt khác, theo câu 3: $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} > \cos x$,$\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$,$\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$(đpcm).

Nhận xét: Ta có $0 < \sin x < x \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$ nên

$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \ge \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3} \quad \forall \alpha \le 3$. Do đó, ta có kết quả sau

Chứng minh rằng: với $\forall \alpha \le 3$, ta luôn có: $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \ge \cos x \quad \forall x \in (0;\dfrac{\pi}{2})$.

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sin^2 x} < \dfrac{1}{x^2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$, $\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải :

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ liên tục trên nửa khoảng $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2(-x^3\cos x + \sin^3 x)}{x^3 \sin^3 x}$.

Theo kết quả câu 4 - ví dụ 2 , ta có: $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3} > \cos x$,$\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow -x^3\cos x + \sin^3 x > 0$,$\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(x) > 0$,$\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x) \le f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$, $\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Do vậy: $\dfrac{1}{\sin^2 x} < \dfrac{1}{x^2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$, $\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

Ví dụ 4 : Với $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $2^{2.\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3}{2}x+1}$

Giải :

Ta có: $2^{2.\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2.\sqrt{2^{2\sin x}.2^{\tan x}} = 2.2^{\sin x + \frac{1}{2}\tan x}$

Ta chứng minh: $2^{\sin x + \frac{1}{2}\tan x} \ge 2^{\frac{3x}{2}} \Leftrightarrow \sin x + \dfrac{1}{2}\tan x \ge \dfrac{3}{2}x \quad \forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = \sin x + \dfrac{1}{2}\tan x - \dfrac{3x}{2}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right) = \cos x + \dfrac{1}{2.\cos^2 x} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{2\cos^2 x}$

$= \dfrac{(\cos x - 1)^2(2\cos x + 1)}{2\cos^2 x} \ge 0$, $\forall x \in [0;\dfrac{\pi}{2})$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;\dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x) \ge f(0) = 0 \Rightarrow \sin x + \dfrac{1}{2}\tan x \ge \dfrac{3}{2}x, \forall x \in [0;\dfrac{\pi}{2})$ (đpcm).

Ví dụ 5 : Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số tự nhiên $n > 1$

$$\sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < 2$$

Giải :

Đặt $x = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n} \in \left(0;1\right), \forall n \in N^*$.

Bất đẳng thức cần chứng minh là: $\sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x} < 2, \forall x \in \left(0;1\right)$

Xét hàm $f\left(x\right) = \sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x},\ x \in [0;1)$

$$\Rightarrow f'\left(x\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+x\right)^{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1-x\right)^{n-1}}}\right) < 0, \forall x \in \left(0;1\right)$$

Vậy $f\left(x\right)$ giảm trên $\left(0;1\right)$ nên $f\left(x\right) < f\left(0\right) = 2, \forall x \in \left(0;1\right)$.

Ví dụ 6:

1. Cho $x \ge y \ge z \ge 0$ .Chứng minh rằng : $\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x} \ge \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$
2. Cho $x, y, z > 0$ .Chứng minh rằng:

$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \ge xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + zx(z^2+x^2)$

Giải :

1 Cho $x \ge y \ge z \ge 0$ .Chứng minh rằng : $\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x} \ge \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$

$x \ge y \ge z \ge 0$

Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}\right)$.

Ta có: $f'(x) = (\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{y}) - (\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{x^2}) = (y-z)(\dfrac{1}{yz} - \dfrac{1}{x^2}) \ge 0, \forall x \ge 0$

$\Rightarrow f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến $\forall x \ge 0$ $\Rightarrow f(x) \ge f(y) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

2. Cho $x, y, z > 0$ Chứng minh rằng:

$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \ge xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + zx(z^2+x^2)$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $x \ge y \ge z > 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) - xy(x^2+y^2) - yz(y^2+z^2) - zx(z^2+x^2)$ Ta có

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2(y+z) + xyz + yz(x+y+z) - (y^3+z^3)$

$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6x(y+z) + 2yz$

$\Rightarrow f''(x) > 0$ (do $x \geq y \geq z$) $\Rightarrow f'(x) \geq f'(y) = z^2y - z^3 = z^2(y-z) \geq 0$ nên $f(x)$ là hàm số đồng biến. $\Rightarrow f(x) \geq f(y) = z^4 - 2z^3y + y^2z^2 = z^2(z-y)^2 \geq 0 \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 7:

1. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} \geq \dfrac{3}{2}$.
2. Cho $0 < a \leq b \leq c$. Chứng minh rằng:
$\dfrac{2a}{b+c} + \dfrac{2b}{c+a} + \dfrac{2c}{a+b} \leq 3 + \dfrac{(c-a)^2}{a(c+a)}$.

Giải :

1. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} \geq \dfrac{3}{2}$

Đặt $x = \dfrac{b}{a}, y = \dfrac{c}{b}, z = \dfrac{a}{c} \Rightarrow xyz = 1$ và bất đẳng thức đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geq \dfrac{3}{2}$.

Giả sử $z \leq 1 \Rightarrow xy \geq 1$ nên có: $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} \geq \dfrac{2}{1+\sqrt{xy}} = \dfrac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} + \frac{1}{1+z} = \frac{2t}{1+t} + \frac{1}{1+t^2} = f(t) \text{ với } t = \sqrt{z} \leq 1$$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{2}{(1+t)^2} - \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} \leq \dfrac{2(1-t)}{(1+t^2)^2} \leq 0$

$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = \dfrac{3}{2}$, $\forall t \leq 1 \Rightarrow$ đpcm.

2. Cho $0 < a \leq b \leq c$. Chứng minh rằng: $\dfrac{2a}{b+c} + \dfrac{2b}{c+a} + \dfrac{2c}{a+b} \leq 3 + \dfrac{(c-a)^2}{a(c+a)}$

Đặt $\dfrac{b}{a} = \alpha, \dfrac{c}{a} = x, 1 \leq \alpha \leq x$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2}{\alpha+x} + \frac{2\alpha}{1+x} + \frac{2x}{1+\alpha} \leq \frac{x^2+x+4}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geq (2\frac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \frac{2x(x+1)}{1+\alpha})$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x + 1 - (2\dfrac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \dfrac{2x(x+1)}{1+\alpha}), \quad 1 \leq \alpha \leq x$

Ta có: $f'(x) = 2x + 1 - \dfrac{2(2x+1)}{\alpha+1} - 2\dfrac{\alpha-1}{(x+\alpha)^2}$

$$f'(x) = (\alpha - 1)\left[\frac{2x+1}{\alpha+1} - \frac{2}{(x+\alpha)^2}\right] \geq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq x$$

Như vậy hàm $f(x)$ là đồng biến do đó $f(x) \geq f(\alpha) = \alpha^2 - 3\alpha + 3 - \dfrac{1}{\alpha}$

Nhưng $f'(\alpha) = 2\alpha - 3 + \dfrac{1}{\alpha^2} = \alpha + \alpha + \dfrac{1}{\alpha^2} - 3 \geq 3\sqrt[3]{\alpha.\alpha.\dfrac{1}{\alpha^2}} - 3 = 0$

$\Rightarrow f(x) \geq f(\alpha) \geq f(1) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $f\left(x\right) = 2\sin x + \tan x - 3x$

$a)$ Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$b)$ Chứng minh rằng $2\sin x + \tan x > 3x$ với mọi $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2.

$a)$ Chứng minh rằng $\tan x > x$ với mọi $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$b)$ Chứng minh rằng $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$ với mọi $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Cho hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{4}{\pi}x - \tan x$ với mọi $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

$a)$ Xét chiều biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

$b)$ Từ đó suy ra rằng $\dfrac{4}{\pi}x \geq \tan x$ với mọi $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

4. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau :

$a)$ $\sin x < x$ với mọi $x > 0$, $\sin x > x$ với mọi $x < 0$

$b)$ $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ với mọi $x \neq 0$

$c)$ $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ với mọi $x > 0$, $\sin x < x - \dfrac{x^3}{6}$ với mọi $x < 0$

$d)$ $\sin x + \tan x > 2x$ với mọi $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

5. Chứng minh rằng

$a.$ $e^x \geq 1 + x$, $\forall x$

$b.\ e^x \ge 1 + x + \dfrac{x^2}{2}, \forall x \ge 0$

6. Chứng minh rằng $\ln(1+x) \ge x - \dfrac{1}{2}x^2 \quad \forall x \ge 0$.

7. Tìm số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng với $\forall x \ge 0$ $\ln(1+x) \ge x - ax^2$.

8. Tìm tất cả các giá trị của a để : $a^x \ge 1 + x \quad \forall x \ge 0$.

9. Cho $a \ge b > 0$. Chứng minh rằng : $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^b \le \left(2^b + \dfrac{1}{2^b}\right)^a$.

10. Chứng minh : $\left(2^x + 3^x\right)^y < \left(2^y + 3^y\right)^x$, $x > y > 0$.

11. Cho $x, a, b > 0, a \ne b$. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+b} > \left(\dfrac{a}{b}\right)^b$

12. Chứng minh rằng : $x > \ln\left(1+x\right), \forall x > 0$

13. Chứng minh rằng với $x \in (4\,; +\infty)$, ta luôn có $2^x > x^2$

14. Tìm các cặp số nguyên $\left(x; y\right)$ thỏa mãn $(x-y)^{x+y} = (x+y)^{x-y}$

Hướng dẫn :

1.

$a)$ Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên nữa khoảng $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Hàm số $f\left(x\right) = 2\sin x + \tan x - 3x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$$f'\left(x\right) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x + 1 - 3\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'\left(x\right) = \frac{\left(1-\cos x\right)^2\left(2\cos x + 1\right)}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Do đó hàm số $f\left(x\right) = 2\sin x + \tan x - 3x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$b)$Chứng minh rằng $2\sin x + \tan x > 3x$ với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Hàm số $f\left(x\right) = 2\sin x + \tan x - 3x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $f\left(x\right) \ge f\left(0\right) = 0, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

do đó $2\sin x + \tan x - 3x > 0$ mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ hay $2\sin x + \tan x > 3x$ với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

2.

$a)$ Chứng minh rằng hàm số $f\left(x\right) = \tan x - x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số $f\left(x\right) = \tan x - x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$f'\left(x\right) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $f\left(x\right) = \tan x - x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $f\left(x\right) > f\left(0\right) = 0, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hay $\tan x > x$.

$b)$ Chứng minh rằng $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$ với mọi $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số $g\left(x\right) = \tan x - x - \dfrac{x^3}{3}$ trên nửa khoảng $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số $g\left(x\right) = \tan x - x - \dfrac{x^3}{3}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$g'\left(x\right) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$

$g'\left(x\right) = \left(\tan x - x\right)\left(\tan x + x\right) > 0, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ câu $a)$

Do đó hàm số $g\left(x\right) = \tan x - x - \dfrac{x^3}{3}$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $g\left(x\right) > g\left(0\right) = 0, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hay $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$ với mọi $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.

$a)$ Xét chiều biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{4}{\pi}x - \tan x$ liên trục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ và có đạo hàm

$f'\left(x\right) = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4-\pi}{\pi} - \tan^2 x, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$

Vì $0 < \sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}} < 1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$ nên tồn tại một số duy nhất $c \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ sao cho $\tan c = \sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$

- $f'\left(x\right) > 0, x \in \left(0;c\right) \Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $x \in \left[0;c\right]$
- $f'\left(x\right) < 0, x \in \left(c;\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên đoạn $x \in \left[c;\dfrac{\pi}{4}\right]$

$b)$ Dễ thấy $0 \le f(x) \le f(c); \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \frac{4}{\pi}x - \tan x \ge 0$ *hay* $\frac{4}{\pi}x \ge \tan x$ với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

4.

$a)$ $\sin x < x$ với mọi $x > 0$.

Hàm số $f(x) = x - \sin x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$f'(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và ta có

$f(x) > f(0) = 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tức là $x - \sin x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *hay* $x > \sin x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$b)$ $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \ne 0$

Hàm số $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0; +\infty\right)$ và có đạo hàm $f'(x) = x - \sin x > 0$ với mọi $x > 0$ (theo câu a).

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; +\infty\right)$ và ta có $f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0$, tức là

$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0, \forall x > 0$

Với mọi $x < 0$, ta có $\cos(-x) - 1 + \frac{(-x)^2}{2} > 0, \forall x < 0$ *hay* $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0, \forall x < 0$

Vậy $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \ne 0$

$c)$ Hàm số $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$. Theo câu b thì $f'(x) < 0, \forall x \ne 0$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Và

$$\begin{cases} f(x) > f(0) & khi \quad x < 0 \\ f(x) < f(0) & khi \quad x > 0 \end{cases}$$

$d)$ $\sin x + \tan x > 2x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên nửa

khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và ta có $f(x) > f(0) = 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

5. $a.$ $e^x \ge 1 + x$, $\forall x$

Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(x) \ge f(0) = 0\ \forall x$.

$b.\ e^x \ge 1 + x + \dfrac{x^2}{2}, \forall x \ge 0$

Xét hàm số $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$

Ta có: $f'(x) = e^x - 1 - x \ge 0\ \forall x$ (theo kết quả câu 1) $\Rightarrow f(x) \ge f(0) = 0\quad \forall x \ge 0$ đpcm.

6.

Xét hàm số $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{1}{2}x^2$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{x+1} \ge 0,\ \forall x \ge 0$

$\Rightarrow f(x) \ge f(0) = 0\quad \forall x \ge 0 \Rightarrow (1)$ đúng.

7. Tìm số thực a nhỏ nhất để BĐT sau đúng với $\forall x \ge 0\ \ln(1+x) \ge x - ax^2$ (2).

Giả sử (1) đúng với $\forall x \ge 0 \Rightarrow (2)$ đúng với $\forall x > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \ge -a\quad \forall x > 0$ (3).

Cho $x \to 0^+$, ta có: $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \ge -a \Leftrightarrow a \ge \dfrac{1}{2}$.

Khi đó: $x - \dfrac{1}{2}x^2 \ge x - ax^2\quad \forall x \ge 0$.

Mà theo chứng minh ở câu 1 thì: $\ln(1+x) \ge x - \dfrac{1}{2}x^2\quad \forall x \ge 0$,

suy ra $\ln(1+x) \ge x - ax^2\quad \forall x \ge 0$.

Vậy $a = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

8.

Xét hàm số : $f(x) = a^x - x - 1 \ge 0$ với $x \ge 0$ (*).

Ta có: $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và có $f'(x) = a^x \ln a - 1$.

- Nếu $0 < a \le 1 \Rightarrow \ln a < 0 \Rightarrow f'(x) < 0\quad \forall x \ge 0 \Rightarrow f\left(x\right)$ nghịch biến. $\Rightarrow f(x) \le f(0) = 0\quad \forall x \ge 0 \Rightarrow$ mâu thuẫn với (*).

$\Rightarrow a < 1$ không thỏa yêu cầu bài toán.

- Nếu $a \ge e \Rightarrow a^x \ln a - 1 \ge e^x - 1 \ge 0\ \forall x \ge 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow f(x) \ge f(0) = 0\ \forall x \ge 0 \Rightarrow a \ge e$ thỏa yêu cầu bài toán.
- $1 < a < e$, khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -\log_a(\ln a) > 0$ và $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0, dẫn đến $\min\limits_{x\ge0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow f(x) \ge 0\ \forall x \ge 0 \Leftrightarrow f(x_0) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln a} + \log_a(\ln a) - 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{\ln(\ln a)}{\ln a}-1\ge 0 \;\Leftrightarrow 1+\ln(\ln a)-\ln a\ge 0$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{e\ln a}{a}\ge 0\Leftrightarrow e\ln a\ge a\Leftrightarrow e\ln a-a\ge 0$ (**).

Xét hàm số $g(a)=e\ln a-a$ với $1<a<e$, ta có:

$g'(a)=\dfrac{e}{a}-1>0\ \forall a\in(1;e)\Rightarrow g(a)<g(e)=0\ \forall a\in(1;e)$ mâu thuẫn với (**) $\Rightarrow 1<a<e$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $a\ge e$.

9. Ta có:

$\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^b\le\left(2^b+\dfrac{1}{2^b}\right)^a\Leftrightarrow\left(4^a+1\right)^b\le\left(4^b+1\right)^a$

$\Leftrightarrow b\ln\left(4^a+1\right)\le a\ln\left(4^b+1\right)\Leftrightarrow\dfrac{\ln\left(4^a+1\right)}{a}\le\dfrac{\ln\left(4^b+1\right)}{b}\quad(1)$

Xét hàm số : $f\left(t\right)=\dfrac{\ln\left(4^t+1\right)}{t},\ t\in\left(0;+\infty\right)\Rightarrow(1)\Leftrightarrow f(a)\le f(b)$ (2)

Ta có : $f'\left(t\right)=\dfrac{4^t\ln 4^t-\left(4^t+1\right)\ln\left(4^t+1\right)}{t^2\left(4^t+1\right)}<0,\forall t>0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Mà $a\ge b>0\Rightarrow(2)$ đúng nên bất đẳng thức được chứng minh

Nghiên cứu kỹ hơn về dạng toán này ở chuyên đề ***“ Mũ – Logarit”***

12. Chứng minh rằng : $x>\ln\left(1+x\right),\forall x>0$

Hàm số $f\left(x\right)=x-\ln\left(1+x\right)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$ và có đạo hàm

$f'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x+1}>0$ với mọi $x>0$. Do đó hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$, hơn nữa $f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$ với mọi $x>0$

Hay $x>\ln\left(1+x\right),\forall x>0$.

13.

Xét hàm số $f(x)=2^x-x^2$ liên tục trên khoảng $(4\,;+\infty)$.

Ta có : $f'(x)=2^x\ln 2-2x$, $\quad f''(x)=2^x\ln^2 2-2$

Vì $\ln 2>\dfrac{1}{2}\Rightarrow\ln^2 2>\dfrac{1}{4}\Rightarrow 2^x\ln^2 2>4\Rightarrow 2^x\ln^2 2-2>0\,,\forall x>4\ \Rightarrow f''(x)>0\,,\forall x>4$ nên

$f'(x)>f'(4)\,,\forall x>4$ và $f'(4)=2^4\ln 2-8>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x>4$.

Do đó $f(x)>f(4)=0\,,\forall x>4\Rightarrow 2^x>x^2\,,\forall x>4$

Cách 2 : lấy logarit tự nhiên cả 2 vế rồi xét hàm số $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ liên tục trên khoảng $(4\,;+\infty)$.

14.

Từ giải thiết suy ra $(x-y)^{x+y} > 0 \Rightarrow x - y \neq 0$

Giả sử $x - y < 0$ thì ta phải có $x + y = 2k, \quad (k \in N^*) \Rightarrow (x-y)^{x+y} = (x-y)^{2k} \geq 1$

Hơn nữa $(x+y)^{x-y} = (2k)^{x-y} = \dfrac{1}{(2k)^{-(x-y)}} < 1$, do đó $x - y > 0$.

Lấy logarit tự nhiên cả 2 vế của $(x-y)^{x+y} = (x+y)^{x-y}$ ta được $(x+y)\ln(x-y) = (x-y)\ln(x+y)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(x-y)}{x-y} = \dfrac{\ln(x+y)}{x+y}\ \left(*\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$ liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có : $f'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}, t \in \left(0;+\infty\right)$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = e$. Hàm số $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$ đơn điệu trên cách khoảng $(0\,;e)$ và $(e\,;+\infty)$.

Khi đó phương trình $\left(*\right)$ trở thành $f(x-y) = f(x+y)$.

Vì $0 < x - y < x + y$ nên $\begin{cases} 0 < x - y < e \\ e < x + y \end{cases} \quad \left(a\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 1 \ \ (loai) \\ 2^{x+y} = (x+y)^2 \ \ \left(**\right) \end{array}\right.$

Mặt khác với $x \in (4\,;+\infty)$, ta luôn có $2^x > x^2$ nên $\left(**\right) \Rightarrow x + y \leq 4 \ \left(b\right)$

Từ $\left(a\right),\left(b\right)$ suy ra $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Dạng 5 : Dùng đơn điệu hàm số để giải và biện luận phương trình và bất phương trình .

Chú ý 1 :

Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ luôn đơn điệu nghiêm cách trên D (hoặc luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) thì số nghiệm của phương trình : $f\left(x\right) = k$ sẽ không nhiều hơn một và $f\left(x\right) = f\left(y\right)$ khi và chỉ khi $x = y$.

Chú ý 2:

- Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ luôn đơn điệu nghiêm cách trên D (hoặc luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và hàm số $y = g\left(x\right)$ luôn đơn điệu nghiêm ngoặc (hoặc luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) trên D, thì số nghiệm trên D của phương trình $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ không nhiều hơn một.
- Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm đến cấp n trên D và phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có m nghiệm, khi đó phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m + 1$ nghiệm.

Ví dụ 1 : Giải các phương trình

1. $3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=0$

2. $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

Giải :

1. $3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=0 \ \ (1)$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow \left(-3x\right)(2+\sqrt{(-3x)^2+3})=(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}) \ \ (2)$

Đặt $u=-3x, v=2x+1, u,v>0$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow u(2+\sqrt{u^2+3})=v(2+\sqrt{v^2+3}) \quad (3)$

Xét hàm số $f(t)=2t+\sqrt{t^4+3t^2}$ liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$

Ta có $f'(t)=2+\dfrac{2t^3+3t}{\sqrt{t^4+3t^2}}>0, \quad \forall t>0 \Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Khi đó phương trình $(3) \Leftrightarrow f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow -3x=2x+1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$

Vậy $x=-\dfrac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$.

Đặt y = $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$. Khi đó phương trình cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2-5x+6=y \\ 7x^2+9x-4=y^3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2-5x+6=y \\ y^3+y=x^3+3x^2+4x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2-5x+6=y \\ y^3+y=\left(x+1\right)^3+x+1\left(*\right) \end{cases} \quad \left(I\right)$$

$\left(*\right)$ có dạng $\quad f\left(y\right)=f\left(x+1\right) \quad \left(a\right)$

Xét hàm $f\left(t\right)=t^3+t, t\in\mathbb{R}$

Vì $f'\left(t\right)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Khi đó $\left(a\right) \Leftrightarrow y=x+1$

Hệ $\left(I\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2-5x+6=y \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2-6x+5=0 \ \left(**\right) \\ y=x+1 \end{cases}$

Giải phương trình $\left(**\right)$ ta có tập nghiệm : $S=\left\{5, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng phương trình: $2x^2\sqrt{x-2}=11$ có nghiệm duy nhất.

Giải :

Cách 1 :

Xét hàm số $y = 2x^2\sqrt{x-2}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[2;+\infty\right)$.

Ta có: $y' = \dfrac{x\left(5x-8\right)}{\sqrt{x-2}} > 0, \forall x \in \left(2;+\infty\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2\sqrt{x-2}\right) = +\infty$

Bảng biến thiên :

x	2		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị của hàm số $y = 2x^2\sqrt{x-2}$ luôn cắt đường thẳng $y = 11$ tại duy nhất một điểm. Do đó phương trình $2x^2\sqrt{x-2} = 11$ có nghiệm duy nhất .

Cách 2:

Xét hàm số $y = f\left(x\right) = 2x^2\sqrt{x-2} - 11$ liên tục trên nửa khoảng $\left[2;+\infty\right)$.

Ta có $f\left(2\right) = -11, f\left(3\right) = 7$. Vì $f\left(2\right).f\left(3\right) = -77 < 0 \Rightarrow f\left(x\right) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(2;3\right)$.

$f'\left(x\right) = \dfrac{x\left(5x-8\right)}{\sqrt{x-2}} > 0, \forall x \in \left(2;+\infty\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $\left(2;3\right)$.

Vậy phương trình cho có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(2;3\right)$.

Ví dụ 3 : Giải bất phương trình sau $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} \geq 4$

Giải :

Điều kiện : $x \geq \dfrac{1}{5}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{5};+\infty\right)$

Ta có : $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0 \quad ,\forall x > \dfrac{1}{5} \Rightarrow f\left(x\right)$

là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{5};+\infty\right)$ và $f(1) = 4$, khi đó bất phương trình cho

$\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \geq 1.$

Vậy bất phương trình cho có nghiệm là $x \geq 1$.

Ví dụ 4 : Giải bất phương trình sau $3\sqrt{3-2x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6$

Giải :

Điều kiện: $\dfrac{1}{2} < x \leq \dfrac{3}{2}$

Bất phương trình cho $\Leftrightarrow 3\sqrt{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}} \le 2x+6 \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$ $(*)$

Xét hàm số $f(x)=3\sqrt{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}$ liên tục trên nửa khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$

Ta có : $f'(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{3-2x}}-\dfrac{5}{(\sqrt{2x-1})^3}<0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến trên nửa đoạn $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Hàm số $g(x)=2x+6$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=g(1)=8$

- Nếu $x>1 \Rightarrow f(x)<f(1)=8=g(1)<g(x) \Rightarrow (*)$ đúng
- Nếu $x<1 \Rightarrow f(x)>f(1)=8=g(1)>g(x) \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $1 \le x \le \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 5 : Giải bất phương trình sau
$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6} \le 4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

Giải :

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Bất phương trình cho $\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1}-3) \le 4$ $(*)$

- Nếu $\sqrt{2x-1}-3 \le 0 \Leftrightarrow x \le 5 \Rightarrow (*)$ luôn đúng.
- Nếu $x>5$

Xét hàm số $f(x)=(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1}-3)$ liên tục trên khoảng $(5;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=(\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+6}})(\sqrt{2x-1}-3)+\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}}>0, \forall x>5 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$ và $f(7)=4$, do đó $(*) \Leftrightarrow f(x) \le f(7) \Leftrightarrow x \le 7$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\dfrac{1}{2} \le x \le 7$.

Ví dụ 6 : Giải bất phương trình sau
$\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}<2\sqrt{3}+\sqrt{4-x}$

Giải :

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^3+3x^2+6x+16 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 4$..

Bất phương trình cho $\Leftrightarrow \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}<2\sqrt{3} \Leftrightarrow f(x)<2\sqrt{3}$ $(*)$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0,\forall x\in\left(-2;4\right)\Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left(-2;4\right)$ và $f(1)=2\sqrt{3}$, do đó $\left(*\right)\Leftrightarrow f(x)<f(1)\Leftrightarrow x<1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $-2\le x<1$.

Ví dụ 7 : Chứng minh rằng $x^4-x+1>0$, $\forall$ x

Giải :

Xét hàm số $f(x)=x^4-x+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=4x^3-1$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Vì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, do đó

$$\min f(x)=f(\frac{1}{\sqrt[3]{4}})=\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+1>0$$

Vậy $f(x)>0$, $\forall x$.

Ví dụ 8 : Giải hệ phương trình

1. $\begin{cases}\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 & (1)\\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4 & (2)\end{cases}$

2. $\begin{cases}x^3+2x=y & \left(1\right)\\ y^3+2y=x & \left(2\right)\end{cases}$

3. $\begin{cases}x^3-3x=y^3-3y & (1)\\ x^6+y^6=1 & (2)\end{cases}$

Giải :

1. $\begin{cases}\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 & (1)\\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\le x\le 4\\ -\dfrac{3}{2}\le y\le 4\end{cases}$.

Cách 1:

Trừ (1) và (2) ta được:

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{2y+3}-\sqrt{4-y}\ \left(3\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+3} - \sqrt{4-t}$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\ 4\right]$.

Ta có: $f^{/}(x) = \frac{1}{\sqrt{2t+3}} + \frac{1}{2\sqrt{4-t}} > 0,\ \forall t \in \left(-\frac{3}{2};\ 4\right) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay $x = y$ vào (1) ,ta được:

$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow x + 7 + 2\sqrt{(2x+3)(4-x)} = 16$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2 + 5x + 12} = 9 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x \geq 0 \\ 9x^2 - 38x + 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{11}{9} \end{array}\right.$ Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{11}{9} \\ y = \frac{11}{9} \end{cases}$.

Cách 2:

Trừ (1) và (2) ta được:

$\left(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2y+3}\right) + \left(\sqrt{4-y} - \sqrt{4-x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+3)-(2y+3)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}} + \frac{(4-y)-(4-x)}{\sqrt{4-y}+\sqrt{4-x}} = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-y}+\sqrt{4-x}}\right) = 0\left(*\right)$.

Vì $\frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-y}+\sqrt{4-x}} > 0$ nên $\left(*\right) \Leftrightarrow x = y$

Thay $x = y$ vào (1) ,ta được:

$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow x + 7 + 2\sqrt{(2x+3)(4-x)} = 16$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2 + 5x + 12} = 9 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x \geq 0 \\ 9x^2 - 38x + 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{11}{9} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{11}{9} \\ y = \frac{11}{9} \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x^3 + 2x = y & \left(1\right) \\ y^3 + 2y = x & \left(2\right) \end{cases}$

Cách 1 :

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f^{/}(t) = 3t^2 + 2 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} f(x) = y & (1) \\ f(y) = x & (2) \end{cases}$.

+ Nếu $x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow y > x$ (do (1) và (2) dẫn đến mâu thuẫn).

+ Nếu $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow y < x$ (mâu thuẫn).

Suy ra $x = y$, thế vào hệ ta được

$x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ vì $x^2 + 1 > 0.$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Cách 2:

Trừ (1) và (2) ta được:

$x^3 - y^3 + 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)\left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 3\right] = 0 \Leftrightarrow x = y$

Thế $x = y$ vào (1) và (2) ta được: $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y & (1) \\ x^6 + y^6 = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $-1 \le x, y \le 1$

$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad (*)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$, ta có

$f'(t) = 3(t^2 - 1) \le 0 \ \forall t \in [-1;1] \Rightarrow f\left(t\right)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow x = y$ thay vào (2) ta được nghiệm của hệ là: $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

Ví dụ 9 : Giải hệ phương trình

1. $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$

Giải :

1. $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x \ne 0,\ y \ne 0$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-\frac{1}{x}. \end{array}\right.$$

- $y = x$ phương trình $(2) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- $y = -\frac{1}{x}$ phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Bình luận:

Cách giải sau đây sai: $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$.

Điều kiện: $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Xét hàm số

$f(t) = t - \frac{1}{t},\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Suy ra $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$!

Sai do hàm số $f(t)$ đơn điệu trên 2 khoảng rời nhau (cụ thể $f(-1) = f(1) = 0$).

2. $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$

Cách 1:

Điều kiện: $x \neq 0,\ y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x - y + \frac{x-y}{xy} = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=-\frac{1}{x}. \end{array}\right.$$

- $x = y$ phương trình $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$
- $y = -\frac{1}{x}$ phương trình $(2) \Leftrightarrow x^4 + x + 2 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 + x + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$.

$f\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}\right) = 2 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} > 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

$\Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^4 + x + 2 = 0$ vô nghiệm.

Cách 2:

Điều kiện: $x \neq 0,\ y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x - y + \frac{x-y}{xy} = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = -\dfrac{1}{x}. \end{array}\right.$$

- $x = y$ phương trình $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$
- $y = -\dfrac{1}{x}$ phương trình $(2) \Leftrightarrow x^4 + x + 2 = 0$.

- Với $|x| < 1 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x^4 + x + 2 > 0$.
- Với $|x| \geq 1 \Rightarrow x^4 \geq |x| \geq -x \Rightarrow x^4 + x + 2 > 0$.

Suy ra phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Ví dụ 10: Giải các hệ phương trình

1. $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases}$

Giải :

1. $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2} \end{cases}$

Giả sử $x > y > z$

Xét hàm số : $f(t) = \dfrac{2t}{1-t^2}$,xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.Ta có

$f\left(t\right)=\frac{2(t^2+1)}{(1-t^2)^2}>0,\forall x\in D\Rightarrow f\left(t\right)$ luôn đồng biến trên D.

Do đó : $x>y>z\Rightarrow f\left(x\right)>f\left(y\right)>f\left(z\right)\Rightarrow y>z>x$. Mâu thuẫn, do đó điều giả sử sai .

Tương tự $x<y<z$ không thoả .

Vậy $x=y=z$

Hệ cho có nghiệm : $\left(x;y;z\right)=\left(0;0;0\right)$

2. $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0\\ z^3-9y^2+27y-27=0\\ x^3-9z^2+27z-27=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0\\ z^3-9y^2+27y-27=0\\ x^3-9z^2+27z-27=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y^3=9x^2+27x-27\\ z^3=9y^2+27y-27\\ x^3=9z^2+27z-27 \end{cases}$$

Xét hàm số đặc trưng : $f(t)=9t^2-27t+27\Rightarrow f'(t)=18t-27$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow 18t-27=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases} f'(t)>0,\forall t>\frac{3}{2}\\ f'\left(t\right)<0,\forall t<\frac{3}{2} \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại

$t=\frac{3}{2}\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{4}$

Và $f(t)\ge\frac{27}{4}\Leftrightarrow 9x^2-27x+27\ge\frac{27}{4}$

$$\Rightarrow y^3\ge\frac{27}{4}\Rightarrow y\ge\frac{3}{\sqrt[3]{4}}>\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases} x\ge\frac{3}{\sqrt[3]{4}}>\frac{3}{2}\\ z\ge\frac{3}{\sqrt[3]{4}}>\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy x,y,z thuộc miền đồng biến, suy ra hệ phương trình $\begin{cases} f(x)=y\\ f(y)=z\\ f(z)=x \end{cases}$ là hệ hoán vị vòng quanh.

Không mất tính tổng quát giả sử

$$x\ge y\Rightarrow f(x)\ge f(y)\Rightarrow y^3\ge z^3\Rightarrow y\ge z$$
$$\Rightarrow f(y)\ge f(z)\Rightarrow z^3\ge x^3\Rightarrow z\ge x$$
$$\Rightarrow x\ge y\ge z\ge x\Rightarrow x=y=z$$

Thay vào hệ ta có: $x^3-9x^2+27x-27=0\Rightarrow x=3$.

Suy ra: $x=y=z=3$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải phương trình $81\sin^{10}x+\cos^{10}x=\dfrac{81}{256}\left(*\right)$

2. Giải các phương trình

1. $(7+5\sqrt{2})^{\cos x}-(17+12\sqrt{2})^{\cos^3 x}=\cos 3x$

2. $e^{\tan^2 x}+\cos x=2\ ,x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. $2003^x+2005^x=4006x+2$

4. $3^x=1+x+\log_3(1+2x)$

3. Giải các phương trình

1. $\log_3\left(\sqrt{x^2-3x+2}+2\right)+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x-x^2-1}=2\left(*\right)$

2. $\left(x-3\right)\left[\log_3\left(x-5\right)+\log_5\left(x-3\right)\right]=x+2$

3. $\log_2\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{2}\right)+2^{x+\sqrt{x}-\frac{3}{4}}=2$

4. Giải hệ phương trình:

1. $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1\\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$

2. $\begin{cases}(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} & (1)\\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0 & (2)\end{cases}$

5. Chứng minh rằng hệ phương trình $\begin{cases}e^x=2009-\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}}\\ e^y=2009-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\end{cases}\left(1\right)$ có đúng 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện $x>1,y>1$.

6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y & \left(1\right)\\ 2x^2-5xy+y^2=0 & \left(2\right)\end{cases}$

7. Giải các hệ phương trình

1. $\begin{cases}x^3+3x-3+\ln(x^2-x+1)=y\\ y^3+3y-3+\ln(y^2-y+1)=z\\ z^3+3z-3+\ln(z^2-z+1)=x\end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}\log_3(6-y)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}\log_3(6-z)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}\log_3(6-x)=z \end{cases}$

Hướng dẫn :

1.

Đặt $t=\sin^2 x;\ 0\le t\le 1$.

Khi đó phương trình $(*)\Leftrightarrow 81t^5+(1-t)^5=\dfrac{81}{256}, t\in\left[0;1\right]$

Xét hàm số $f(t)=81t^5+(1-t)^5$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, ta có:

$f'(t)=5[81t^4-(1-t)^4], t\in\left[0;1\right]$

$f'(t)=0\Leftrightarrow\begin{cases}81t^4=(1-t)^4\\ t\in\left[0;1\right]\end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4}$

Lập bảng biến thiên và từ bảng biến thiên ta có: $f(t)\ge f(\frac{1}{4})=\dfrac{81}{256}$

Vậy phương trình có nghiệm $t=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\sin^2 x=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\cos 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in Z)$.

2.

1. $(7+5\sqrt{2})^{\cos x}-(17+12\sqrt{2})^{\cos^3 x}=\cos 3x$

$\Leftrightarrow(1+\sqrt{2})^{3\cos x}-(1+\sqrt{2})^{4\cos^3 x}=4\cos^3 x-3\cos x$

$\Leftrightarrow(1+\sqrt{2})^{3\cos x}+3\cos x=4\cos^3 x+(1+\sqrt{2})^{4\cos^3 x}$

Xét hàm số : $f\left(t\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)^t+t$ liên tục trên $\mathbb{R}$,ta có

$f'\left(t\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)^t\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có

$f\left(3\cos x\right)=f\left(4\cos^3 x\right)$

$\Leftrightarrow\left(3\cos x\right)=4\cos^3 x\Leftrightarrow\cos 3x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

2. $e^{\tan^2 x}+\cos x=2\ , x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Xét hàm số : $f(x)=e^{\tan^2 x}+\cos x$ liên tục trên khoảng $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có

$f'(x)=2\tan x.\dfrac{1}{\cos^2 x}e^{\tan^2 x}-\sin x=\sin x\left(\dfrac{2e^{\tan^2 x}-\cos^3 x}{\cos^3 x}\right)$

Vì $2e^{\tan^2 x} \geq 2 > cos^3 x > 0$
Nên dấu của $f'(x)$ chính là dấu của $\sin x$. Từ đây ta có $f(x) \geq f(0) = 2$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

3. $2003^x + 2005^x = 4006x + 2$

Xét hàm số : $f(x) = 2003^x + 2005^x - 4006x - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2003^x \ln 2003 + 2005^x \ln 2005 - 4006$

$f''(x) = 2003^x \ln^2 2003 + 2005^x \ln^2 2005 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow f''(x) = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow f'(x) = 0$ có nhiều nhất là một nghiệm . Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm và $f(0) = f(1) = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = 1$

4. $3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$

$x > -\frac{1}{2}$

Phương trình cho $\Leftrightarrow 3^x + x = 1 + 2x + \log_3(1 + 2x) \Leftrightarrow 3^x + \log_3 3^x = 1 + 2x + \log_3(1 + 2x)(*)$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_3 t$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0, t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến khoảng $(0; +\infty)$ nên phương trình

$(*) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1 + 2x) \Leftrightarrow 3^x = 2x + 1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0 \ (**)$

Xét hàm số: $f(x) = 3^x - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3^x \ln 3 - 2 \Rightarrow f''(x) = 3^x \ln^2 3 > 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm, và $f(0) = f(1) = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = 1$.

3.

1. $\log_3\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x - x^2 - 1} = 2(*)$

Điều kiện $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 2$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}, u \geq 0$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow \log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - u^2} = 2 \Leftrightarrow \log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right).5^{u^2} = 2, u \geq 0(**)$

Xét hàm số : $f(u) = \log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right).5^{u^2}$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

Ta có : $f'(u) = \frac{1}{(u + 2)\ln 3} + \frac{1}{5}5^{u^2}.\ln 5.2u > 0, \forall u \geq 0 \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ và $f(1) = 2 \Rightarrow u = 1$ là nghiệm phương trình $(**)$.

Khi đó $\sqrt{x^2-3x+2}=1 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ thoả điều kiện.

2. $\left(x-3\right)\left[\log_3\left(x-5\right)+\log_5\left(x-3\right)\right]=x+2$

Điều kiện : $x>5$

Khi đó phương trình : $\left(x-3\right)\left[\log_3\left(x-5\right)+\log_5\left(x-3\right)\right]=x+2$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x-5\right)+\log_5\left(x-3\right)=\dfrac{x+2}{x-3}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\log_3\left(x-5\right)+\log_5\left(x-3\right)$ liên tục trên khoảng $\left(5;+\infty\right)$ và có

$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(x-5\right)\ln 3}+\dfrac{1}{\left(x-3\right)\ln 3}>0, \forall x>5 \Rightarrow f\left(x\right)$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(5;+\infty\right)$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x-3}$ liên tục trên khoảng $\left(5;+\infty\right)$ và có

$g'\left(x\right)=\dfrac{-5}{\left(x-3\right)^2}<0, \forall x>5 \Rightarrow g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(5;+\infty\right)$.

Mặt khác $g\left(8\right)=f\left(8\right)=2$, do đó phương trình cho có nghiệm duy nhất $x=8$.

3. $\log_2\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{2}\right)+2^{x+\sqrt{x}-\frac{3}{4}}=2$

Điều kiện : $x\geq 0$.

Đặt $t=\sqrt{x}, t\geq 0$

Phương trình cho $\Leftrightarrow \log_2\left(t+\dfrac{3}{2}\right)+2^{t^2+t-\frac{3}{4}}-2=0, t\geq 0$

Xét hàm số : $f\left(t\right)=\log_2\left(t+\dfrac{3}{2}\right)+2^{t^2+t-\frac{3}{4}}-2$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có : $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{\left(t+\dfrac{3}{2}\right).\ln 2}+(2t+1)2^{t^2+t-\frac{3}{4}}.\ln 2>0, \forall t\geq 0 \Rightarrow f\left(t\right)$ luôn đồng biến trên nửa khoảng

$\left[0;+\infty\right)$ và $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f\left(t\right)=0$

$t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

4.

Nguyễn Phú Khánh –Nguyễn Tất Thu

1. $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Đặt $u=x-1, v=y-1$

(I) viết lại $\begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^v \\ v+\sqrt{v^2+1}=3^u \end{cases} (II)$

Xét hàm số : $f\left(x\right)=x+\sqrt{x^2+1}$ và $g\left(x\right)=3^x$ liên tục $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có

$f'\left(x\right)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>\dfrac{\left|x\right|+x}{\sqrt{x^2+1}}\ge 0,\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến $\forall x\in\mathbb{R}$.

$g\left(x\right)=3^x$ đồng biến $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^v \\ v+\sqrt{v^2+1}=3^u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(u\right)=g\left(v\right) \\ f\left(v\right)=g\left(u\right) \end{cases} \Rightarrow f\left(u\right)+f\left(v\right)=g\left(u\right)+g\left(v\right)$

Nếu $u>u\Rightarrow f\left(u\right)>f\left(v\right)\Rightarrow g\left(v\right)>g\left(u\right)\Rightarrow v>u$ vô lý .

Tương tự nếu $v>u$ cũng dẫn đến vô lý

Do đó hệ $\left(\text{II}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^u \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=3^u(\sqrt{u^2+1}-u) \quad (1) \\ u=v \end{cases}$

Đặt: $g\left(u\right)=3^u(\sqrt{u^2+1}-u)$ liên tục $\forall u\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(u)=3^u\ln 3(\sqrt{u^2+1}-u)+3^u\left(\dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}-1\right)$

$g'(u)=3^u\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\ln 3-\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)>0,\forall u\in\mathbb{R}$

Do đó $g\left(u\right)$ đồng biến $\forall u\in\mathbb{R}$ và $g\left(0\right)=1\Rightarrow u=0$ là nghiệm duy nhất của $\left(1\right)$.

Nên $\left(\text{II}\right)\Leftrightarrow u=v=0$. Vậy $(I)\Leftrightarrow x=y=1$

2. $\begin{cases} (1+4^{2x-y})5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} \quad (1) \\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0 \quad (2) \end{cases}$

Đặt $t=2x-y$. Khi đó phương trình $\left(1\right)$ trở thành: $5\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^t+\left(\dfrac{4}{5}\right)^t\right]=1+2.2^t \quad \left(*\right)$

Xét $f\left(t\right) = 5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t\right], g\left(t\right) = 1 + 2.2^t$

Dễ thấy : $f\left(t\right) = 5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t\right]$ là hàm nghịch biến và $g\left(t\right) = 1 + 2.2^t$ là hàm đồng biến

và $f\left(1\right) = g\left(1\right) = 5 \Rightarrow t = 1$ là một nghiệm của $\left(*\right)$.

Ta cần chứng minh $t = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f\left(t\right) = g\left(t\right)$

Thật vậy :

- $t > 1 \Rightarrow f\left(t\right) < g\left(t\right) \Rightarrow t > 1$ không là nghiệm phương trình $\left(*\right)$.
- $t < 1 \Rightarrow f\left(t\right) > g\left(t\right) \Rightarrow t < 1$ không là nghiệm phương trình $\left(*\right)$.

Vậy $\left(*\right)$ có nghiệm duy nhất $t = 1$.

$t = 1 \Leftrightarrow 2x - y = 1 \Leftrightarrow 2x = y + 1$ khi đó: $(2) \Leftrightarrow y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0\left(**\right)$

Xét hàm số $f(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1)$.

Ta có: $f'(y) = 3y^2 + 2 + \dfrac{2y + 1}{y^2 + y + 1} = 3y^2 + \dfrac{2y^2 + 4y + 3}{y^2 + y + 1} > 0$

$\Rightarrow f(y)$ là hàm đồng biến và $f(-1) = 0$ nên $\left(**\right)$ có nghiệm duy nhất $y = -1$

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

5. Đặt: $f\left(t\right) = e^t, g\left(t\right) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}$ liên tục trên khoảng $\left(1, +\infty\right)$, ta có

$f'\left(t\right) = e^t > 0, \forall t > 1 \Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1, +\infty\right)$

$g'(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{(t^2 - 1)^3}} < 0, \forall t > 1 \Rightarrow g\left(t\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1, +\infty\right)$.

Hệ phương trình $\begin{cases} e^x = 2009 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ e^y = 2009 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{cases} \left(1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right) + g\left(y\right) = 2009 \\ f\left(y\right) + g\left(x\right) = 2009 \end{cases}$

$\Rightarrow f\left(x\right) + g\left(y\right) = f\left(y\right) + g\left(x\right)$

Nếu $x > y \Rightarrow f\left(x\right) > f\left(y\right) \Rightarrow g\left(y\right) < g\left(x\right) \Rightarrow y > x$ vô lý.

Tương tự $y > x$ cũng vô lý .

Khi đó $\begin{cases} e^x = 2009 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ e^y = 2009 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{cases} \ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2009 = 0 \\ x = y \end{cases} \ (2)$

Xét hàm số: $h(x) = e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2009$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$, ta có

$h'(x) = e^x - \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}, h''(x) = e^x + \dfrac{3}{2} \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^5}}.2x > 0$

và $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Vậy $h(x)$ liên tục và có đồ thị là đường cong lõm trên $(1; +\infty)$.

Do đó để chứng minh (2) có 2 nghiệm lớn hơn 1 ta chỉ cần chứng minh tồn tại $x_0 > 1$ mà $h(x_0) < 0$.

Chọn $x_0 = 2 : h(2) = e^2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 2009 < 0 \Rightarrow h(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x > 1$

Vậy hệ phương trình (1) có đúng 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện $x > 1, y > 1$.

6. Điều kiện : $x > -1, y > -1$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow \ln(1 + x) - x = \ln(1 + y) - y \ (3)$

Xét hàm số $f(t) = \ln(1 + t) - t$ liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Ta có : $f'(t) = \dfrac{-t}{1 + t}, \forall t \in (-1; +\infty)$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

- $f'(t) > 0, \forall t \in (-1; 0) \Rightarrow f(t)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$
- $f'(t) < 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ liên tục và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Khi đó phương trình $(3) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

- Với $x = y$ phương trình $(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x.x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

Vậy hệ phương trình cho có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$.

7.

1 . $\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$

Hệ phương trình có dạng : $\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases}$.

Ta giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ. Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1), t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+3+\dfrac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t+1}}>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm đồng biến $\forall t\in\mathbb{R}$.

Giả sử: $x=\max\left\{x;y;z\right\}$ thì $y=f(x)\ge f(y)=z\Rightarrow z=f(y)\ge f(z)=x$

Vậy $x=y=z$. Vì phương trình $x^3+2x-3+\ln(x^2-x+1)=0$

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^3+2x-3+\ln(x^2-x+1),x\in\mathbb{R}$, hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g\left(1\right)=0$, do đó phương trình $g\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Do đó hệ đã cho có nghiệm là $x=y=z=1$.

2. $\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+6}\log_3(6-y)=x\\ \sqrt{y^2-2y+6}\log_3(6-z)=y\\ \sqrt{z^2-2z+6}\log_3(6-x)=z\end{cases}$

Hệ cho $\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3(6-y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}\\ \log_3(6-z)=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}}\\ \log_3(6-x)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=g(x)\\ f(z)=g(y)\\ f(x)=g(z)\end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=\log_3(6-t)$; $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}},t\in(-\infty;6)$

Ta có $f'(t)=-\dfrac{1}{\left(6-t\right)\ln 3}<0,t\in(-\infty;6)\Rightarrow f\left(t\right)$ nghịch biến trên

khoảng $(-\infty;6)$ và $g'(t)=\dfrac{6-t}{\sqrt{\left(t^2-2t+6\right)^3}}>0,\quad\forall t\in(-\infty;6)\Rightarrow g\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;6)$.

Ta giả sử $\left(x;y;z\right)$ là nghiệm của hệ thì $x=y=z$ thay vào hệ ta có:

$\log_3(6-x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}\Leftrightarrow x=3$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $x=y=z=3$.

Bài đọc thêm : HỆ HOÁN VỊ VÒNG QUANH

Định nghĩa: Là hệ có dạng: $\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ .... \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$ **(I)**

Định lí 1: Nếu f, g là các hàm cùng tăng hoặc cùng giảm trên A và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của hệ trên A thì $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Định lí 2: Nếu f, g khác tính đơn điệu trên A và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của hệ trên A thì $x_1 = x_2 = ... = x_n$ nếu n lẻ và $\begin{cases} x_1 = x_3 = ... = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = ... = x_n \end{cases}$ nếu n chẵn **.**

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình :

$$1.\begin{cases} \sin x - \sin y = 3x - 3y & (1) \\ x + y = \dfrac{\pi}{5} & (2) \\ x, y > 0 & (3) \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} \log_2(1 + 3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1 + 3\sin y) = \log_3(\cos x) + 2 \end{cases}$$

Giải :

$$1.\begin{cases} \sin x - \sin y = 3x - 3y & (1) \\ x + y = \dfrac{\pi}{5} & (2) \\ x, y > 0 & (3) \end{cases}$$

Từ $(2),(3) \Rightarrow x, y \in \left(0; \dfrac{\pi}{5}\right)$

$(1) \Leftrightarrow \sin x - 3x = \sin y - 3y \ (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \sin t - 3t, t \in \left(0; \dfrac{\pi}{5}\right)$ ta có $f'(t) = \cos t - 3 < 0, t \in \left(0; \dfrac{\pi}{5}\right) \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên khoảng $t \in (0; \dfrac{\pi}{5})$ nên $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Với $x = y$ thay vào (2) ta tìm được $x = y = \dfrac{\pi}{10}$

Vậy $(x; y) = \left(\dfrac{\pi}{10}; \dfrac{\pi}{10}\right)$ là nghiệm của hệ.

$$2.\begin{cases} \log_2(1 + 3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1 + 3\sin y) = \log_3(\cos x) + 2 \end{cases}$$

Điều kiện : $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin y > 0 \end{cases}$

Đặt $u = \cos x; v = \sin y$, ta có hệ: $\begin{cases} \log_2(1+3u) = \log_3(v) + 2\left(1\right) \\ \log_2(1+3v) = \log_3(u) + 2\left(2\right) \end{cases}$

trừ vế theo vế ta được

$\log_3(1+3u) + \log_3 u = \log_3(1+3v) + \log_3 v \Leftrightarrow f(u) = f(v) \quad \left(*\right)$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(1+3t) + \log_3 t$, dễ thấy $f(t)$ là hàm đồng biến nên $\left(*\right) \Leftrightarrow u = v$.

Thay vào $\left(1\right)$ ta được : $\log_3(1+3u) - \log_3 u = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1+3u}{u} = 9 \Leftrightarrow u = \dfrac{1}{6}$

Vậy hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \dfrac{1}{6} \\ \cos x = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \alpha + k2\pi \\ y = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \\ x = \pm\beta + m2\pi \end{cases}$, trong đó $\sin\alpha = \cos\beta = \dfrac{1}{6}$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} e^{y^2 - x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}$

Giải :

$$\begin{cases} e^{y^2 - x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}$$

Điều kiện : $\begin{cases} x + 2y + 6 > 0 \\ x + y + 2 > 0 \end{cases}$

Lấy $\ln$ 2 vế của phương trình : $e^{y^2 - x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1}$, ta được $y^2 - x^2 = \ln\dfrac{x^2+1}{y^2+1} = \ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(y^2+1\right)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 + \ln\left(x^2+1\right) = y^2 + 1 + \ln\left(y^2+1\right)\left(*\right)$

Phương trình $\left(*\right)$ có dạng $f\left(x^2+1\right) = f\left(y^2+1\right)\left(**\right)$

Xét hàm số : $f\left(t\right) = \ln t + t$ liên tục trên nửa khoảng $\left[1;+\infty\right)$, ta có

$f'\left(t\right) = \dfrac{1}{t} + 1 > 0, \forall t \ge 1 \Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

Do đó $\left(**\right) \Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm y$.

- Với $x = -y$ thay vào phương trình $3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1$, ta được

$\log_3(6-x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x<6 \\ 6-x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=-3$ thoả mãn bài toán .

- Với $x=y$ thay vào phương trình $3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1$, ta được

$3\log_3(x+2)=2\log_2(x+1), x>-1$.

Đặt $3\log_3(x+2)=2\log_2(x+1)=6u \Rightarrow \begin{cases} x+2=3^{2u} \\ x+1=2^{3u} \end{cases}$

$\Rightarrow 1+2^{3u} = 3^{2u} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{9}\right)^u+\left(\dfrac{8}{9}\right)^u=1$

Xét hàm số $g(u)=\left(\dfrac{1}{9}\right)^u+\left(\dfrac{8}{9}\right)^u$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(1)=1$ nên $u=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $\left(\dfrac{1}{9}\right)^u+\left(\dfrac{8}{9}\right)^u=1$.

Với $u=1 \Rightarrow (x;y)=(7;7)$ thoả mãn hệ phương trình .

Ví dụ 3: Hãy xác định tất cả các nghiệm của hệ phương trình (ẩn $(x;y)$) sau: $\begin{cases} x^2+y^3=29 & (1) \\ \log_3 x.\log_2 y=1 & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^3=29 & (1) \\ \log_3 x.\log_2 y=1 & (2) \end{cases}$. Học sinh giỏi Quốc Gia năm 2008 .

Dễ thấy, nếu $(x;y)$là các nghiệm của hệ cho thì $x>1, y>1$ (3)

Đặt $\log_3 x=t, t>0$ (do(3)). Ki đó, $x=3^t$ và từ phương trình (2) có $y=2^{\frac{1}{t}}$.

Khi đó phương trình $(1) \Leftrightarrow 9^t+8^{\frac{1}{t}}=29$ (4) .

Số nghiệm của hệ bằng số nghiệm dương của phương trình (4)

Xét hàm số $f(t)=9^t+8^{\frac{1}{t}-29}$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có $f'(t)=9^t.\ln 9-\dfrac{8^{\frac{1}{t}}.\ln 8}{t^2}$.

Trên khoảng $(0;+\infty), y=8^{\frac{1}{t}}.\ln 8$ và $y=\dfrac{1}{t^2}$ là các hàm nghịch biến và chỉ nhận giá trị dương.

Do đó trên khoảng $(0;+\infty)$, $y=\dfrac{8^{\frac{1}{t}}.\ln 8}{t^2}$ là hàm đồng biến. Suy ra, $f'(t)$là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vì $f'\left(\dfrac{1}{2}\right).f'(1)=18(\ln 9-\ln 2^{256})(\ln 27-\ln 16)<0$ nên $\exists t_0 \in (0;\ 1)$sao cho $f'(t_0)=0$.

Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(t\right)$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

t	0		t_0		1		$+\infty$
$f'\left(t\right)$		$-$	0		$+$		
$f\left(t\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(t_0\right)$	$\nearrow$	-12	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $\left(4\right)$ có đúng hai nghiệm dương. Vì vậy, hệ phương trình cho có tất cả hai nghiệm.

Dạng 6 : Dùng đơn điệu hàm số để giải và biện luận phương trình và bất phương trình chứa tham số.

Cho hàm số $f\left(x;m\right) = 0$ xác định với mọi $x \in I$ $\left(*\right)$

- Biến đổi $\left(*\right)$ về dạng $f\left(x\right) = f\left(m\right)$
- Xét hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên I
- Dùng tính chất đơn điệu của hàm số và kết luận.

Ví dụ 1:
Tìm tham số thực m để phương trình $x + \sqrt{3x^2 + 1} = m$ có nghiệm thực .

Giải :

Xét hàm số $f\left(x\right) = x + \sqrt{3x^2 + 1}$ và $y = m$

Hàm số $f\left(x\right) = x + \sqrt{3x^2 + 1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $f'\left(x\right) = 1 + \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{3x^2 + 1} + 3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

$$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 1} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2 + 1 = 9x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\pm\sqrt{6}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{6}}{6}, f\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Bảng biến thiên : suy ra $f\left(x\right) \ge \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ mà $f\left(x\right) = m$ do đó $m \ge \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ thì phương trình cho có nghiệm thực .

Ví dụ 2 : Tìm tham số thực m để phương trình :
$\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m\left(1\right)$ có nghiệm thực .

Giải :

Xét hàm số $f\left(x\right) = \sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có : $f'\left(x\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) < 0$

Vì $\dfrac{x}{\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}} < \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^6}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} < 0$ nên $f'\left(x\right) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow f\left(x\right)$ nghịch biến trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, nên $0 < f(x) \le 1, \forall x \in \left[0;+\infty\right)$.

Vậy, phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm thực trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right) \Leftrightarrow 0 < m \le 1$.

Ví dụ 3: Tìm tham số thực m để phương trình :
$\left(4m-3\right)\sqrt{x+3} + \left(3m-4\right)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0, \left(2\right)$ có nghiệm thực.

Giải :

Điều kiện: $-3 \le x \le 1$.

Phương trình $(2) \Leftrightarrow m = \dfrac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}$

Nhận thấy rằng:

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x+3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-x}}{2}\right)^2 = 1$$

Nên tồn tại góc $\varphi \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right], t = \tan\dfrac{\varphi}{2}; t \in \left[0;1\right]$ sao cho:

$$\sqrt{x+3} = 2\sin\varphi = 2\frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \sqrt{1-x} = 2\cos\varphi = 2\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$m = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1} \Leftrightarrow m = \frac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7} = f\left(t\right), \left(3\right)$$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7}$ liên tục trên đoạn $t \in \left[0;1\right]$. Ta có

$f'(t) = \dfrac{-52t^2 - 8t - 60}{\left(-5t^2 + 16t + 7\right)^2} < 0, \forall t \in \left[0;1\right] \Rightarrow f\left(t\right)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;1\right]$ và $f(0) = \dfrac{9}{7}; f(1) = \dfrac{7}{9}$

Suy ra phương trình (2) có nghiệm khi phương trình (3) có nghiệm trên đoạn $t \in [0;1]$ khi và chỉ khi: $\frac{7}{9} \le m \le \frac{9}{7}$.

Ví dụ 4: Tìm tham số thực m để bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 24} \le x^2 - 2x + m$ có nghiệm thực trong đoạn $[-4;6]$.

Giải :

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 24}$, $\forall x \in [-4;6] \Rightarrow t \in [0;5]$

Bài toán trở thành tìm tham số thực m để bất phương trình $t^2 + t - 24 \le m$ có nghiệm thực $t \in [0;5]$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 24$ liên tục trên đoạn $[0;5]$.

Ta có : $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [0;5] \Rightarrow f(t)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[0;5]$

Vậy bất phương trình choc ó nghiệm thực trên đoạn $[0;5]$ khi

$$\max_{t \in [0;5]} f(t) \le m \Leftrightarrow f(5) \le m \Leftrightarrow 6 \le m \Leftrightarrow m \ge 6$$

Dạng 7 : Dùng đơn điệu hàm số để chứng minh hệ thức lượng giác

Ví dụ : Chứng minh rằng : nếu tam giác ABC thoả mãn hệ thức $\cos A + \cos B + \cos C + \frac{1}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{13}{6}$ thì tam giác ABC đều.

Giải :

Đặt : $t = \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow 1 < t \le \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t}$ hàm số liên tục trên nửa khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right]$.

Ta có : $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in \left(0;\frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right]$.

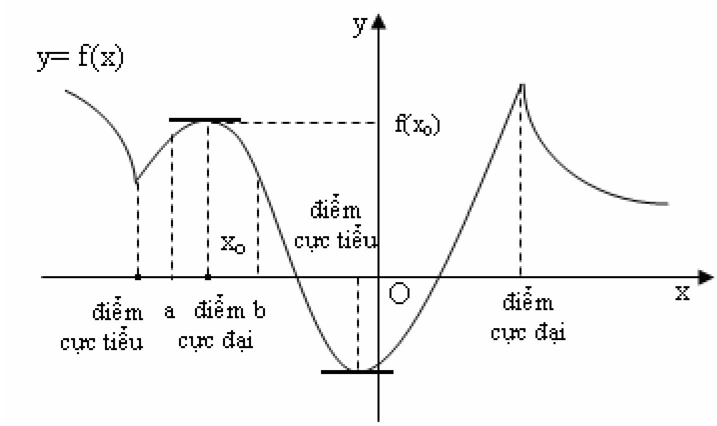
Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{3}{2}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{13}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra : $2 < f\left(t\right) \le \frac{13}{6}$.

Đẳng thức $f\left(t\right) = \frac{13}{6}$ xảy ra khi $t = \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$ hay tam giác ABC đều.

Bài 2: CỰC TRỊ HÀM SỐ



2.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm cực trị hàm số :

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $D\left(D \subset \mathbb{R}\right)$ và $x_0 \in D$

$a)$ x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 sao cho:

$\begin{cases}\left(a;b\right) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \left(a;b\right) \setminus \left\{x_0\right\}\end{cases}$. Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

$b)$ x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 sao cho:

$\begin{cases}\left(a;b\right) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \left(a;b\right) \setminus \left\{x_0\right\}\end{cases}$. Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0.

Như vậy : Điểm cực trị phải là một điểm trong của tập hợp $D\left(D \subset \mathbb{R}\right)$

Nhấn mạnh : $x_0 \in \left(a;b\right) \subset D$ nghĩa là x_0 là một điểm trong của D :

Ví dụ : Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ xác định trên $\left[0;+\infty\right)$.Ta có $f(x) > f\left(0\right)$ với mọi $x > 0$ nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực tiểu vì tập hợp $\left[0;+\infty\right)$ không chứa bất kì một lân cận nào của điểm 0.

Chú ý :

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là GTLN (GTNN) của f trên tập hợp D.
- Hàm số có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp D. Hàm số cũng có thể không có điểm cực trị.

- x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $\left(x_{0;}f(x_0)\right)$được gọi là ***điểm cực trị của đồ thị*** hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị:

Định lý 1: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó , nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'\left(x_0\right) = 0$

Chú ý :

- Đạo hàm f' **<u>có thể</u>** bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số **<u>có thể</u>** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm .
- Hàm số chỉ **<u>có thể</u>** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 , hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm .
- Hàm số đạt cực trị tại x_0 và nếu đồ thị hàm số có tiếp tuyến tại điểm $\left(x_{0;}f(x_0)\right)$thì tiếp tuyến đó song song với trục hoành.

Ví dụ : Hàm số $y = \left|x\right|$ và hàm số $y = x^3$

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị:

Định lý 2: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $\left(a;x_0\right)$ và $\left(x_0;b\right)$. Khi đó :

$a)$ Nếu $\begin{cases} f'\left(x_0\right) < 0, x \in \left(a;x_0\right) \\ f'\left(x_0\right) > 0, x \in \left(x_0;b\right) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0. Nói một cách khác , nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
$f'\left(x\right)$		$-$		$+$	
$f\left(x\right)$	$f\left(a\right)$	$\searrow$	$f\left(x_0\right)$	$\nearrow$	$f\left(b\right)$

$b)$ Nếu $\begin{cases} f'\left(x_0\right) > 0, x \in \left(a;x_0\right) \\ f'\left(x_0\right) < 0, x \in \left(x_0;b\right) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0. Nói một cách khác , nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
$f'\left(x\right)$		$+$		$-$	
$f\left(x\right)$	$f\left(a\right)$	$\nearrow$	$f\left(x_0\right)$	$\searrow$	$f\left(b\right)$

Định lý 3: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0, $f'\left(x_0\right) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

$a)$ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

$b)$ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Chú ý:

Không cần xét hàm số f có hay không có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ nhưng không thể bỏ qua điều kiện " *hàm số liên tục tại điểm* x_0 "

Ví dụ : Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - x & khi \ \ x \le 0 \\ x & khi \ \ x > 0 \end{cases}$ không đạt cực trị tại $x = 0$. Vì hàm số không liên tục tại $x = 0$.

2.1 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.

Dạng 1 : Tìm các điểm cực trị của hàm số .

Quy tắc 1: Áp dụng định lý 2

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các điểm $x_i \ (i = 1,2,3...)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Xét dấu của $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số có cực trị tại điểm x_0.

Quy tắc 2: Áp dụng định lý 3

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các nghiệm $x_i \ (i = 1,2,3...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- Với mỗi x_i tính $f''(x_i)$.

− Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

− Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Ví dụ 1 : Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$
2. $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

Giải :

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3$

Cách 1.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$	$\searrow$	$-\frac{22}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1, f\left(-1\right) = \frac{10}{3}$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3, f\left(3\right) = -\frac{22}{3}$

Cách 2 :

$f''\left(x\right) = 2x - 2$

Vì $f''\left(-1\right) = -4 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1, f\left(-1\right) = \frac{10}{3}$.

Vì $f''\left(3\right) = 4 > 0$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3, f\left(3\right) = -\frac{22}{3}$.

2. $y = f\left(x\right) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \ge 0 \ \forall x \Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.

Chú ý:

* Nếu y' không đổi dấu thì hàm số không có cực trị.
* Đối với hàm bậc ba thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là điều cần và đủ để hàm có cực trị.

Ví dụ 2 : Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = f\left(x\right) = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

2. $y = f\left(x\right) = -x^4 + 2x^2 + 1$

Giải :

1. $y = f\left(x\right) = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 12x - 8 = -4(x-1)^2(x+2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -4(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$			25	$\searrow$	$-\infty$

Hàm đạt cực đại tại $x = -2$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(-2) = 25$, hàm số không có cực tiểu.

2. $y = f\left(x\right) = -x^4 + 2x^2 + 1$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			2				2		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm 1$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(\pm 1) = 2$ và hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ với giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = 1$.

Chú ý:

* Ở bài 1 ta thấy đạo hàm triệt tiêu tại $x = 0$ nhưng qua điểm này y' không đổi dấu nên đó không phải là điểm cực trị.

* Đối với hàm bậc bốn vì đạo hàm là đa thức bậc ba nên hàm chỉ có thể có một cực trị hoặc ba cực trị. Hàm số có một cực trị khi phương trình $y' = 0$ có một hoặc hai nghiệm (1 nghiệm đơn, 1 nghiệm kép), hàm số có ba cực trị khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3 : Tìm cực trị của các hàm số :
1. $y = f\left(x\right) = \left|x\right|$
2. $y = f\left(x\right) = \left|x\right|\left(x + 2\right)$
3. $y = f\left(x\right) = \sqrt{\left|x\right|}\left(x - 3\right)$

Giải :

1. $y = f\left(x\right) = \left|x\right|$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$y = \begin{cases} x \ \ khi \ \ x \ge 0 \\ -x \ \ khi \ \ x < 0 \end{cases}.$$

Ta có $y = ' = \begin{cases} 1 \ \ khi \ \ x > 0 \\ -1 \ \ khi \ \ x < 0 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'			$\|$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt điểm cực đại tại điểm $x = 0, f\left(0\right) = 0$

2. $y = f\left(x\right) = \left|x\right|\left(x + 2\right) = \begin{cases} x\left(x + 2\right) \ \ khi \ \ x \ge 0 \\ -x\left(x + 2\right) \ \ khi \ \ x < 0 \end{cases}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = \begin{cases} 2x + 2 > 0 \;\; khi \;\; x > 0 \\ -2x - 2 \;\; khi \;\; x < 0 \end{cases}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Hàm số liên tục tại $x = 0$, không có đạo hàm tại $x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	
y			1				$+\infty$
	$-\infty$				0		

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1, f\left(-1\right) = 1$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f\left(0\right) = 0$

3. $y = f\left(x\right) = \sqrt{\left|x\right|}\left(x - 3\right)$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$y = f\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt{x}\left(x - 3\right) \;\; khi \;\; x \ge 0 \\ \sqrt{-x}\left(x - 3\right) \;\; khi \;\; x < 0 \end{cases}.$$

Ta có $y' = \begin{cases} \dfrac{3\left(x - 1\right)}{2\sqrt{x}} \qquad khi \;\; x > 0 \\ \dfrac{3 - x}{2\sqrt{-x}} + \sqrt{-x} > 0 \quad khi \;\; x < 0 \end{cases}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y			0				$+\infty$
	$-\infty$				-2		

Hàm số đạt điểm cực đại tại điểm $x = 0, f\left(0\right) = 0$, hàm số đạt điểm cực tiểu tại điểm $x = 1, f\left(1\right) = -2$

Ví dụ 4 : Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = f\left(x\right) = x\sqrt{4 - x^2}$
2. $y = f\left(x\right) = 2x - \sqrt{x^2 - 3}$
3. $y = f\left(x\right) = \sqrt{-x^3 + 3x^2}$

Giải :

1. $y = f\left(x\right) = x\sqrt{4 - x^2}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$

Ta có $y' = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}, x \in \left(-2;2\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

y' đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm $-\sqrt{2}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\sqrt{2},\ f\left(-\sqrt{2}\right) = -2$

y' đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $\sqrt{2}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \sqrt{2},\ f\left(\sqrt{2}\right) = 2$

Hoặc dùng bảng biến thiên hàm số để kết luận:

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

2. $y = f\left(x\right) = 2x - \sqrt{x^2 - 3}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên nửa khoảng $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.

Ta có: $y' = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \dfrac{2\sqrt{x^2 - 3} - x}{\sqrt{x^2 - 3}}, x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right) \\ 2\sqrt{x^2 - 3} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < \sqrt{3} \\ 4(x^2 - 3) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

và hàm số không có đạo hàm tại $x = \pm\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
y'		$+$				$-$	0	$+$	
y	$+\infty$								
	$-\infty$	$\nearrow$				$\searrow$	3	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2,\ y(2) = 3$, hàm số không có cực đại.

3. $y = f\left(x\right) = \sqrt{-x^3 + 3x^2}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên nửa khoảng $(-\infty; 3]$.

Ta có: $y' = \dfrac{-3(x^2 - 2x)}{2\sqrt{-x^3 + 3x^2}}, x < 3, x \neq 0$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và hàm số không có đạo hàm tại $x = 0; x = 3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
y	$+\infty$ $\searrow$		0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2,\ y(2) = 2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0,\ y(0) = 0$.

Chú ý:

* Ở bài 2 ví dụ 4 mặc dù $x = \pm\sqrt{3}$ là điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm tuy nhiên hàm số lại không xác định trên bất kì khoảng $(a;b)$ nào của hai điểm này nên hai điểm này không phải là điểm cực trị của hàm số.

* Tương tự vậy thì $x = 3$ của hàm số ở câu 3 cũng không phải là điểm cực trị nhưng $x = 0$ lại là điểm cực trị của hàm số.

Ví dụ 5 : Tìm cực trị của các hàm số sau

1. $y = f\left(x\right) = 2\sin 2x - 3$
2. $y = f\left(x\right) = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

Giải :

1. $y = f\left(x\right) = 2\sin 2x - 3$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4\cos 2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$y'' = -8\sin 2x \quad ,$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -8\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -8 & khi \quad k = 2n \\ 8 & khi \quad k = 2n+1 \end{cases}$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi; y\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) = -1$ và đạt cực đại tại

$$x = \frac{\pi}{4} + \left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}; y\left(\frac{\pi}{4} + \left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}\right) = -5$$

2. $y = f\left(x\right) = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 2\sin x + 2\sin 2x = 2\sin x\left(1 + 2\cos x\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

$$y'' = 2\cos x + 4\cos 2x$$

$y''\left(\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right)=6\cos\frac{2\pi}{3}=-3<0$. Hàm số đạt cực đại tại $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$, $y\left(\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right)=4\frac{1}{2}$

$y''(k\pi)=2\cos k\pi+4>0,\forall k\in\mathbb{Z}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=k\pi$, $y(k\pi)=2(1-\cos k\pi)$

Ví dụ 6 :

Cho hàm số : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}-1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$.Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x=0$ và chứng minh rằng hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Giải :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}-1}{x^2}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x}{x^2\left[\sqrt[3]{\left(1+x\sin^2 x\right)^2}+\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}+1\right]}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\sin x.\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+x\sin^2 x\right)^2}+\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}+1}=0$$

Mặt khác $x\neq 0$, ta có : $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{\left(1+x\sin^2 x\right)^2}+\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}+1}\Rightarrow f(x)\geq 0=f(0)$.

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y=-x^3+3x^2$
2. $y=x^4-4x^3+1$

Hướng dẫn :

1. $y=-x^3+3x^2$

Ta có: $y'=-3x^2+6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0;x=2$

$y''=-6x+6\Rightarrow y''(0)=6>0$; $y''(2)=-6<0$

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(2)=4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ với giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0)=0$.

2. $y=x^4-4x^3+1$

Ta có: $y'=4x^3-8x^2=4x^2(x-2)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$			-15	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ với giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = -15$, hàm số không có cực đại.

Dạng 2 : Tìm điều kiện để hàm số có cực trị.

Phương pháp: Sử dụng định lí 2 và định lí 3

Chú ý:

* Hàm số f (xác định trên D) có cực trị $\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) Tại đạo hàm của hàm số tại x_0 phải triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0

ii) $f'(x)$ phải đổi dấu qua điểm x_0 hoặc $f''(x_0) \neq 0$.

* Nếu $f'(x)$ là một tam thức bậc hai hoặc triệt tiêu và cùng dấu với một tam thức bậc hai thì hàm có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc TXĐ.

Ví dụ 1 : Tìm m để $y = mx^3 + 3x^2 + 12x + 2$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có : $y' = 3mx^2 + 6x + 12 \Rightarrow y'' = 6mx + 6$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12m + 24 = 0 \\ 12m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$ là giá trị cần tìm.

Chú ý : Ta có thể giải bài toán trên theo cách khác như sau

Để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$ thì $y'(2) = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Với $m = -2$ ta có $y' = 3(-2x^2 + 2x + 4)$ ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Ví dụ 2 :

1 . Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = f\left(x\right) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

2 . Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = f\left(x\right) = x^3 + \left(m + 3\right)x^2 + 1 - m$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Giải:

1.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-m\right\}$

Ta có đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{\left(x + m\right)^2}, x \neq -m$

Cách 1:

Nếu hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ thì $y'\left(2\right) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -1 \end{array}\right.$

$m = -3$, ta có $y' = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{\left(x - 3\right)^2}, x \neq 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, do đó $m = -3$ thoả mãn .
Tương tự với $m = -1$

Cách 2 :
Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-m\right\}$

Ta có đạo hàm $f'\left(x\right) = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{\left(x + m\right)^2}, x \neq -m$

$y'' = \dfrac{2}{\left(x + m\right)^3}, x \neq -m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ khi $\begin{cases} y'\left(2\right) = 0 \\ y''\left(2\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\left(2 + m\right)^2} = 0 \\ \dfrac{2}{\left(2 + m\right)^3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 3 = 0 \\ m \neq -2 \\ m < -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \vee m = -3 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

2.
Hàm số cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 + 2\left(m + 3\right)x = x\left(3x + 2m + 6\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{2m + 6}{3} \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2m+6}{3}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1 \Leftrightarrow -\dfrac{2m+6}{3} = -1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 3 : Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$ có cực trị .

Giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{m}\right\}$

* Nếu $m = 0$ thì $y = x^2 - 2 \Rightarrow$ hàm số có một cực trị

* Nếu $m \neq 0$ hàm số xác định $\forall x \neq \dfrac{1}{m}$

Ta có $y' = \dfrac{mx^2 - 2x + m}{(mx-1)^2}$. Hàm số có cực trị khi phương trình $mx^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\dfrac{1}{m}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ m - \dfrac{1}{m} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Vậy $-1 < m < 1$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng với mọi giá trị của $m \in \mathbb{R}$, hàm số $y = \dfrac{x^2 - m\left(m+1\right)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu .

Giải :

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{m\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{\left(x-m\right)^2} = \dfrac{g\left(x\right)}{\left(x-m\right)^2}$, $x \neq m$, $g\left(x\right) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$

Dấu của $g\left(x\right)$ cũng là dấu của y' và $\Delta'_g = m^2 - \left(m^2 - 1\right) = 1 > 0$, $\forall m$.

Do đó $\forall m$ thì $g\left(x\right) = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = m - 1, x_2 = m + 1$ thuộc tập xác định .

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

y' đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $x_1 = m - 1$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x_1 = m - 1$

y' đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm $x_2 = m + 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_2 = m + 1$

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để :

1. Hàm số có ba cực trị.
2. Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Giải :

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x = 2x(2x^2 + 6mx + 3(m+1))$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 2x^2 + 6mx + 3m + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Nhận xét:

*Nếu y có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$, khi đó y' sẽ đổi dấu khi đi qua ba điểm $0, x_1, x_2$ khi đó hàm có hai cực tiểu và 1 cực đại.

*Nếu y có 1 nghiệm $x = 0$, khi đó y' chỉ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi đi qua một điểm duy nhất nên hàm chỉ có một cực tiểu.

* Nếu y có nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì y' chỉ đổi dấu từ - sang + khi đi qua $x = 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Từ trên ta thấy hàm số luôn có ít nhất một cực trị.

1. Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi y có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3(3m^2 - 2m - 2) > 0 \\ y(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \cup m > \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

2. Theo nhận xét trên ta thấy hàm chỉ có cực tiểu mà không có cực đại

$$\Leftrightarrow \text{ hàm số không có ba cực trị } \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{3} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{3}.$$

Chú ý:

1) Đối với hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = x(4ax^2 + b) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4ax^2 + b = 0 \ (1) \end{array}\right.$

* Hàm có ba cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ ab < 0 \end{cases}$.

Khi đó hàm có hai cực tiểu, một cực đại khi $a > 0$; hàm có hại cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

* Hàm có một cực trị khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm

$x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab > 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$. Khi đó hàm chỉ có cực tiểu khi $a > 0$ và chỉ có cực đại khi $a < 0$.

2) Đối với hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$, Ta có: $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4ax^2 + 3bx + 2c = 0\ (2) \end{array}\right.$

* Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9b^2 - 32ac > 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$. Khi đó hàm có hai cực tiểu, một cực đại khi $a > 0$; hàm có hại cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

* Hàm có một cực trị khi và chỉ khi (2) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9b^2 - 32ac < 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$. Khi đó hàm chỉ có cực tiểu khi $a > 0$ và chỉ có cực đại khi $a < 0$.

Ví dụ 6 : Tìm m để hàm số $y = -2x + 2 + m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực đại.

Giải :

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = -2 + m\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$; $y'' = \dfrac{m}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}}$.

* Nếu $m = 0$ thì $y = -2 < 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

* $m \neq 0$ vì dấu của y'' chỉ phụ thuộc vào m nên để hàm có cực đại thì trước hết $y'' < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có nghiệm **(1)**.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2 + 1} = m(x-2)$ **(2)** .

Đặt $t = x - 2$ thì **(2)** trở thành :

$mt = 2\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 0 \\ (m^2 - 4)t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 0 \\ t^2 = \dfrac{1}{m^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow (1)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2$ (Do $m < 0$).

Vậy $m < -2$ thì hàm số có cực đại.

Ví dụ 7 : Tìm các hệ số a, b, c, d sao cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b > 0 \end{cases}\ (1).$

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b < 0 \end{cases}\ (2)$

$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \quad (3).$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $a=-2, b=3, c=0, d=0$.

Ta kiểm tra lại $f(x)=-2x^3+3x^2$

Ta có $f'(x)=-6x^2+6x$, $f''(x)=-12x+6$

$f''(0)=6>0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$

$f''(1)=-6<0$. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$

Vậy : $a=-2, b=3, c=0, d=0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+x+1$ có cực đại cực tiểu.

2. Tìm m để hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx+m$ có cực đại , cực tiểu .

3. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{mx^2+x+m}{x+m}$ không có cực đại , cực tiểu .

4. Tìm m để hàm số $y=mx^3+3mx^2-(m-1)x-1$ không có cực trị.

5. Xác định các giá trị của tham số k để đồ thị của hàm số $y=f(x,k)=kx^4+(k-1)x^2+1-2k$ chỉ có một điểm cực trị.

6. Xác định m để đồ thị của hàm số $y=f(x,m)=y=\dfrac{1}{2}x^4-mx^2+\dfrac{3}{2}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

7. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

8.

$a.$ Tìm các hệ số a,b,c sao cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x=-2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;0)$.

$b.$ Tìm các hệ số a,b sao cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+ab}{ax+b}$ đạt cực trị tại điểm $x=0$ và $x=4$.

Hướng dẫn :

1. Ta có $y'=3x^2-6(m+1)x+1$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $3x^2-6(m+1)x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=3m^2+6m+2>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3})\cup(\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3};+\infty)$.

2. Ta có $y'=3(m+2)x^2+6x+m$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt hay

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2\neq 0 \\ \Delta' = 9-3m\left(m+2\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ 3\left(-m^2-2m+3\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ -3<m<1 \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $-3<m<1, m\neq -2$.

3. Ta có đạo hàm $y' = \dfrac{mx^2+2m^2x}{\left(x+m\right)^2}$

Hàm số không có cực đại , cực tiểu khi $y'=0$ không đổi dấu qua nghiệm , khi đó phương trình $g\left(x\right)=mx^2+2m^2x=0, \left(x\neq -m\right)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

- Xét $m=0 \Rightarrow y'=0, \forall x\neq -m \Rightarrow m=0$ thoả .
- Xét $m\neq 0$. Khi đó $\Delta' = m^4$

Vì $\Delta' = m^4>0, \forall m\neq 0 \Rightarrow g\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt nên không có giá trị tham số m để $g\left(x\right)=mx^2+2m^2x=0, \left(x\neq -m\right)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

Vậy $m=0$ thoả mãn yêu cầu bài toán .

4.

Ta có : $y' = 3mx^2+6mx-m+1 \quad \left(*\right)$

* $m=0$ khi đó $\left(*\right)$ trở thành $y'=1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ suy ra hàm không có cực trị.

* $m\neq 0$ khi đó để hàm không có cực trị thì $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 3m(4m-1)\leq 0 \Leftrightarrow 0<m\leq \frac{1}{4}.$$

Vậy $0\leq m\leq \dfrac{1}{4}$ thì hàm số không có cực trị.

5. Ta có $y' = 4kx^3-2\left(k-1\right)x$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2kx^2+k-1=0 \quad \left(*\right) \end{array}\right.$$

Hàm số chỉ có một cực trị khi phương trình $y'=0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó .Khi đó phương trình $2kx^2+k-1=0 \quad \left(*\right)$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta' = -2k\left(k-1\right)\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k<0 \vee k\geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k\leq 0 \\ k\geq 1 \end{array}\right.$$

Vậy $k\leq 0 \vee k\geq 1$ là giá trị cần tìm .

6. Ta có $y' = 2x^3-2mx$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \quad \left(*\right) \end{array}\right.$$

Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại khi phương trình $y'=0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó Khi đó phương trình $x^2=m \quad \left(*\right)$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $x=0 \Leftrightarrow m\leq 0$

Vậy $m \le 0$ là giá trị cần tìm.

7. Ta có: $y = x + \dfrac{1}{x+m} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{1}{(x+m)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{2}{(x+m)^3}$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(m+1)^2} = 0 \\ \dfrac{2}{(1+m)^3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m = 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy $m = 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

8.

$a.$ Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Hàm số đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ khi và chỉ khi $\begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 12 \\ 4a - 2b + c = 8 \end{cases}$ (1)

Đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;0)$ khi và chỉ khi $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c + 1 = 0$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $a = 3, b = 0, c = -4$.

$b.$

Hàm số đã cho xác định khi $ax + b \ne 0$

Ta có đạo hàm $y' = \dfrac{a^2x^2 + 2abx + b^2 - a^2b}{(ax+b)^2}$

- Điều kiện cần :

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0$ và $x = 4$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b^2 - a^2b}{b^2} = 0 \\ \dfrac{16a^2 + 8ab + b^2 - a^2b}{(4a+b)^2} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2b = 0 \\ b \ne 0 \\ 16a^2 + 8ab + b^2 - a^2b = 0 \\ 4a + b \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 > 0 \\ 8a^2(a+2) = 0 \\ 4a + a^2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

- Điều kiện đủ :

$\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 4x}{(-x+2)^2}$ $\qquad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty \parallel +\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên :hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0$ và $x = 4$. Vậy $a = -2, b = 4$ là giá trị cần tìm.

Dạng 3 : Tìm điều kiện để các điểm cực trị của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp:

- Trước hết ta tìm điều kiện để hàm số có cực trị,
- Biểu diễn điều kiện của bài toán thông qua tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số từ đó ta tìm được điều kiện của tham số.

Chú ý:

* Nếu ta gặp biểu thức đối xứng của hoành độ các điểm cực trị và hoành độ các điểm cực trị là nghiệm của một tam thức bậc hai thì ta sử dụng định lí Viét.

* Khi tính giá trị cực trị của hàm số qua điểm cực trị ta thường dùng các kết quả sau:

Định lí 1: Cho hàm đa thức $y = P\left(x\right)$, giả sử $y = \left(ax+b\right)P'\left(x\right) + h\left(x\right)$ khi đó nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì giá trị cực trị của hàm số là: $y(x_0) = h\left(x_0\right)$ và $y = h(x)$ gọi là phương trình quỹ tích của các điểm cực trị.

Chứng minh: Giả sử x_0 là điểm cực trị của hàm số, vì $P(x)$ là hàm đa thức nên $P'\left(x_0\right) = 0$

$\Rightarrow y(x_0) = (ax_0 + b)P'(x_0) + h(x_0) = h(x_0)$ (đpcm) .

Định lí 2: Cho hàm phân thức hữu tỉ $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ khi đó nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì giá trị cực trị của hàm số: $y(x_0) = \dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

Và $y = \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ là phương trình quỹ tích của các điểm cực trị.

Chứng minh: Ta có $y' = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow u'(x)v(x) - v'(x)u(x) = 0$ (*). Giả sử x_0 là điểm cực trị của hàm số thì x_0 là nghiệm của phương trình (*) $\Rightarrow \dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)} = y(x_0)$.

Ví dụ 1 : Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x + 2$ có 2 điểm cực trị dương.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \quad (*)$

Hàm số có hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Vậy $\begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 2 : Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$ có 2 cực đại, cực tiểu và 2 điểm đó nằm về hai phía với trục Ox.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{mx^2 - 2mx - 5m - 1}{(x-1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx - 5m - 1 = 0 \quad (x \neq 1) \quad (*)$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(6m+1) > 0 \\ -6m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{6} \\ m > 0 \end{array}\right..$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía trục Ox $\Leftrightarrow y(x_1).y(x_2) < 0$.

Áp dụng kết quả định lí 2 ta có: $y(x_1) = 2m(x_1 - 1)$, $y(x_2) = 2m(x_2 - 1)$

$\Rightarrow y(x_1).y(x_2) = 4m^2[(x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = 4m(-2m - 1)$.

$$y(x_1).y(x_2) < 0 \Leftrightarrow 4m(-2m-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right..$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 3 : Tìm m để đồ thị của hàm số $(C_m): y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này cách đều trục Oy.

Giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 2(3x^2 + mx - 6) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + mx - 6 = 0 \quad (2)$

Vì (2) luôn có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số luôn có hai cực trị. Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai cực trị, hai điểm cực trị cách đều trục tung

$\Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ (vì $x_1 \neq x_2$)

$\Leftrightarrow S = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4 : Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - \left(2m+1\right)x^2 + \left(m^2 - 3m + 2\right)x + 4$ có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung .

Giải :

Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có đạo hàm $f'\left(x\right) = 3x^2 - 2\left(2m+1\right)x + m^2 - 3m + 2$

Hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung khi và chỉ khi phương trình $f'\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 3.f'\left(0\right) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Vậy giá trị cần tìm là $1 < m < 2$.

Ví dụ 5 : Tìm tham số $m > 0$ để hàm số $y = \dfrac{x^2 + m^2x + 2m^2 - 5m + 3}{x}$ đạt cực tiểu tại $x \in \left(0;2m\right)$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{0\right\}$

Ta có đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 - 2m^2 + 5m - 3}{x^2} = \dfrac{g\left(x\right)}{x^2}, x \neq 0$ Với $g\left(x\right) = x^2 - 2m^2 + 5m - 3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x \in \left(0;2m\right) \Leftrightarrow g\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2\left(x_1 < x_2\right)$ thoả

$$x_1 < 0 < x_2 < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1.g\left(0\right) < 0 \\ 1.g\left(2m\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -2m^2 + 5m - 3 < 0 \\ 2m^2 + 5m - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < m < 1 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $\dfrac{1}{2} < m < 1 \vee m > \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 6 : Tìm tham số m để hàm số $y = (x-m)(x^2 - 3x - m - 1)$ có cực đại và cực tiểu thỏa $\left|x_{CĐ}.x_{CT}\right| = 1$.

Giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+3)x + 2m - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+3)x + 2m - 1 = 0 \ (1)$

Hàm số có hai điểm cực trị thỏa mãn $\left|x_{CĐ}.x_{CT}\right| = 1 \Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$| x_1.x_2 | = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 7 > 0 \\ | P | = | \dfrac{c}{a} | = | \dfrac{2m-1}{3} | = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -1 \end{array}\right..$$

Vậy $m = 2$ hoặc $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 7 : Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}mx^3 - \left(m-1\right)x^2 + 3\left(m-2\right)x + \dfrac{1}{3}$ có cực đại , cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại cực tiểu x_1, x_2 thỏa $x_1 + 2x_2 = 1$.

Giải:

Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = mx^2 - 2\left(m-1\right)x + 3\left(m-2\right)$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi y' đổi dấu hai lần qua nghiệm x, tức là phương trình $mx^2 - 2\left(m-1\right)x + 3\left(m-2\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = \left(m-1\right)^2 - 3m\left(m-2\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Theo định lý Vi – ét và yêu cầu bài toán, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \quad (gt) \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ \left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right) = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0\,(m \neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{3} \\ m = 2 \end{array}\right.$$

So với điều kiện bài toán , vậy $m = \dfrac{2}{3} \vee m = 2$ là giá trị cần tìm .

Ví dụ 8: Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x^2 + 3x + m - 2}{x+2}$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\left|y_{(x_2)} - y_{(x_1)}\right| = 8$

Giải :

$$y = \frac{2x^2 + 3x + m - 2}{x+2} = 2x - 1 + \frac{m}{x+2}$$

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Với $x \neq -2, m \neq 0$, ta có $y = 2 - \dfrac{m}{(x+2)^2} = \dfrac{2(x+2)^2 - m}{(x+2)^2} = \dfrac{g(x)}{(x+2)^2}, g(x) = 2(x+2)^2 - m$

Đồ thị hàm số có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó , khi đó phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2)^2 = m > 0 \\ 2(-2+2)^2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

Khi đó ta có $\begin{cases} y_{(x_1)} = 4x_1 + 3 \\ y_{(x_2)} = 4x_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \left|y_{(x_2)} - y_{(x_1)}\right| = \left|(4x_2 + 3) - (4x_1 + 3)\right| = 4\left|x_2 - x_1\right|$

$$\left|y_{(x_2)} - y_{(x_1)}\right| = 8 \Leftrightarrow 4\left|x_2 - x_1\right| = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \quad (1)$$

Mà $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1x_2 = \dfrac{8-m}{2} \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) $và$ (2) suy ra $(-4)^2 - 4\left(\dfrac{8-m}{2}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Ví dụ 9: Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\left|y_{(x_2)} - y_{(x_1)}\right| > 8$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{m\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{2x^2 - 4mx + 2m}{(x-m)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m = 0 \quad (1)$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 > 0 \\ m^2 - 2m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Vì phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị là: $y = 4x - 3$ nên

$| y(x_1) - y(x_2) | > 8 \Leftrightarrow | x_1 - x_2 | > 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > 4$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ m > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện hàm có cực trị suy ra

$m < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \cup \quad m > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 10 : Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.

Giải:

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2)$.

Với $m \neq 0$ hàm số có ba cực trị .Khi đó tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(m;1 - m^4)$, $C(-m;1 - m^4)$.

Dễ thấy $AB = AC$ nên tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow 2(m^2 + m^8) = 4m^2 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 11: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại , cực tiểu đồng thời các điểm cực trị lập thành tam giác đều.

Giải :

Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$ $\quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \quad (*) \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó , khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m > 0$

Khi đó : $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A\left(0; m^4 + 2m\right) \\ x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B\left(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right) \\ C\left(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right) \end{array}\right. \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị A, B, C lập thành tam giác đều $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} AB = AC \\ AB = BC \end{array}\right. \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m$

$\Leftrightarrow m\left(m^3 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}\,(m > 0)$

Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ là giá trị cần tìm .

Ví dụ 12: Tìm a để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2 \quad (C)$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C) ở về hai phía khác nhau của đường tròn (phía trong và phía ngoài): $\left(C_a\right): x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 5a^2 - 1 = 0$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$ $\quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{array}\right.$

Cách 1:

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A(0;2), B(2;-2)$. Hai điểm $A(0;2), B(2;-2)$ ở về hai phía của hai đường tròn $\left(C_a\right)$ khi $\Leftrightarrow P_{A/\left(C_a\right)}.P_{B/\left(C_a\right)} < 0 \Leftrightarrow \left(5a^2 - 8a + 3\right)\left(5a^2 + 4a + 7\right) < 0$

$\Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5} < a < 1$

Cách 2 :

$\left(C_a\right): (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 1$ có tâm $I(a;2a)$ và bán kính $R = 1$

Ta có : $IB = \sqrt{(a - 2)^2 + (2a + 2)^2} = \sqrt{5a^2 + 4a + 8}$

$IB = \sqrt{5\left(a + \dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{36}{5}} \geq \dfrac{6}{\sqrt{5}} > 1 = R \Rightarrow$ điểm B nằm ngoài $\left(C_a\right)$,

do đó điểm A nằm trong đường tròn

$\left(C_a\right) \Leftrightarrow IA < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (2 - 2a)^2} < 1 \Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5} < a < 1$

Ví dụ 13: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng : $d : y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Cách 1 :

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m^2 = 0\ (1)$.

hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' = 3(3 - m^2) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$.

phương trình đường thẳng d' đi qua các điểm cực trị là :

$y = (\frac{2}{3}m^2 - 2)x + \frac{1}{3}m^2 + m \Rightarrow$ các điểm cực trị là :

$A(x_1;(\frac{2}{3}m^2 - 2)x_1 + \frac{1}{3}m^2 + 3m),\ \mathrm{B}(x_2;(\frac{2}{3}m^2 - 2)x_2 + \frac{1}{3}m^2 + 3m)$.

Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng d và d'

$\Rightarrow I(\frac{2m^2 + 6m + 15}{15 - 4m^2};\frac{11m^2 + 3m - 30}{15 - 4m^2})$.

A và B đối xứng qua d thì trước hết $d \perp d' \Leftrightarrow \frac{2}{3}m^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$ khi đó $I\left(1;-2\right)$ và $A\left(x_1;-2x_1\right);\ B\left(x_2;-2x_2\right) \Rightarrow$ I là trung điểm của $AB \Rightarrow$ A và B đối xứng nhau qua d.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Cách 2 :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x + m^2$.

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$.

Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2$, $x_1.x_2 = \frac{m^2}{3}$.

Gọi $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số và I là trung điểm của đoạn AB.

Đường thẳng AB có hệ số góc $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3 - 3\left(x_2^2 - x_1^2\right) + m^2\left(x_2 - x_1\right)}{x_2 - x_1}$

$k_{AB} = \left(x_1 + x_2\right)^2 - x_1x_2 - 3\left(x_1 + x_2\right) + m^2$

$k_{AB} = 4 - \frac{m^2}{3} - 6 + m^2 = \frac{2m^2 - 6}{3}$

Đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\left(\Delta\right)$ có hệ số góc $k = \frac{1}{2}$

Hai điểm $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $\left(\Delta\right)$

khi và chỉ khi $\begin{cases} AB \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases}$

- $AB \perp \Delta \Leftrightarrow k_{AB}.k = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\left(\frac{2m^2-6}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow m = 0$
- $m = 0 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow A(0;0) \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = -4 \Rightarrow B(2;-4) \end{array}\right. \Rightarrow I(1;-2)$

Dễ thấy $I(1;-2) \in \Delta$

Vậy $m = 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán .

Ví dụ 14: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2+mx}{1-x}$ có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-x^2+2x+m}{(1-x)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0 \ (1) \quad (x \neq 1)$

Đồ thị hàm số có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m > 0 \\ 1 - 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$.

Đường thẳng đi qua các điểm cực trị có phương trình $y = -2x - m \Rightarrow$ các điểm cực trị là:

$A(x_1;-2x_1-m),\ B(x_2;-2x_2-m)$

$\Rightarrow AB^2 = 5(x_1-x_2)^2 = 100 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 4m - 20 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 15: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+2mx+2}{x+1}$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ta có đạo hàm $y' = \frac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}, x \neq -1$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi $f'(x)$ đổi dấu hai lần qua nghiệm x hay phương trình

$g(x) = x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2m > 0 \\ 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{2}$

Gọi $A(x_1; y_1 = 2x_1 + 2m), B(x_2; y_2 = 2x_2 + 2m)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$. Theo định lý Vi ét $x_1 + x_2 = -2,\ x_1.x_2 = -2m$

Theo yêu cầu bài toán $d(A,\Delta) = d(B,\Delta) \Leftrightarrow \dfrac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|x_2 + y_2 + 2|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| = |3x_2 + 2m + 2| \Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 = (3x_2 + 2m + 2)^2$

$\Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 - (3x_2 + 2m + 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left[3(x_1 + x_2) + 4m + 4\right] = 0$

$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 4m + 4 = 0 \quad (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow 3(-2) + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$

So với điều kiện, vậy $m = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm .

Ví dụ 16: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$ có điểm cực tiểu nằm trên Parabol $(P): y = x^2 + x - 4$

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - m - 2}{(x-1)^2}, x \neq 1$. Đặt $g(x) = x^2 - 2x - m - 2$.

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm

phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (-m - 2) > 0 \\ g(1) = -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$

Khi đó : $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{m+3} \Rightarrow y_1 = m + 2 - 2\sqrt{m+3} \\ x_2 = 1 + \sqrt{m+3} \Rightarrow y_2 = m + 2 + 2\sqrt{m+3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	y_1	$\searrow$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$-\infty$ $-\infty$ y_2

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $A\left(1+\sqrt{m+3};m+2+2\sqrt{m+3}\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số .

$A\in\left(P\right)\Leftrightarrow m+2+2\sqrt{m+3}=\left(1+\sqrt{m+3}\right)^2+1+\sqrt{m+3}-4$

$\Leftrightarrow\sqrt{m+3}=1\Leftrightarrow m=-2$

So với điều kiện bài toán, ta có $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 17: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=-x^3+3\left(m+1\right)x^2-\left(3m^2+7m-1\right)x+m^2-1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

Giải :

Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có đạo hàm $f'\left(x\right)=-3x^2+6\left(m+1\right)x-\left(3m^2+7m-1\right)$.Hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1 $\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-3x^2+6\left(m+1\right)x-\left(3m^2+7m-1\right)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn điều kiện :

$$\left[\begin{array}{ll} x_1<1<x_2 & (1)\\ x_1<x_2\le 1 & (2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(1)\Leftrightarrow -3.f'(1)<0\\ (2)\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ -3.f'(1)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}<1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\left(3m^2+m-4\right)<0\\ \begin{cases}9\left(m+1\right)^2-3\left(3m^2+7m-1\right)>0\\ 3\left(3m^2+m-4\right)\ge 0\\ m+1<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{4}{3}<m<1\\ \begin{cases}-3m+12>0\\ 3m^2+m-4\ge 0\\ m<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{4}{3}<m<1\\ \begin{cases}m<4\\ m\le-\dfrac{4}{3}\vee m\ge 1\\ m<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{4}{3}<m<1\\ m\le-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow m<1$$

Ví dụ 18: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số

$y = \dfrac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$. có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}, x \neq 1$

$g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2

là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_1 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_2 = 1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{array} \right.$

$y_1.y_2 = \left(1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right)\left(1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right)$

$y_1.y_2 = (1-m)^2 - 4(-m^2 + 3m - 2)$

$y_1.y_2 = 5m^2 - 14m + 9 = 5\left(m - \dfrac{7}{5}\right)^2 - \dfrac{4}{5} \geq -\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \min y_1.y_2 = -\dfrac{4}{5}$ *khi* $m = \dfrac{7}{5}$

So với điều kiện , vậy $m = \dfrac{7}{5}$ là giá trị cần tìm .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Xác định tham số a để hàm số sau có cực đại: $y = -2x + 2 + a\sqrt{x^2 - 4x + 5}$

2. Chứng tỏ rằng chỉ có một điểm A duy nhất trên mặt phẳng toạ độ sao cho nó là điểm cực đại của đồ thị $f(x) = \dfrac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ ứng với một giá trị thích hợp của m và cũng là điểm cực tiểu của đồ thị ứng với một giá trị thích hợp khác. Tìm toạ độ của A .

3. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$ đạt cực đại và cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu.

4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m thì hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+2)x + 3m + 2}{x+1}$ có giá trị cực trị , đồng thời $y_{CĐ}^2 + y_{CT}^2 > \dfrac{1}{2}$.

5. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (m^2+1)x + 4m^3 + m}{x+m}$ tương ứng có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (II) và một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (IV) của mặt phẳng tọa độ.

6. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x + 3m + 2}{x-1}$ có hai điểm cực đại và cực tiểu cùng dấu .

7. Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 - (m+2)x - 1$, có đồ thị là (C_m), m là tham số.

1. Chứng minh rằng hàm số luôn có một cực đại , một cực tiểu .
2. Khi $m = 1$, đồ thị hàm số là (C)

$a)$. Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{x}{3}$ và tiếp xúc với đồ thị (C).

$b)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C).

Hướng dẫn :

1. Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = -2 + \dfrac{a(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ $\quad y'' = \dfrac{a}{\sqrt{(x^2-4x+5)^3}}$

Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a(x_0-2)}{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} = 2 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = \dfrac{a}{2} \quad (1) \\ a < 0 \end{cases}$$

Với $a < 0$ thì $(1) \Rightarrow x_0 < 2$.

Xét hàm số : $f(x_0) = \dfrac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2}, x_0 < 2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x_0) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = -1, \lim_{x \to 2^-} f(x_0) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = -\infty$$

Ta có $f'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0-2)^2\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} < 0, \forall x_0 \in (-\infty; 2)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2
$f'(x)$		$-$	||
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ||

Phương trình (1) có nghiệm $x_0 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{2} < -1 \Leftrightarrow a < -2$

2. Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}, x \neq m$

Tam thức $g(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ có $\Delta = 1 > 0, \forall m$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y(x_1) = -m^2 + m - 2 \Rightarrow M(m-1; -m^2 + m - 2) \\ y(x_2) = -m^2 + m + 2 \Rightarrow N(m+1; -m^2 + m + 2) \end{array}\right.$

Đặt $A(x_0; y_0)$.Giả sử ứng với giá trị $m = m_1$ thì A là điểm cực đại và ứng với giá trị $m = m_2$ thì A là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số

Ta có: $\begin{cases} x_0 = m_1 - 1 \\ y_0 = -m_1^2 + m_1 - 2 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = m_2 + 1 \\ y_0 = -m_2^2 + m_2 + 2 \end{cases}$.

Theo bài toán , ta có : $\begin{cases} m_1 - 1 = m_2 + 1 \\ -m_1^2 + m_1 - 2 = -m_2^2 + m_2 + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = 2 \\ (m_1 - m_2)(m_1 + m_2 - 1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = 2 \\ m_1 + m_2 = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{1}{2} \\ m_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ y_0 = -\dfrac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{4}\right)$.

Vậy $A\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{4}\right)$ là điểm duy nhất cần tìm thoả yêu cầu bài toán .

3.

Hàm số cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = 3x^2 - 12x + 3(m+2)$.

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 9(m+2) > 0$

$\Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

$y=\frac{1}{3}(x-2).\left[3x^2-12x+3(m+2)\right]+2(m-2)x+m-2$

$y=\frac{1}{3}(x-2).y'+2(m-2)x+m-2$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $g(x)=3x^2-12x+3(m+2)=0$.

Trong đó :

$\begin{cases} y_1=\frac{1}{3}(x_1-2).y'(x_1)+2(m-2)x_1+m-2 \\ y'(x_1)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow y_1=2(m-2)x_1+m-2$

$\begin{cases} y_2=\frac{1}{3}(x_1-2).y'(x_2)+2(m-2)x_2+m-2 \\ y'(x_2)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow y_2=2(m-2)x_2+m-2$

Theo định lý Vi-ét , ta có : $x_1+x_2=4, x_1x_2=m+2$

Theo bài toán : $y_1.y_2>0 \Leftrightarrow \left[2(m-2)x_1+m-2\right]\left[2(m-2)x_2+m-2\right]>0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2(2x_1+1)(2x_2+1)>0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2\left[4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1\right]>0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2\left[4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1\right]>0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m+17)>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-\frac{17}{4} \\ m\neq 2 \end{cases}$

So với điều kiện bài toán , vậy $-\frac{17}{4}<m<2$ là giá trị cần tìm .

4.

Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có : $y'=\frac{x^2+2x-2m}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}, x\neq -1 \qquad g(x)=x^2+2x-2m$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g(x)=0, x\neq -1$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ g(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1>0 \\ -2m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$

Gọi $A\left(x_1;y_1=2x_1+m+2\right),B\left(x_2;y_2=2x_2+m+2\right)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)=0,x\neq-1$

Theo định lý Vi- ét $x_1+x_2=-2,\ x_1.x_2=-2m$

Theo bài toán : $y_{CĐ}^2+y_{CT}^2=y_1^2+y_2^2=\left(2x_1+m+2\right)^2+\left(2x_2+m+2\right)^2$

$y_1^2+y_2^2=4\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}\right)+4\left(m+2\right)\left(x_1+x_2\right)+2\left(m+2\right)^2$

$y_1^2+y_2^2=4\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]+4\left(m+2\right)\left(x_1+x_2\right)+2\left(m+2\right)^2$

$y_1^2+y_2^2=4\left(4+4m\right)-8\left(m+2\right)+2\left(m+2\right)^2=2m^2+16m+8$

Xét $f\left(m\right)=2m^2+16m+8,m>-\dfrac{1}{2}$ $,f'\left(m\right)=4m+16>0,\forall m>-\dfrac{1}{2}$

Do đó hàm số $f\left(m\right)$ đồng biến trên khoảng $m\in\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ và $f\left(m\right)>f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2},m\in\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

Vậy $y_{CĐ}^2+y_{CT}^2>\dfrac{1}{2},m\in\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

5. Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-m\right\}$ và $y=mx+1+\dfrac{4m^3}{x+m}\left(m\neq0\right)$

Ta có :$y'=\dfrac{mx^2+2m^2x-3m^3}{\left(x+m\right)^2},x\neq-m$

Gọi $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$ là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)=mx^2+2m^2x-3m^3=0,x\neq-m$

Đồ thị của hàm số có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ $\left(II\right)$ và một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ $\left(IV\right)$ của mặt phẳng tọa độ khi

$\left(1\right)\Leftrightarrow m.g\left(0\right)<0\Leftrightarrow-3m^4<0\Leftrightarrow m\neq0\qquad\left(a\right)$

$\left(2\right)\Leftrightarrow$ Đồ thị của hàm số không cắt trục $Ox\Leftrightarrow mx^2+\left(m^2+1\right)x+4m^3+m=0\quad\left(x\neq-m\right)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\ \Delta=\left(m^2+1\right)^2-4m\left(4m^3+m\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\ -15m^4-2m^2+1<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\ m^2>\dfrac{1}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ m>\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{array}\right.\quad\left(b\right)$$

$\left(3\right)\Leftrightarrow m<0\ \left(c\right)$

Từ (a) (b) (c) suy ra $m < -\frac{1}{\sqrt{5}}$ là giá trị cần tìm.

6. Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2m - 1}{(x-1)^2}, x \neq 1$

Cách 1:

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ hay phương trình $g(x) = x^2 - 2x - 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$, khi đó $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > 0 \\ -2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 \quad (1)$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của $g(x) = 0$

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{2m+2} \Rightarrow y_1 = 1 - m - 2\sqrt{2m+2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2m+2} \Rightarrow y_2 = 1 - m + 2\sqrt{2m+2} \end{array}\right.$

Hai giá trị cực trị cùng dấu khi $y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow \left(1 - m - 2\sqrt{2m+2}\right)\left(1 - m + 2\sqrt{2m+2}\right) > 0$

$\Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(2m+2) > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 10m - 7 > 0 \Leftrightarrow m < 5 - 4\sqrt{2} \vee m > 5 + 4\sqrt{2} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $-1 < m < 5 - 4\sqrt{2} \vee m > 5 + 4\sqrt{2}$

Cách 2 :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2m - 1}{(x-1)^2}, x \neq 1$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ hay phương trình $g(x) = x^2 - 2x - 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > 0 \\ -2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$

Hai giá trị cực trị cùng dấu khi đồ thị của hàm số $y = 0$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $x \neq 1$ hay phương trình $x^2 - (m+1)x + 3m + 2 = 0 \quad (x \neq 1)$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$.

Tức là $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(3m+2) > 0 \\ 1 - (m+1) + 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 7 > 0 \\ 2m + 2 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 5 - 4\sqrt{2} \\ m > 5 + 4\sqrt{2} \end{array}\right. \\ m \neq -1 \end{cases}$$

So với điều kiện suy ra $\left[\begin{array}{l} -1 < m < 5 - 4\sqrt{2} \\ m > 5 + 4\sqrt{2} \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm .

7. Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$.

1.
Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2(m-1)x - (m+2)$.
Vì $\Delta' = m^2 + m + 7 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình $f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt . Do đó đồ thị của hàm số luôn có một cực đại , một cực tiểu với mọi giá trị của tham số m .

2.
$m = 1 \Rightarrow (C): f(x) = x^3 - 3x - 1$
$a)$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là toạ độ tiếp điểm của đường thẳng (d) và đồ thị (C)

$\Rightarrow y_0 = x_0^3 - 3x_0 - 1, y_0' = 3x_0^2 - 3$. Đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ khi

$y_0'\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, y_0 = -1$

Vậy đường thẳng $(d): y = -3x - 1$ và tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm $(0;-1)$.
$b)$. Đồ thị (C) có điểm cực đại là $A(-1;1)$, điểm cực tiểu là $B(1;-3)$. Do đó đường thẳng qua AB là : $y = -2x - 1$.

Dạng 4 : Ứng dụng cực trị của hàm số trong bài toán đại số .

Ví dụ : Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình sau có một số lẻ nghiệm thực: $(3x^2 - 14x + 14)^2 - 4(3x-7)(x-1)(x-2)(x-4) = m$.

Giải :

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-4) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

$g(x) = (3x^2 - 14x + 14)^2 - 4(3x-7)f(x)$

$g(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số của x^4 là -3.

$f'(x) = 3x^2 - 14x + 14$

$g'(x) = 2(3x^2 - 14x + 14)(6x - 14) - 12f(x) - 4(3x-7)f'(x) = -12f(x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1;\ x = 2;\ x = 4.$

$g(1) = 9;\ g(2) = 4;\ g(4) = 36.$

Bảng biến thiên của $g\left(x\right)$.

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	4	$\nearrow$	36	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên cho thấy phương trình $g(x) = m$ có một số lẻ nghiệm khi và chỉ khi: $m = 4;\ m = 9;\ m = 36.$

Bài 3 : GIÁ TRỊ LỚN NHẤT
GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ.

3.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa*:* Cho hàm số xác định trên D

- Số M gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D

nếu $\begin{cases} f(x) \le M \ \ \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \ge M \ \ \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$, ta kí

hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$.

2. Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số

Phương pháp chung: Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D ta tính y', tìm các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại và lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên ta suy ra GTLN, GTNN.

***Chú ý*:**

- Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên $\left[a;b\right]$

thì $\max\limits_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\};\ \ \min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}$.

- Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau

* Tính y' và tìm các điểm $x_1,\ x_2, ..., x_n$ mà tại đó y' triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm.

* Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$ .Khi đó

+ $\max\limits_{x\in\left[a;b\right]} f\left(x\right) = \max\limits_{x\in\left[a;b\right]}\left\{f\left(a\right), f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)...f\left(x_i\right), f\left(b\right)\right\}$

+ $\min\limits_{x\in\left[a;b\right]} f\left(x\right) = \min\limits_{x\in\left[a;b\right]}\left\{f\left(a\right), f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)...f\left(x_i\right), f\left(b\right)\right\}$

- Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T thì để tìm GTLN, GTNN của nó trên D ta chỉ cần tìm GTLN, GTNN trên một đoạn thuộc D có độ dài bằng T.

* Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên D. Khi đặt ẩn phụ $t = u(x)$, ta tìm được $t \in E$ với $\forall x \in D$, ta có $y = g\left(t\right)$ thì Max, Min của hàm f trên D chính là Max, Min của hàm g trên E.

* Khi bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất mà không nói trên tập nào thì ta hiểu là tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số.

* Ngoài phương pháp khảo sát để tìm Max, Min ta còn dùng phương pháp miền giá trị hay Bất đẳng thức để tìm Max, Min.

3.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.
2. $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $\left[0;3\right]$.
3. $y = x^6 + 4\left(1-x^2\right)^3$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.
4. $y = \sqrt{-x^2+5x+6}$ trên đoạn $[-1;\ 6]$.

Giải :

1. $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có $f'\left(x\right) = \dfrac{-8}{\left(x-3\right)^2} < 0, \forall x \in \left[0;2\right]$

Bảng biến thiên

x	0		2
$f'\left(x\right)$		$-$	
$f\left(x\right)$	$\dfrac{1}{3}$	$\searrow$	-5

Từ bảng biến thiên suy ra : $\max\limits_{\left[0;2\right]} f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}\ \ khi\ \ x = 0$ $\qquad \min\limits_{\left[0;2\right]} f\left(x\right) = -5\ \ khi\ \ x = 2$

2. $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$

Hàm số $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ liên tục trên đoạn $\left[0;3\right]$.

Ta có : $y' = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{\sqrt{x^2 + 4}}, x \in \left[0;3\right]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1) = -5\sqrt{5} \\ y(0) = -12 \\ y(2) = -8\sqrt{2} \\ y(3) = -3\sqrt{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\limits_{x\in\left[0;3\right]} y = -3\sqrt{13} \\ \min\limits_{x\in\left[0;3\right]} y = -12 \end{array}\right.$$

Vậy $\max\limits_{x\in\left[0;3\right]} y = -3\sqrt{13}$ khi $x = 3$, $\min\limits_{x\in\left[0;3\right]} y = -12$ khi $x = 0$.

3. $y = x^6 + 4\left(1 - x^2\right)^3$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

Đặt $t = x^2, x \in \left[-1;1\right] \Rightarrow t \in \left[0;1\right]$

Hàm số đã cho viết lại $f\left(t\right) = t^3 + 4\left(1 - t\right)^3, t \in \left[0;1\right]$ và $f'\left(t\right) = 3t^2 - 12\left(1 - t\right)^2 = 3\left(-3t^2 + 8t - 4\right)$

$$f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3}, f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9} \\ t = 2 \end{array}\right.$$

$f\left(0\right) = 4, f\left(1\right) = 1$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	4	$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra : $\max\limits_{\left[-1;1\right]} f\left(x\right) = 4 \;\; khi \;\; x = 0 \qquad \min\limits_{\left[-1;1\right]} f\left(x\right) = \dfrac{4}{9} \;\; khi \;\; x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

4. $y = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$

Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ liên tục trên đoạn $[-1;\; 6]$.

$$y' = \frac{-2x + 5}{2\sqrt{-x^2 + 5x + 6}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \in [-1;\; 6]$$

$y(-1) = y\left(6\right) = 0,\ y\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{7}{2}$.

Vậy : $\min\limits_{x\in\left[-1;6\right]} y = 0\ \ khi\ \ x = -1, x = 6$ và $\max\limits_{x\in\left[-1;6\right]} y = \dfrac{7}{2}\ \ khi\ \ x = \dfrac{5}{2}$.

Ví dụ 2 : Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số: $y = \dfrac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}, x > 0$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$

$$y = \frac{x + \sqrt{9x^2 + 1}}{8x^2 + 1} = \frac{9x^2 + 1 - x^2}{(8x^2 + 1)\left(\sqrt{9x^2 + 1} - x\right)} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - x}$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ khi hàm số

$f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Ta có : $f'\left(x\right) = \dfrac{9x}{\sqrt{9x^2 + 1}} - 1$

$$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 1} = 9x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 72x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$\min_{x>0} f\left(x\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ \text{ khi } x = \frac{1}{6\sqrt{2}} \Rightarrow \max_{x>0} y = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\ \text{ khi }\ x = \frac{1}{6\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$.
2. $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ trên đoạn $x \in \left[-1;2\right]$.

Giải :

1. $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}, x \in \left(-2;2\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \\ x \in \left(-2;2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} = x \\ x \in \left(-2;2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	-2		$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	-2	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên , ta được $\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}\ \ khi\ \ x = \sqrt{2}$ $\qquad \min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -2\ \ khi\ \ x = -2$

2. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $x \in [-1;2]$.

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $y' = \dfrac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên .

x	-1		1		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Từ bảng biến thiên , ta được $\max\limits_{x\in[-1;2]} y = \sqrt{2}\ \ khi\ \ x = 1$ $\qquad \min\limits_{x\in[-1;2]} y = 0\ \ khi\ \ x = -1$

Ví dụ 4 : Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số
$y = \left|x^3 - 3x^2 + 1\right|$ trên đoạn $[-2;1]$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $[-2;1]$.

Đặt $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1, x \in [-2;1]$

$g'(x) = 3x^2 - 6x.$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \notin [-2;1] \end{array}\right.$

$g(-2) = -19, g(0) = 1, g(1) = -1$, suy ra $\max\limits_{[-2;1]} g(x) = 1, \min\limits_{[-2;1]} g(x) = -19$.

$x \in [-2;1] \Rightarrow g(x) \in [-19;1] \Rightarrow f(x) = |g(x)| \in [0;19]$.

$g(0).g(1) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (0;1)$ sao cho $g(x_1) = 0.$

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 19, \min\limits_{[-2;1]} f(x) = 0.$

Ví dụ 5:

1. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^2 + 2x + a - 4\right|$ trên đoạn $\left[-2;1\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất .
2. Tìm giá trị p, q để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^2 + px + q\right|$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ là bé nhất .

Giải :

1. Hàm số đã cho xác định trên $\left[-2;1\right]$.

$y = \left|x^2 + 2x + a - 4\right| = \left|\left(x+1\right)^2 + a - 5\right|$

Đặt $t = \left(x+1\right)^2, x \in \left[-2;1\right] \Rightarrow t \in \left[0;4\right]$

Ta có $f\left(t\right) = \left|t + a - 5\right|, t \in \left[0;4\right]$

$\max\limits_{x\in\left[-2;1\right]} y \Leftrightarrow \max\limits_{t\in\left[0;4\right]} f\left(t\right) = \max\limits_{t\in\left[0;4\right]}\left\{f\left(0\right), f\left\{4\right\}\right\} = \max\limits_{t\in\left[0;4\right]}\left\{\left|a-5\right|, \left|a-1\right|\right\}$

- $\left|a-5\right| \ge \left|a-1\right| \Leftrightarrow a \le 3 \Rightarrow \max\limits_{t\in\left[0;4\right]} f\left(t\right) = \left|a-5\right| = 5 - a$
- $\left|a-5\right| \le \left|a-1\right| \Leftrightarrow a \ge 3 \Rightarrow \max\limits_{t\in\left[0;4\right]} f\left(t\right) = \left|a-1\right| = a - 1$

Mặt khác $\begin{cases} 5 - a \ge 5 - 3 = 2, \forall a \le 3 \\ a - 1 \ge 3 - 1 = 2, \forall a \ge 3 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{t\in\left[0;4\right]} f\left(t\right) \ge 2, \forall a \in \mathbb{R}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{t\in\left[0;4\right]} f\left(t\right) = 2 \ \ khi \ \ a = 3$

2. Xét hàm số $f\left(x\right) = x^2 + px + q$ xác định trên đoạn $\left[-1;1\right] \Rightarrow y = \left|f\left(x\right)\right|$

$f\left(-1\right) = 1 - p + q, f\left(0\right) = q, f\left(1\right) = 1 + p + q$

Giả sử $\max y = f\left(\alpha\right)$

$\Rightarrow \left|f(1)\right| + \left|f(0)\right| \ge \left|f(1) - f(0)\right| = \left|1+p\right|, \ \left|f(-1)\right| + \left|f(0)\right| \ge \left|f(-1) - f(0)\right| = \left|1-p\right|$

$\bullet p > 0 \Rightarrow \left|1+p\right| > 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left|f(1)\right| > \dfrac{1}{2} \\ \left|f(0)\right| > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow f\left(\alpha\right) > \dfrac{1}{2}$

$\bullet p < 0 \Rightarrow \left|1-p\right| > 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1) > \dfrac{1}{2} \\ f(0) > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow f\left(\alpha\right) > \dfrac{1}{2}$

$\max\limits_{x\in\left[-1;1\right]} y = \max\left\{\left|f(-\dfrac{p}{2})\right|; \left|f(-1)\right|; \left|f(1)\right|\right\}$

$\bullet p = 0 \Rightarrow f\left(x\right) = x^2 + q, f\left(0\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = q, f\left(-1\right) = f\left(1\right) = 1 + q$

Giá trị lớn nhất của y là một trong hai giá trị $\left|q\right|;\left|1+q\right|$

$\bullet q > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|1+q\right| > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|f(\pm 1)\right| > \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha) > \dfrac{1}{2}$

$\bullet q < -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|q\right| > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|f(0)\right| > \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha) > \dfrac{1}{2}$

$\bullet q = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|f\left(x\right)\right| = \left|x^2 - \dfrac{1}{2}\right| \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow \max f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$

cũng là giá trị nhỏ nhất của $f\left(\alpha\right)$.

Vậy $p = 0, q = -\dfrac{1}{2}$ thoả mãn bài toán .

Ví dụ 6 : Tìm các giá trị a,b sao cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

- Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{ax+b}{x^2+1} \le 4, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R} : \dfrac{ax_0+b}{x_0^{\ 2}+1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - ax + 4 - b \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4x_0^{\ 2} - ax_0 + 4 - b = 0 : \text{có nghiệm } x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 16\left(4-b\right) \le 0 \\ \Delta = a^2 - 16\left(4-b\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + 16b - 64 = 0 \quad \left(*\right)$$

- Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x^2+1} \ge -1, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R} : \dfrac{ax_0+b}{x_0^{\ 2}+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b + 1 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x_0^{\ 2} + ax_0 + b + 1 = 0 : \text{có nghiệm } x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4\left(b+1\right) \le 0 \\ \Delta = a^2 - 4\left(b+1\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 4b - 4 = 0 \quad \left(**\right)$$

Từ $\left(*\right)$ $và$ $\left(**\right)$ ta có hệ $\begin{cases} a^2 + 16b - 64 = 0 & \left(*\right) \\ a^2 - 4b - 4 = 0 & \left(**\right) \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$

Vậy giá trị a,b cần tìm là : $\begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$

Ví dụ 7 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$

2. $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

3. $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

4. $y = \dfrac{\sin^6 x\left|\cos x\right| + \cos^6 x\left|\sin x\right|}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|}$

Giải :

1. $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$

$y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2 = \sin^4 x - \sin^2 x + 3$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \le t \le 1$

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^2 - t + 3$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$

Ta có $f'\left(t\right) = 2t - 1$, $t \in \left[0;1\right]$

$f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

$f\left(0\right) = f\left(1\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$

$\min y = \min\limits_{t\in\left[0;1\right]} f\left(t\right) = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\max y = \max\limits_{t\in\left[0;1\right]} f\left(t\right) = 3$

2. $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Ta có : $f'\left(x\right) = 1 - 2\cos 2x, -\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}; f\left(\pi\right) = \pi$

Vậy:

$\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} y = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ khi $x = \frac{5\pi}{6}$

$$\min_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} y = -\frac{\pi}{2} \ \ khi \ \ x = -\frac{\pi}{2}$$

3. $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow f\left(t\right) = \dfrac{t+1}{t^2 + t + 1}, \ t \in [-1; \ 1]$

$f\left(t\right) = \dfrac{t+1}{t^2 + t + 1}$ liên tục trên đoạn $[-1; \ 1]$

$f'\left(t\right) = \dfrac{-t^2 - 2t}{(t^2 + t + 1)^2}$

$f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \in [-1; \ 1]$

$f(-1) = 0, \ f\left(0\right) = 1, \ f\left(1\right) = \dfrac{2}{3}$.

Vậy:

$$\min f\left(x\right) = \min_{t\in\left[-1;1\right]} f\left(t\right) = 0 \ \ khi \ \ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\max f\left(x\right) = \max_{t\in\left[-1;1\right]} f\left(t\right) = 1 \ \ khi \ \ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

4. $y = \dfrac{\sin^6 x\left|\cos x\right| + \cos^6 x\left|\sin x\right|}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|}$

Vì $\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right| \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x$

Nên $y = \dfrac{\sin^6 x\left|\cos x\right| + \cos^6 x\left|\sin x\right|}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|} = \dfrac{\left|\sin x\cos x\right|\left(\left|\sin x\right|^5 + \left|\cos x\right|^5\right)}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|}$

$y = \left|\sin x\cos x\right|\left(1 - \left|\sin x\cos x\right| - \sin^2 x\cos^2 x\right)$

$y = \dfrac{-1}{8}\left|\sin^3 x\right| - \dfrac{1}{4}\left|\sin 2x\right|^2 + \dfrac{1}{2}\left|\sin 2x\right|$

Đặt $t = \left|\sin 2x\right|; 0 \le t \le 1$

Xét hàm số : $f(t) = \dfrac{-1}{8}t^3 - \dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{1}{2}t$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$.

Ta có : $f'(t) = \dfrac{-3}{8}t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}, \forall t \in \left[0;1\right]$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}$

$f(0) = 0; f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{5}{27}; f(1) = \dfrac{1}{8}$

Vậy : $\min y = \min\limits_{t\in\left[0;1\right]} f(t) = f(0) = 0$ khi $\left|\sin 2x\right| = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$

$\max y = \underset{t\in\left[0;1\right]}{max} f(t) = f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{5}{27}$ khi $\left|\sin 2x\right| = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \cos 4x = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{4}arc\cos\dfrac{1}{9} + \dfrac{k\pi}{2}$

Ví dụ 8 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$
2. $y = \sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\cos x}$

Giải :

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ liên tục trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Ta có : $g'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \dfrac{\cos x\sqrt{\cos x} - \sin x\sqrt{\sin x}}{2\sqrt{\sin x.\cos x}}$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$g'(x) = 0, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin x \\ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$g(0) = 1; g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{8}; g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 \le g(x) \le \sqrt[4]{8} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \le y \le 1$$

Vậy $\min y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}, \max y = 1$

2. $y = \sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\cos x}$

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 1+\sin x \ge 0 \\ 1+\cos x \ge 0 \end{cases}$

$$y > 0 \Rightarrow y^2 = \sin x + \cos x + 2 + 2\sqrt{\sin x + \cos x + \sin x\cos x + 1} \quad (*)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$

Khi đó $(*)$ viết lại $f(t) = t + 2 + 2\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(t^2+2t+1\right)} = t + 2 + \sqrt{2}\left|t+1\right|$

$$f(t) = \begin{cases} \left(1-\sqrt{2}\right)t + 2 - \sqrt{2}, & \text{nếu } -\sqrt{2} \le t \le -1 \\ \left(1+\sqrt{2}\right)t + 2 + \sqrt{2}, & \text{nếu } -1 \le t \le \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(t) = \begin{cases} 1-\sqrt{2} < 0, & \text{nếu } -\sqrt{2} \le t < -1 \\ 1+\sqrt{2} > 0, & \text{nếu } -1 < t \le \sqrt{2} \end{cases}$$

Hàm số $f(t)$ không có đạo hàm tại điểm $t = -1$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
$f'(t)$	$-$	$+$	$\|\|$		
$f(t)$	$4-2\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$4+2\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên , ta được $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f\left(x\right)=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ $\qquad \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f\left(x\right)=1$

Ví dụ 9: $g(x)=f(\sin^2 x)f\left(\cos^2 x\right)$ trong đó hàm f thỏa mãn:
$f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x \quad \forall x\in[0;\pi]$

Giải :

Đặt $t=\cot x$

$$\Rightarrow \sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{2\cot x}{1+\cot^2 x}=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos 2x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{(\sin^4 x+2\sin^2 x-1)(\cos^4 x+2\cos^2 x-1)}{(\sin^4 x+1)(\cos^4 x+1)}$$

$$g(x)=\frac{\sin^4 x\cos^4 x+8\sin^2 x\cos^2 x-2}{\sin^4 x\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x+2}=\frac{u^2+8u-2}{u^2-2u+2}=h(u).$$

trong đó $u=\sin^2 x\cos^2 x;\quad 0\le u\le \frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow h'(u)=2\frac{-5u^2+4u+6}{(u^2-2u+2)^2}>0 \qquad \forall u\in\left[0;\frac{1}{4}\right].$$

$\Rightarrow$ hàm số $h(u)$ luôn tăng trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ nên $\max\limits_{u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} h(u)=h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{25}$ $\quad \min\limits_{u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} h(t)=h(0)=-1$.

Vậy $\max g(x)=\frac{1}{25};\quad \min g(x)=-1$

Ví dụ 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số trên : $\left[-1;2\right]$, biết
$\begin{cases} f\left(0\right)=1 \\ f^2\left(x\right).f'\left(x\right)=1+2x+3x^2 \end{cases}$

Giải :

$f^2\left(x\right).f'\left(x\right)=1+2x+3x^2 \Leftrightarrow \frac{\left[f(x)\right]^3}{3}=x+x^2+x^3+c, c$: hằng số.

$f\left(0\right)=1\Rightarrow c=\frac{1}{3}$

Do đó $f(x)=\sqrt[3]{3x^3+3x^2+3x+1}$

Xét hàm số : $g\left(x\right)=3x^3+3x^2+3x+1$ liên tục trên đoạn $x\in\left[-1;2\right]$.

Ta có $g'\left(x\right)=9x^2+6x+3$

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

$$g\left(-1\right)=-2,g\left(2\right)=40,g\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}\Rightarrow\max_{x\in\left[-1;2\right]}g\left(x\right)=40,\ \min_{x\in\left[-1;2\right]}g\left(x\right)=-2$$

Vậy $\begin{cases}\max\limits_{x\in\left[-1;2\right]}f\left(x\right)=\sqrt[3]{40}\quad khi\ x=2\\ \min\limits_{x\in\left[-1;2\right]}f\left(x\right)=\sqrt[3]{-2}\quad khi\ x=-1\end{cases}$

Ví dụ 11 : Cho a,b là các số dương thoả mãn $ab+a+b=3$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=\frac{3a}{b+1}+\frac{3b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}-a^2-b^2$ (**Dự bị Đại học- 2005**) .

Giải :

Từ $ab+a+b=3\Rightarrow 3-(a+b)=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}\Leftrightarrow a+b\ge 2$.

Ta có: $P=\frac{3a(a+1)+3b(b+1)}{\left(b+1\right)\left(1+a\right)}+\frac{ab}{a+b}-(a+b)^2+2ab$

$$P=3\frac{(a+b)^2-2ab+(a+b)}{ab+a+b+1}+\frac{ab}{a+b}-(a+b)^2+2ab$$

$$P=\frac{3}{4}\left[(a+b)^2+3(a+b)-6\right]+\frac{3-(a+b)}{a+b}-(a+b)^2+6-2(a+b)$$

$$P=\frac{1}{4}\left[-(a+b)^2+(a+b)+\frac{12}{a+b}+2\right].$$

Đặt $t=a+b\ge 2$. Xét hàm số $g(t)=-t^2+t+\frac{12}{t}+2$ với $t\ge 2$

Ta có: $g'(t)=-2t+1-\frac{12}{t^2}<0\quad\forall t\ge 2\Rightarrow\max\limits_{t\ge 2}g(t)=g(2)=\frac{3}{2}$.

Vậy $\max P=\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=b=1$.

Ví dụ 12: Cho x,y,z là số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$ .Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Giải :

Từ các đẳng thức $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ và điều kiện ta có:

$$P = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$= (x + y + z)\left[2 - \frac{(x + y + z)^2 - 2}{2}\right]$$

Đặt $t = x + y + z \Rightarrow -\sqrt{6} \le t \le \sqrt{6}$

Ta có: $P = t(2 - \frac{t^2 - 2}{2}) = -\frac{t^3}{2} + 3t = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $-\sqrt{6} \le t \le \sqrt{6}$.

Ta có: $f'(t) = \frac{3}{2}(-t^2 + 2) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]} f(t) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}; \quad \min\limits_{\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]} f(t) = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$

Vậy $\max P = 2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \sqrt{2}; y = z = 0$

$\min P = -2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -\sqrt{2}; y = z = 0$.

Ví dụ 13: Cho hai số $x, y \ne 0$ thay đổi thỏa mãn $\left(x + y\right)xy = x^2 + y^2 - xy$

Tìm GTLN của biểu thức : $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ (**Đại học Khối A – 2006**).

Giải:

Cách 1 :

Đặt: $u = x + y, v = xy \Rightarrow \left(x + y\right)xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow uv = u^2 - 3v$

$\Leftrightarrow \left(u + 3\right)v = u^2 \Leftrightarrow v = \frac{u^2}{u + 3}\left(\text{do } u \ne -3\right)$.

Vậy $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{\left(xy\right)^3} = \frac{u^3 - 3uv}{v^3} = \frac{u\left(u^2 - 3v\right)}{v^3} = \frac{u^2}{v^2} = \left(\frac{u + 3}{u}\right)^2$

Vì $u^2 \ge 4v \Rightarrow u^2 \ge \frac{4u^2}{u + 3} \Leftrightarrow \frac{4}{u + 3} \le 1 \Leftrightarrow \frac{u - 1}{u + 3} \ge 0$ (ở đây ta lưu ý $u \ne 0$) $\Leftrightarrow u \ge 1 \vee u < -3$

$\Rightarrow \frac{u + 3}{u} > 0$. Xét hàm $f\left(u\right) = \frac{u + 3}{u} \Rightarrow f'\left(u\right) = \frac{-3}{u^2} < 0$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(u) \le f(1) = 4 \Rightarrow A \le 16$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy GTLN của $A = 16$.

Cách 2 :

Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}$. Khi đó giả thiết của bài toán trở thành

$a+b=a^2+b^2-ab \ge \frac{1}{4}(a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \le a+b \le 4$

Và $A=a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=(a+b)^2 \le 16$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=2 \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 14 : Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2+y^2=1$.

Tìm GTLN, GTNN cảu biểu thức: $P=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$

(**Đại học Khối B – 2008**).

Giải:

Cách 1 :

Ta có: $P=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}=\frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2}$

* Nếu $y=0 \Rightarrow P=1$.

Nếu $y \ne 0$ thì đặt : $x=ty \Rightarrow P=\frac{2(t^2y^2+6ty^2)}{t^2y^2+2ty^2+3y^2}=\frac{2(t^2+6t)}{t^2+2t+3}=2f\left(t\right)$

Xét hàm số $f(t)$, ta có :

$f'\left(t\right)=\frac{-4t^2+6t+18}{\left(t^2+2t+3\right)^2}, f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t_1=3, t_2=-\frac{3}{2}, \quad \lim_{t\to\pm\infty} f\left(t\right)=1$

Lập bảng biến thiên ta được: GTLN $P=3$ và GTNN $P=-6$.

Cách 2 :

$P=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}=\frac{2x^2+12xy}{x^2+2xy+3y^2}$

$\Rightarrow P-3=\frac{2x^2+12xy}{x^2+2xy+3y^2}-3=\frac{-(x-3y)^2}{x^2+2xy+3y^2} \le 0$

$\Rightarrow P \le 3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{3}{2} \\ y=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$.

$P+6=\frac{2x^2+12xy}{x^2+2xy+3y^2}+6=\frac{2(2x+3y)^2}{x^2+2xy+3y^2} \ge 0$

$\Rightarrow P \ge -6$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$.

Vậy $\max P = 3; \quad \min P = -6$.

Tuy nhiên cách làm cái khó là chúng ta làm sao biết cách đánh giá $P - 3$ và $P + 6$?

Ví dụ 15: Cho bốn số nguyên a, b, c, d thay đổi thỏa: $1 \le a < b < c < d \le 50$

Tìm GTNN của biểu thức $P = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ (**Dự bị Đại học - 2002**).

Giải:

Vì $1 \le a < b < c < d \le 50$ và a, b, c, d là các số nguyên nên $c \ge b + 1$

Suy ra : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \ge \dfrac{1}{b} + \dfrac{b+1}{50} = f\left(b\right)$.

Dễ thấy $2 \le b \le 48$ nên ta xét hàm số : $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+1}{50}, x \in [2;48]$

Ta có $f'\left(x\right) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{50} \Rightarrow f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên ta được $\min\limits_{[2;48]} f\left(x\right) = f\left(5\sqrt{2}\right)$

Do 7 và 8 là hai số nguyên gần $5\sqrt{2}$ nhất vì vậy:

$\min\limits_{[2;48]} f\left(b\right) = \min\left\{f\left(7\right); f\left(8\right)\right\} = \min\left\{\dfrac{53}{175}; \dfrac{61}{200}\right\} = \dfrac{53}{175}$.

Vậy GTNN $P = \dfrac{53}{175}$.

Ví dụ 16: Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{b^2 + c^2} + \dfrac{b}{a^2 + c^2} + \dfrac{c}{a^2 + b^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Giải :

Để không mất tính tổng quát , giả sử $0 < a \le b \le c$ và thỏa mãn hệ thức $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Do đó $0 < a \le b \le c \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2}$$

$$= \frac{a^2}{a\left(1 - a^2\right)} + \frac{b^2}{b\left(1 - b^2\right)} + \frac{c^2}{c\left(1 - c^2\right)}$$

Xét hàm số : $f(x) = x\left(1 - x^2\right)$ liên tục trên nửa khoảng $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Ta có : $f'(x) = -3x^2 + 1 > 0, x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến trên nửa khoảng $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\left(1 - x^2\right) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 0 < f(x) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}$ hay $0 < x\left(1 - x^2\right) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Hay $\frac{1}{x\left(1 - x^2\right)} \ge \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{1 - x^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2, \forall x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Suy ra $\begin{cases} \frac{a}{1 - a^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \\ \frac{b}{1 - b^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 \\ \frac{c}{1 - c^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Vậy $\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chú ý : Để không mất tính tổng quát , giả sử $0 < a \le b \le c$ và thỏa mãn hệ thức $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ta có thể suy ra $0 < a \le b \le c < 1$.

Khi đó xét hàm số : $f(x) = x\left(1 - x^2\right)$ liên tục trên khoảng $(0;1)$.

$f'(x) = -3x^2 + 1, x \in (0;1)$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

- $f'(x) > 0, x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- $f'(x) < 0, x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right) \Rightarrow f(x)$ liên tục và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right)$.

Và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 0 < f(x) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Phần còn lại tương tự như trên.

Ví dụ 17: Xét các số thực không âm thay đổi x, y, z thỏa điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của:

$S = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \sqrt{\frac{1 - y}{1 + y}} + \sqrt{\frac{1 - z}{1 + z}}$.

Giải :

Tìm MinS :

Không mất t ính tổng quát giả sử: $0 \le x \le y \le z \le 1$.

Với $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x, y, z \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x, y, z \in [0;1]$.

Vì $\left(1-x\right)\left(1+x\right)=1-x^2\le 1$ nên: $\dfrac{1-x}{1+x}\ge (1-x)^2 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\ge 1-x$.

Dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp $x=0$ hoặc $x=1$.

Khi đó $S=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}}+\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}\ge 1-x+1-y+1-z$ hay $S\ge 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=0, z=1$ thì $S=2$.

Vậy: $\min S=2$.

Tìm Max*S*:

Không mất t ính tổng quát giả sử: $0\le x\le y\le z\le 1$.

Lúc đó: $z\ge \dfrac{1}{3};\ x+y\le \dfrac{2}{3}<\dfrac{4}{5}$.

$$S=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\le 1+\sqrt{\frac{1-(x+y)}{1+x+y}}+\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}=1+\sqrt{\frac{z}{2-z}}+\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

Đặt $h\left(z\right)=\sqrt{\dfrac{z}{2-z}}+\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$. Bài toán trở thành giá trị lớn nhất của $h\left(z\right)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$.

$h'(z)=0\Leftrightarrow z=\dfrac{1}{2}$. $Maxh(z)=\text{Max}\left\{h\left(\dfrac{1}{3}\right);\ h(1);\ h\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó : $S=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}}+\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}\le 1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=0, y=z=\dfrac{1}{2}$ thì $S=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy: $\max S=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 18: Cho ba số thực dương a,b,c thoả mãn: $abc+a+c=b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{2}{b^2+1}+\dfrac{3}{c^2+1}$

Giải :

Ta có : $a+c=b\left(1-ac\right)>0$. Dễ thấy $ac\ne 1\Rightarrow 0<a<\dfrac{1}{c}$

nên $b=\dfrac{a+c}{1-ac}\Rightarrow \text{P}=\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{2(1-ac)^2}{(a+c)^2+(1-ac)^2}+\dfrac{3}{c^2+1}$

$$P=\frac{2}{a^2+1}+\frac{2(a+c)^2}{(a^2+1)(c^2+1)}-2+\frac{3}{c^2+1}$$

Xét $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{2(x+c)^2}{(x^2+1)(c^2+1)}+\dfrac{3}{c^2+1}-2$

$f\left(x\right)=\dfrac{2(x^2+2cx+2c^2+1)}{(x^2+1)(c^2+1)}+\dfrac{3}{c^2+1}-2, 0<x<\dfrac{1}{c}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-4c(x^2+2cx-1)}{(x^2+1)^2(c^2+1)}\quad, 0<x<\dfrac{1}{c}$

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{c}\right): f'\left(x\right)=0$ có nghiệm $x_0=-c+\sqrt{c^2+1}$ và $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0, suy ra $f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=x_0$

$\Rightarrow \forall x\in\left(0;\dfrac{1}{c}\right): f\left(x\right)\le \dfrac{2}{c^2+1-c\sqrt{c^2+1}}+\dfrac{3}{c^2+1}-2=\dfrac{2c}{\sqrt{c^2+1}}+\dfrac{3}{c^2+1}$

Xét $g\left(c\right)=\dfrac{2c}{\sqrt{c^2+1}}+\dfrac{3}{c^2+1}, c>0$

$g'(c)=\dfrac{2(1-8c^2)}{(c^2+1)^2(\sqrt{c^2+1}+3c)}$

$g'(c)=0\Leftrightarrow \begin{cases} c>0 \\ 1-8c^2=0\end{cases}\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \forall c>0: g\left(c\right)\le\ g(\dfrac{1}{2\sqrt{2}})=\dfrac{2}{3}+\dfrac{24}{9}=\dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow P\le\dfrac{10}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b=\sqrt{2} \\ c=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{10}{3}$.

Ví dụ 19 : Cho tam giác ABC không tù. Tìm GTLN của biểu thức:
$P=\cos 2A+2\sqrt{2}(\cos B+\cos C)$ (**Đại học Khối A – 2004**) .

Giải:

Ta có $A\le 90\Rightarrow \cos 2A=2\cos^2 A-1\le 2\cos A-1=1-4\sin^2\dfrac{A}{2}$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \cos^2 A=\cos A$ (1).

$\cos B+\cos C=2\sin\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{B-C}{2}\le 2\sin\dfrac{C}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos\dfrac{B-C}{2}=1$ (2).

Đặt $t=\sin\dfrac{A}{2}\Rightarrow 0<t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ta có: $P\le -4t^2+4\sqrt{2}t+1=f(t)$

Xét hàm số $f(t),\ t\in\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right],$ có $f'(t)=-8t+4\sqrt{2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Lập bảng biến thiên ta có: $f(t)\le f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\Rightarrow P\le 3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos A=\cos^2 A\\ \cos\dfrac{B-C}{2}=1\\ \sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=90^0\\ B=C=45^0\end{cases}$.

Vậy $\max P=3$.

Ví dụ 20: Cho tam giác ABC có $A>B>C$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $M=\sqrt{\dfrac{x-\sin A}{x-\sin C}}+\sqrt{\dfrac{x-\sin B}{x-\sin C}}-1$.

Giải :

Biểu thức xác định khi $D=\left(-\infty;\sin C\right)\cup\left[\sin A;+\infty\right)$.

$M'=\sqrt{\dfrac{x-\sin C}{x-\sin A}}.\dfrac{\sin A-\sin C}{\left(x-\sin C\right)^2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x-\sin C}{x-\sin B}}.\dfrac{\sin B-\sin C}{\left(x-\sin C\right)^2}>0,\forall x\in D\Rightarrow M$ liên tục và đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\sin C\right),\left[\sin A;+\infty\right)$

Do đó $\min M=M\left(\sin A\right)=\sqrt{\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}}-1$

Ví dụ 21: Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác . Xác định vị trí điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải :

Đặt $BM=x,0<x<\dfrac{a}{2}\Rightarrow NM=BC-2BM=a-2x$

Trong tam giác vuông BMQ có $\tan\widehat{QBM}=\dfrac{QM}{BM}\Rightarrow QM=BM.\tan\widehat{QBM}=x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là $S\left(x\right)=MN.QM=\left(a-2x\right)x\sqrt{3}$

Bài toán quy về : Tìm giá trị lớn nhất của $S\left(x\right)=\left(a-2x\right)x\sqrt{3},x\in\left(0;\dfrac{a}{2}\right)$

$S'(x) = -4\sqrt{3}x + a\sqrt{3}, x \in \left(0;\frac{a}{2}\right)$ $\qquad$ $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$

Bảng biến thiên của $S(x)$ trên khoảng $\left(0;\frac{a}{2}\right)$

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{a}{4}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

$a.$ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[-3;2]$

$b.$ $f(x) = \dfrac{3x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 3}$

2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

$a.$ $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ trên đoạn $[-2;3]$.

$b.$ $f(x) = x^6 - 3x^4 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ trên đoạn $[-1;\ 1]$.

3. Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số: $f(x) = \left|x^3 + 3x^2 - 72x + 90\right|$ trên đoạn $[-5;5]$.

4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \left|x^3 - 3x + 2\right|$ trên đoạn $[-3;\ 2]$.

5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}$

Hướng dẫn .

1.

$a.$ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, x \in [-3;2]$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-3;2]$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, f(-1) = 2 \\ x = 0, f(0) = 3 \\ x = 1, f(-1) = 2 \end{array}\right.$

$f(-3) = 66, f(2) = 11$

Bảng biến thiên

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	66	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	11

Từ bảng biến thiên suy ra : $\max\limits_{[-3;2]} f(x) = 66 \ \ khi \ \ x = -3$ $\min\limits_{[-3;2]} f(x) = 2 \ \ khi \ \ x = -1, x = 1$

$b.\ \ f(x) = \dfrac{3x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 3}$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

Ta có : $f'(x) = \dfrac{-4x^2 - 22x - 10}{(x^2 + 2x + 3)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 7 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

Từ bảng biến thiên suy ra : $\max f(x) = 7 \ \ khi \ \ x = -\dfrac{1}{2}$ $\min f(x) = \dfrac{5}{2} \ \ khi \ \ x = -5$

2.

$a.\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ trên đoạn $[-2;3]$.

Hàm số đã cho xác định trên $[-2;3]$.

$f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [-2;3]$

$f(-2) = \sqrt{17},\ \mathrm{f}(2) = 1,\ \mathrm{f}(3) = \sqrt{2}$.

Vậy :

$\min\limits_{x \in [-2;3]} f(x) = 1 \ \ khi \ \ x = 2$.

$\max\limits_{x \in [-2;3]} f(x) = \sqrt{17} \ \ khi \ \ x = -2$.

$b.\ f(x) = x^6 - 3x^4 + \dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}$ trên đoạn $[-1;\ 1]$.

Hàm số đã cho xác định trên $[-1;\ 1]$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow t \in [0;\ 1]$,$\forall x \in \left[-1;\ 1\right]$, ta có:

$f\left(t\right) = t^3 - 3t^2 + \frac{9}{4}t + \frac{1}{4}$ liên tục trên đoạn $[0;\ 1]$

$$\Rightarrow f^{/}\left(t\right) = 3t^2 - 6t + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{3}{2} \notin \left[0;1\right] \end{array}\right.$$

$f(0) = \frac{1}{4},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},\ f(1) = \frac{1}{2}.$

Vậy :

$\min\limits_{t\in\left[0;1\right]} f\left(t\right) = \frac{1}{4}\ \ khi\ \ t = 0\ \ hay\ \ \min\limits_{x\in\left[-1;1\right]} f\left(x\right) = \frac{1}{4}\ \ khi\ \ x = 0$

$\max\limits_{t\in\left[0;1\right]} f\left(t\right) = \frac{3}{4}\ \ khi\ \ t = \frac{1}{2}\ \ hay\ \ \max\limits_{x\in\left[-1;1\right]} f\left(x\right)\ \ khi\ \ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$

3. $f\left(x\right) = \left|x^3 + 3x^2 - 72x + 90\right|$ trên đoạn $x \in \left[-5;5\right]$.

Hàm số đã cho xác định trên $\left[-5;5\right]$.

Đặt $g\left(x\right) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90, x \in \left[-5;5\right]$

Ta có : $g'\left(x\right) = 3x^2 + 6x - 72$

$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \notin \left[-5;5\right] \\ x = 4 \in \left[-5;5\right] \end{array}\right.$$

$g\left(4\right) = -86, g\left(-5\right) = 400, g\left(5\right) = -70$

$\Rightarrow -86 \le g\left(x\right) \le 400 \Rightarrow 0 \le \left|g\left(x\right)\right| \le 400 \Rightarrow 0 \le f\left(x\right) \le 400$

Vậy : $\max\limits_{x\in\left[-5;5\right]} f\left(x\right) = 400\ \ khi\ \ x = -5$.

4. $f\left(x\right) = \left|x^3 - 3x + 2\right|$ trên đoạn $\left[-3;\ 2\right]$

Hàm số đã cho xác định trên $\left[-3;\ 2\right]$.

Đặt $g\left(x\right) = x^3 - 3x + 2, x \in \left[-3;\ 2\right]$

$g^{/}(x) = 3x^2 - 3$

$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3;\ 2]$

$g(-3) = -16,\ g(-1) = 4,\ g(1) = 0,\ g(2) = 4$

$\Rightarrow -16 \le g(x) \le 4\ ,\forall x \in [-3;\ 2] \Rightarrow 0 \le \left|g(x)\right| \le 16\ ,\forall x \in [-3;\ 2]$

$\Rightarrow 0 \le f\left(x\right) \le 16\ ,\forall x \in [-3;\ 2].$

Vậy $\max\limits_{x\in\left[-3;\ 2\right]} f\left(x\right) = 16,\ \min\limits_{x\in\left[-3;\ 2\right]} f\left(x\right) = 0$

5.

Cách 1 :

$y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 4^{\sin^2 x} + 4^{1-\sin^2 x} = 4^{\sin^2 x} + \dfrac{4}{4^{\sin^2 x}}$

Đặt $t = 4^{\sin^2 x}, 0 \le \sin^2 x \le 1 \Leftrightarrow 4^0 \le 4^{\sin^2 x} \le 4 \Leftrightarrow 1 \le t \le 4$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{t^2 + 4}{t}$ liên tục trên đoạn $\left[1;4\right]$.

Ta có : $f'\left(t\right) = \dfrac{t^2 - 4}{t^2}, \forall t \in \left[1;4\right]$ và $f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{t\in\left[1;4\right]} f\left(t\right) = 4 \Rightarrow \min y = 4$, $\max\limits_{t\in\left[1;4\right]} f\left(t\right) = 5 \Rightarrow \min y = 5$.

Cách 2:

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng , trung bình nhân.

$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \ge 2\sqrt{4} = 4$. Đẳng thức xảy ra khi : $4^{\sin^2 x} = 4^{\cos^2 x} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Và $\begin{cases} 4^{\sin^2 x} \ge 1 \\ 4^{\cos^2 x} \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{\sin^2 x} - 1 \ge 0 \\ 4^{\cos^2 x} - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(4^{\sin^2 x} - 1\right)\left(4^{\sin^2 x} - 1\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \le 5$.

Đẳng thức xảy ra khi hoặc $\sin x = 0$ hoặc $\cos x = 0$

Vậy $\min y = 4$ khi $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ và $\max y = 5$ khi $x = k\dfrac{\pi}{2}$.

Bài 4 :TIỆM CẬN HÀM SỐ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang:

- Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là ***đường tiệm cận ngang*** (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = y_0$.
- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là ***đường tiệm cận đứng*** (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right) = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right) = -\infty$.

2. Đường tiệm cận xiên:

Đường thẳng $y = ax + b$ $\left(a \ne 0\right)$ được gọi là ***đường tiệm cận xiên*** (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = \left[f\left(x\right) - \left(ax + b\right)\right] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = \left[f\left(x\right) - \left(ax + b\right)\right] = 0$ Trong đó

$a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f\left(x\right) - ax\right]$ hoặc $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f\left(x\right) - ax\right]$.

Chú ý : Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên trở thành tiệm cận đứng.

4.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1 : Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số :

1. $y = f\left(x\right) = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$

2. $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

3. $y = f\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Giải :

1. $y = f\left(x\right) = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$

Hàm số đã cho xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \left\{2\right\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2$ và

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị khi $x \to -\infty$ và $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to \left(-2\right)^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to \left(-2\right)^-} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = -\infty$ và

$\lim\limits_{x \to \left(-2\right)^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to \left(-2\right)^+} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = +\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị khi $x \to \left(-2\right)^-$ và $x \to \left(-2\right)^+$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{x\left(x + 2\right)} = 0 \Rightarrow$ hàm số f không có tiệm cận xiên khi $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x\left(x + 2\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{x + 2} = 0 \Rightarrow$ hàm số f không có tiệm cận xiên khi $x \to +\infty$.

2. $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Hàm số xác định trên tập hợp $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$

Ta có: $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x + \dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x + \dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \to 1^+$ và $x \to 1^-$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x + \dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty \Rightarrow$ hàm số không có tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$ và $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$

$\Rightarrow y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

3. $y = f\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Hàm số đã cho xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \left\{0\right\}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x} = -\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -1, \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1, \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \to 0^-$ và $x \to 0^+$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x^2} = 0 \Rightarrow$ hàm số f không có tiệm cận xiên khi $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x^2} = 0 \Rightarrow$ hàm số f không có tiệm cận xiên khi $x \to +\infty$

Chú ý :

Cho hàm phân thức $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

a) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của hệ $\begin{cases} v(x) = 0 \\ u(x) \neq 0 \end{cases}$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow$ $\deg u(x) \le \deg v(x)$, trong đó $\deg$ là bậc của đa thức.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $\Leftrightarrow \deg u(x) = \deg v(x) + 1$.Khi đó để tìm tiệm cận xiên ta chia $u(x)$ cho $v(x)$, ta được: $y = ax + b + \dfrac{u_1(x)}{v(x)}$, trong đó $\deg u_1(x) < \deg v(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u_1(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{u_1(x)}{v(x)} = 0 \Rightarrow y = ax + b$ là TCX của đồ thị hàm số.

* Nếu đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì không có tiệm cận xiên và ngược lại.

Ví dụ 2: Tìm tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

1. $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$
2. $y = f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Giải :

1. $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}} = 1$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2 + \dfrac{2}{x}}{\sqrt{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}} + 1} = -1$$

$\Rightarrow y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \to +\infty$.

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2 + \dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}} - 1} = 1$$

$\Rightarrow y = -x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \to -\infty$.

2. $y = f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Hàm số đã cho xác định trên $D = \left(-\infty; -1\right] \cup \left[1; +\infty\right)$.

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

$\Rightarrow y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \to +\infty$.

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to -\infty$.

Nhận xét:

1) Xét hàm số $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} \quad (a \neq 0)$.

* Nếu $a < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

* Nếu $a > 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = \sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ khi $x \to +\infty$ và $y = -\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ khi $x \to -\infty$.

2) Đồ thị hàm số $y = mx+n+p\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a > 0)$ có tiệm cận là đường thẳng :

$y = mx+n+p\sqrt{a}\,|\,x+\frac{b}{2a}\,|$.

Ví dụ 3: Tùy theo giá trị của tham số m. Hãy tìm tiệm cận của đồ thị hàm số sau: $y = f(x) = \frac{x-1}{mx^3-1}$.

Giải :

* $m = 0 \Rightarrow y = -x+1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

* $m = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^3-1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Vì $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

* $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{m}}\right\}$

Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đường thẳng $x = \frac{1}{\sqrt[3]{m}}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C). Chứng minh rằng:

1. Tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến hai tiệm cận không đổi

2. Không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua giao điểm của hai tiệm cận.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Ta có: $y = x + 2 + \dfrac{3}{x-1} \Rightarrow$ hai tiệm cận của đồ thị hàm số là $\Delta_1 : x - 1 = 0$ và $\Delta_2 : x - y + 2 = 0$

Gọi $M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; x_0 + 2 + \dfrac{3}{x_0 - 1}\right) \Rightarrow d_1 = d\left(M, \Delta_1\right) = \left|x_0 - 1\right|$

$$d_2 = d\left(M, \Delta_2\right) = \frac{\left|x_0 - x_0 - 2 - \dfrac{3}{x_0 - 1} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\left|x_0 - 1\right|}$$

$\Rightarrow d_1.d_2 = \left|x_0 - 1\right| \dfrac{3}{\sqrt{2}\left|x_0 - 1\right|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ đpcm.

2. Gọi $I = \Delta_1 \cap \Delta_2 \Rightarrow I(1;3)$

Giả sử Δ là tiếp tuyến bất kì của đồ thị (C) $\Rightarrow$ phương trình của Δ có dạng

$$\Delta : y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \left(1 - \frac{3}{(x_0 - 1)^2}\right)(x - x_0) + x_0 + 2 + \frac{3}{x_0 - 1}$$

$$\Rightarrow I \in \Delta \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3}{(x_0 - 1)^2}\right)(1 - x_0) + x_0 + 2 + \frac{3}{x_0 - 1} = 3$$

$\Leftrightarrow 1 - x_0 + \dfrac{3}{x_0 - 1} + x_0 + 2 + \dfrac{3}{x_0 - 1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{6}{x_0 - 1} = 0$ ta thấy phương trình này vô nghiệm. Vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị (C) đi qua I.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (C), với m là tham số thực.

1. Tìm m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị (C) bằng 45^0.

2. Tìm m để đồ thị (C) có tiệm cận xiên tạo cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác ΔAOB có diện tích bằng 4.

Giải :

Ta có: $y = mx - 2 + \dfrac{6m-2}{x+3m}$

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận $\Leftrightarrow 6m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{3}$.

Phương trình hai đường tiệm cận là: $\Delta_1 : x = -3m \Leftrightarrow x + 3m = 0$

Và $\Delta_2 : y = mx - 2 \Leftrightarrow mx - y - 2 = 0$.

Véc tơ pháp tuyến của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là : $\overrightarrow{n_1} = (1;0)$, $\overrightarrow{n_2} = (m;-1)$

1. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 45^0 khi và chỉ khi

$$\cos 45^0 = \cos \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm.

2. Hàm số có tiệm cận xiên $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \dfrac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó: $A(0;-2)$, $B\left(\dfrac{2}{m};0\right)$

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}OA.OB = 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.|-2|.\left|\dfrac{2}{m}\right| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy $m = \pm 2$ là những giá trị cần tìm.

Bài 5 : PHÉP TỊNH TIẾN VÀ TÂM ĐỐI XỨNG

5.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Điểm uốn của đồ thị :

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a;x_0)$ vì $(x_0;b)$.Nếu f'' đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $I(x_0;f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Nếu hàm số f có đạo hàm cấp hai tại điểm x_0 thì $I(x_0;f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số thì $f''(x_0) = 0$

2. Phép tịnh tiến hệ tọa độ :

Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tình tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là $\begin{cases} x = X + x_o \\ y = Y + y_0 \end{cases}$, $I(x_0;f(x_0))$.

5.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 : Chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$.

Ví dụ 1:Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

1. Giải phương trình $f'(\sin x) = 0$
2. Giải phương trình $f''(\cos x) = 0$
3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

1. $f'(x) = x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Cả hai nghiệm x đều nằm ngoài đoạn $[-1;1]$. Do đó phương trình $f'(\sin x) = 0$ vô nghiệm.

2. $f''(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Do đó phương trình

$f''(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. $f''(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{47}{12}, f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{17}{4}$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là : $y = -\dfrac{17}{4}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{47}{12} \quad hay \quad y = -\dfrac{17}{4}x + \dfrac{145}{24}$

Ví dụ 2 : Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C)

1. Xác định điểm I thuộc đồ thị (C) của hàm số đã cho , biết rằng hoành độ của điểm I nghiệm đúng phương trình $f''(x) = 0$.
2. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình đường cong (C) đối với hệ IXY . Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).
3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy .Chứng minh rằng trên khoảng $(-\infty;1)$ đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm I của (C) và trên khoảng $(1;+\infty)$ đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Giải :

1. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$ $\quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Hoành độ điểm I thuộc (C) là $x = 1, f(1) = -1$. Vậy $I(1;-1) \in (C)$.

2. Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

Phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY là :

$Y - 1 = (X+1)^3 - 3(X+1)^2 + 1 \Leftrightarrow Y = X^3 - 3X.$

Vì đây là một hàm số lẻ nên đồ thị (C) của nó nhận gốc toạ độ I làm tâm đối xứng .

3. $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(1) = -3$. Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -3(x-1) - 1 \Leftrightarrow y = g(x) = -3x + 2$.

Xét hàm $h(x) = f(x) - g(x) = (x^3 - 3x^2 + 1) - (-3x + 2) = (x-1)^3$ trên $\mathbb{R}$

Dễ thấy $\begin{cases} h(x) < 0, x < 1 \\ h(x) > 0, x > 1 \end{cases}$. Điều này chứng tỏ trên khoảng $(-\infty;1)$ đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm I của (C) và trên khoảng $(1;+\infty)$ đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + (2+3m)x - 2m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số thực. Gọi I là điểm có hoành độ là nghiệm đúng phương trình $f''(x) = 0$ .Tìm tham số m để đồ thị của hàm số có cực trị và điểm I nằm trên trục Ox .

Giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = 3x^2 - 2(m+3)x + 2 + 3m$ và $y'' = 6x - 2(m+3)$

Đồ thị của hàm số có cực trị và điểm I nằm trên trục Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ y_{(x_u)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - 3(2+3m) > 0 \\ \left(\dfrac{m+3}{3}\right)^3 - (m+3).\left(\dfrac{m+3}{3}\right)^2 + (2+3m).\left(\dfrac{m+3}{3}\right) - 2m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ 2m^3 - 9m^2 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 3 \vee m = \frac{3}{2}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

$a)$ Vẽ đồ thị (C) của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & khi \;\; x < -1 \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} & khi \;\; x \ge -1 \end{cases}$.

$b)$ Tìm đạo hàm cuả hàm số $f(x)$ tại điểm $x = -1$.

$c)$ Chứng minh rằng $I(-1;0)$ là điểm uốn của đường cong $y = f(x)$.

$d)$ Từ đồ thị (C) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số $y = -f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x+1}{x-1} & khi \;\; x < -1 \\ -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} & khi \;\; x \ge -1 \end{cases}$

Hướng dẫn :

$b)$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$. Hàm số $f(x)$ tại điểm $x=-1$ và $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

$c)$ $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(x-1)^2} & khi \ \ x < -1 \\ -\dfrac{1}{2} & khi \ \ x = -1 \\ x + \dfrac{1}{2} & khi \ \ x > -1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{(x-1)^3} & khi \ \ x < -1 \\ 1 & khi \ \ x > -1 \end{cases}$

Dễ thấy $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\begin{cases} f''(x) < 0 & khi \ \ x < -1 \\ f''(x) > 0 & khi \ \ x > -1 \end{cases} \Rightarrow I(-1;0)$ là điểm uốn của đồ thị của (C).

Dạng 2 : Tâm đối xứng của đồ thị.

Ví dụ 1 :Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số đã cho có 3 cực trị A, B, C

và trọng tâm G của tam giác ABC trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x}{4x-m}$.

Giải :

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{4x}{4x-m}$ có tâm đối xứng là $I(\dfrac{m}{4}\,;1)$

Hàm số : $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$, liên tục trên R.

Ta có : $y' = 4x^3 - 3mx^2 + 4$

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt , nghĩa là phương trình $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = 4x^3 - 3mx^2 + 4$ liên tục trên R và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

Ta có : $g'(x) = 12x^2 - 6mx \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, g(0) = 4 > 0 \\ x = \dfrac{m}{2}, g(\dfrac{m}{2}) = \dfrac{16 - m^3}{4} \end{array}\right.$

$g'\left(x\right)$ đổi dấu 2 lần qua nghiệm , và $g\left(x\right) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} \dfrac{m}{2} > 0 \\ \dfrac{16 - m^3}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt[3]{2}$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ là tọa độ 3 cực trị thỏa mãn đề bài, khi đó

$$y = y'(\frac{x}{4} - \frac{m}{16}) + (-\frac{3m^2x^2}{16} + 3x + \frac{5m}{4} + 2)$$

$$\Rightarrow y_i = -\frac{3m^2x_i^2}{16} + 3x_i + \frac{5m}{4} + 2, y_i' = 0 \ \ (i = 1,2,3) \ .$$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC, nên $G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; -\frac{m^2}{16}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) + \frac{5m}{4} + 2\right)$$

Do x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$, theo định lý Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{3m}{4} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \dfrac{m}{4} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \dfrac{9m^2}{16} \end{cases}$$

Khi đó $G\left(\dfrac{m}{4}; -\dfrac{9m^4}{16^2} + \dfrac{5m}{4} + 2\right)$ và trọng tâm G của tam giác ABC trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x}{4x - m}$ khi và chỉ khi $G\left(\dfrac{m}{4}; -\dfrac{9m^4}{16^2} + \dfrac{5m}{4} + 2\right) \equiv I(\dfrac{m}{4}; 1)$

$$\Leftrightarrow -\frac{9m^4}{16^2} + \frac{5m}{4} + 2 = 1 \Leftrightarrow (m - 4)(9m^3 + 36m^2 + 144m + 64) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 4$$

Vậy $m = 4$ thỏa mãn đề bài .

Chú ý : Ngoài cách giải trên ta có thể trình bày :
Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt , nghĩa là phương trình $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Khi đó phương trình $\dfrac{4x^3 + 4}{x^2} = 3m$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0 . Nói khác hơn đường thẳng $y = 3m$ cắt đồ thị của hàm số $h\left(x\right) = \dfrac{4x^3 + 4}{x^2}$, tại 3 giao điểm . Đến đây đã dễ dàng với các em rồi đúng không?.

Ví dụ 2 : Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C). Gọi (C') là đồ thị đối xứng với (C) qua điểm $A(3;4)$. Tìm phương trình đồ thị (C').

Giải :

Gọi $M(x,y) \in (C)$ và $M'(x',y') \in (C')$ đối xứng qua đồ thị (C) qua điểm $A(3;4)$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = 3 \\ \dfrac{y+y'}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$

Thay vào đồ thị (C) : $8 - y' = \dfrac{(6-x')^2 - (6-x') + 1}{6 - x' - 1} = \dfrac{x'^2 - 11x' + 31}{5 - x'}$

Hay $y' = 8 - \dfrac{x'^2 - 11x' + 31}{5 - x'} = \dfrac{9 + 3x' - x'^2}{5 - x'}$.

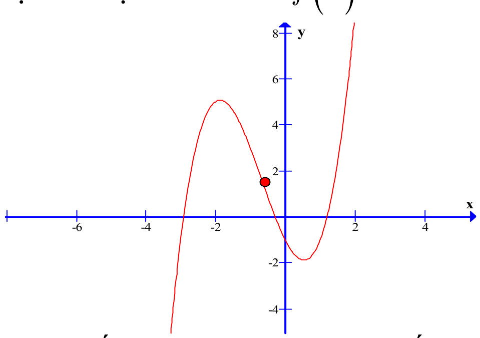
Vậy phương trình đồ thị (C') : $y = \dfrac{-x^2 + 3x + 9}{-x + 5} = \dfrac{x^2 - 3x - 9}{x - 5}$.

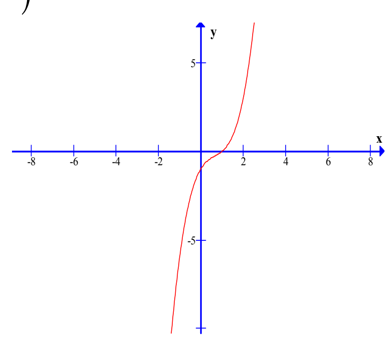
Bài 6: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

6.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

Dáng điệu đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$





Một số tính chất thường gặp của hàm số bậc ba

1. Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ :có 2 nghiem phan biet } x_1, x_2 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$

2. Giả sử $a > 0$ ta có :

$a)$ Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $> \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiem phan biet } \alpha < x_1 < x_2 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$$

$b)$ Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $< \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiem phan biet } x_1 < x_2 < \alpha \\ f(\alpha) > 0 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$$

Tương tự cho trường hợp $a < 0$.

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $f\left(x\right) = x^3 + 3x^2 + 1$.

Giải:

- Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$
- Giới hạn : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ hàm số không có tiệm cận.
- Đạo hàm : $f'\left(x\right) = 3x^2 + 6x$

$$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, f\left(-2\right) = 5 \\ x = 0, f\left(0\right) = 1 \end{array}\right.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = -2, f\left(-2\right) = 5$ và có điểm cực tiểu tại $x = 0, f\left(0\right) = 1$

- Bảng biến thiên :

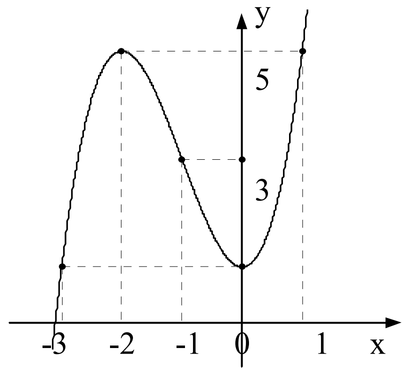
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

- $f''\left(x\right) = 6x + 6$

$f''\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1, f\left(-1\right) = 3$, $f''\left(x\right)$ đổi dấu một lần qua nghiệm $x = -1$ nên $I\left(-1;3\right)$ là điểm uốn của đồ thị .

- Đồ thị :

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $\left(-3;1\right),\left(-2;5\right),\left(-1;3\right),\left(0;1\right),\left(1;5\right)$ và nhận điểm $I\left(-1;3\right)$ là điểm uốn của đồ thị .



Ví dụ 2: Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+mx+4$, trong đó m là tham số thực.
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với $m=0$
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Giải :

1. Với $m=0$, ta có hàm số $y=-x^3-3x^2+4$

- Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$
- Giới hạn : $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ hàm số không có tiệm cận.
- Đạo hàm : $y'=-3x^2-6x$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2, y\left(-2\right)=0\\ x=0, y\left(0\right)=4\end{array}\right.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;2\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x=0, y\left(0\right)=4$ và có điểm cực tiểu tại $x=-2, y\left(-2\right)=0$

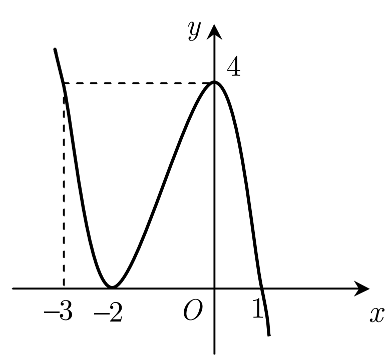
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

- Đồ thị :

Giao điểm của đồ thị với trục Oy $A\left(0;4\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục Ox $B\left(-2;0\right),C\left(1;0\right)$



2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$y' = -3x^2 - 6x + m \le 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \le 3x^2 + 6x = f\left(x\right)$

Hàm số $f\left(x\right) = 3x^2 + 6x$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$

Ta có $f'\left(x\right) = 6x + 6 > 0, \forall x > 0$ và $f\left(0\right) = 0$.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$
	0		

Từ đó ta được : $m \le 0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. $a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số $f\left(x\right) = -x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 3$.Chứng minh rằng phương trình $-x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt , trong đó có một nghiệm dương nhỏ hơn $\dfrac{1}{2}$.

$b)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \dfrac{17}{3}$.Chứng minh rằng phương trình $f\left(x\right) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$c)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số $f\left(x\right) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ x_0, biết rằng $f''\left(x_0\right) = -6$. Giải bất phương trình $f'\left(x-1\right) > 0$

$d)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm $M\left(4;4\right)$ và cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại 3 điểm phân biệt.

2. Tìm hệ số a,b,c sao cho đồ thị của hàm số $f\left(x\right) = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ là -1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với giá trị a,b,c vừa tìm được

3. Tìm các hệ số m,n,p sao cho hàm số $f\left(x\right) = -\dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx + p$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$ và đồ thị $\left(C\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $\left(d\right) : y = 3x - \dfrac{1}{3}$ tại giao điểm của $\left(C\right)$ với trục tung .

Hướng dẫn :

1. $a)$ Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình cho có ba nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2 < 2 < x_3$ và

$$\begin{cases} f(0) = -3 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow x \in \left(0;\frac{1}{2}\right).$$

$b)$ $f(-2)f(0) < 0$.Hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ và theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục , tồn tại một số thực $\alpha \in (-2;0)$ sao cho $f(\alpha) = 0$. Số α là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Mặt khác hàm số f đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $\alpha \in (-2;0)$.

$f(0)f(4) < 0$. Hàm số f liên tục trên đoạn $[0;4]$ và theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục , tồn tại một số thực $\beta \in (0;4)$ sao cho $f(\beta) = 0$. Số β là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Mặt khác hàm số f đồng biến trên khoảng $(0;4)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $\beta \in (0;4)$.

Tương tự phương trình có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(4;+\infty)$.

Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt , do đó phương trình $f(x) = 0$

có 3 nghiệm phân biệt.

$c)$ $f''(x) = -6x + 6 \Rightarrow x_0 = 2, f(2) = 24 \Rightarrow (t) : y = 9x + 6$

$f'(x-1) = -3(x-1)^2 + 6(x-1) + 9 = -3x^2 + 12x$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

2.

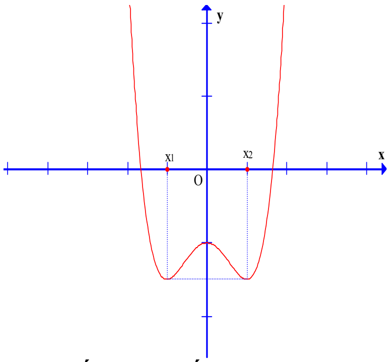
$$\begin{cases} 2 = c \\ f(-1) = -1 + a - b + c = 1 \\ f'(-1) = 3 - 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

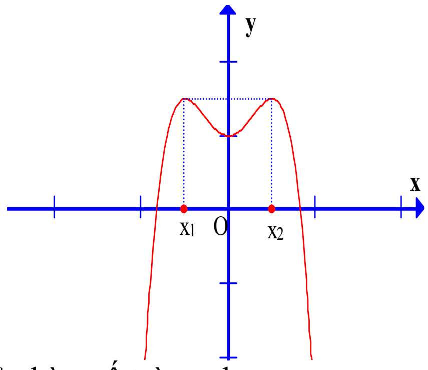
3.

$$\begin{cases} (d) \cap Oy = \left\{A\left(0;-\frac{1}{3}\right)\right\} \\ f(0) = p = -\frac{1}{3} \\ f'(0) = n = 3 \\ f'(3) = 6m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{1}{3} \\ n = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

Hàm số trùng phương $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

Dáng điệu đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$





Một số tính chất thường gặp của hàm số trùng phương

1. Đồ thị của hàm số $f\left(x\right) = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng khi phương trình: $aX^2 + bX + c = 0,\left(X = x^2 \geq 0\right)$ có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa $X_1 = 9X_2$.

2. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \left(1\right)$

Đặt $t = x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t}$, ta có phương trình: $at^2 + bt + c = 0 \quad \left(2\right)$ Một nghiệm dương của $\left(2\right)$ ứng với 2 nghiệm của $\left(1\right)$.

Vậy điều kiện cần và đủ để phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm là phương trình $\left(1\right)$ có ít nhất một nghiệm không âm.

$\left(1\right)$ có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ $\left(2\right)$ có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases}$

$\left(1\right)$ có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ $\left(2\right)$ có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases}$

$\left(1\right)$ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ $\left(2\right)$ có 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left(1\right)$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ $\left(2\right)$ có nghiệm thỏa $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P = 0 \\ \dfrac{S}{2} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{S}{2} = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

(1) có 4 nghiệm tạo thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \end{cases}$. Ta giải hệ pt: $\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ S = t_1 + t_2 \\ P = t_1 t_2 \end{cases}$

3. Phương trình bậc 4 có tính đối xứng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (1)$

- Nếu $a = 0$, ta có phương trình: $x(bx^2 + cx + b) = 0$
- Nếu $a \ne 0$, ta có phương trình tương đương:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, phương trình được viết thành:

$a(t^2 - 2) + bt + c = 0, |t| \ge 2 \quad (2)$

Chú ý:

Khi khảo sát hàm số $t = x + \dfrac{1}{x}$, ta có:

* Một nghiệm lớn hơn 2 của phương trình (2) tương ứng với 2 nghiệm dương của phương trình (1).

* Một nghiệm nhỏ hơn 2 của phương trình (2) tương ứng với 2 nghiệm âm của phương trình (1).

* Một nghiệm $t = -2$ của phương trình (2) tương ứng với nghiệm $x = -1$ của phương trình (1).

* Một nghiệm $t = 2$ của phương trình (2) tương ứng với nghiệm $x = 1$ của phương trình (1).

* Phương trình $t = x + \dfrac{1}{x}$ vô nghiệm khi $|t| < 2$

4. Phương trình bậc 4 có tính đối xứng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \quad (1)$

- Nếu $a = 0$, ta có phương trình: $x(bx^2 + cx - b) = 0$
- Nếu $a \ne 0$, ta có phương trình tương đương:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$, phương trình được viết thành:

$a(t^2 + 2) + bt + c = 0, t \in \mathbb{R} \quad (2)$

Chú ý: Phương trình $t = x - \dfrac{1}{x}$ có 2 nghiệm trái dấu với mọi t

5. $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$, với $a + b = c + d$.

Đặt $t = x^2 + (a+b)x$.

6. $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$,với $\alpha = \dfrac{a-b}{2}$.Đặt $t = x + \dfrac{a+b}{2}$, $t \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.

Giải:

- Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$
- Giới hạn : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ hàm số không có tiệm cận.
- Đạo hàm : $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, f(0) = -3 \\ x = -1, f(-1) = -4 \\ x = 1, f(-1) = -4 \end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = 0, f(0) = -3$ và có điểm cực tiểu tại $x = -1, f(-1) = -4$

và $x = 1, f(1) = -4$

- $f''(x) = 12x^2 - 4$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -3\dfrac{5}{9} \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -3\dfrac{5}{9} \end{array}\right.$$

, $f''(x)$ đổi dấu hai lần qua nghiệm $x = x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

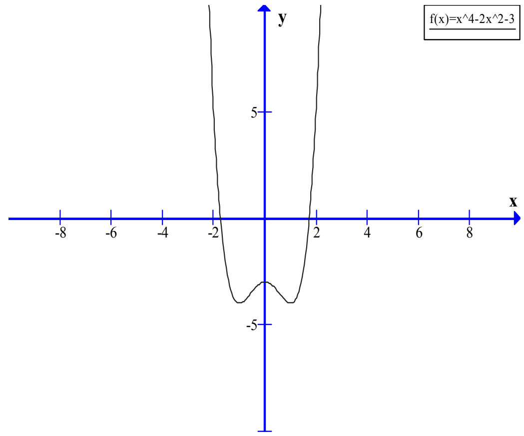
và $x = x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ nên $U_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; -3\dfrac{5}{9}\right)$ và $U_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; -3\dfrac{5}{9}\right)$ là hai điểm uốn của đồ thị .

- Đồ thị :

Giao điểm của đồ thị với trục Oy $A\left(0;-3\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục Ox $B\left(-\sqrt{3};0\right),C\left(\sqrt{3};0\right)$

Đồ thị là hàm số chẵn nên nhận trục Oy làm trục đối xứng



Ví dụ 2:

Chứng minh rằng phương trình: $x^4-2\left(m^2+2\right)x^2+m^4+3=0$ luôn có 4 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 với mọi giá trị của m.

Tìm giá trị m sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=11$.

Giải:

$x^4-2\left(m^2+2\right)x^2+m^4+3=0\ (1)$

Đặt : $t=x^2$, ta có : $t^2-2\left(m^2+2\right)t+m^4+3=0\ (2)\quad (t\ge 0)$

Ta chứng tỏ (2) luôn có hai nghiệm : $0<t_1<t_2$.

$\Delta'=\left(m^2+2\right)^2-\left(m^4+3\right)=4m^2+1>0$ với mọi m.

Vậy (2) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 và $t_1\cdot t_2=m^4+3>0$ $t_1+t_2=2\left(m^2+2\right)>0$

Do đó phương trình (1) có 4 nghiệm : $-\sqrt{t_1},\sqrt{t_1},-\sqrt{t_2},\sqrt{t_2}$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$

$=\left(-\sqrt{t_1}\right)^2+\left(\sqrt{t_1}\right)^2+\left(-\sqrt{t_2}\right)^2+\left(\sqrt{t_2}\right)^2+\left(-\sqrt{t_1}\right)\cdot\left(\sqrt{t_1}\right)\cdot\left(-\sqrt{t_2}\right)\cdot\left(\sqrt{t_2}\right)=2\left(t_1+t_2\right)+t_1\cdot t_2$

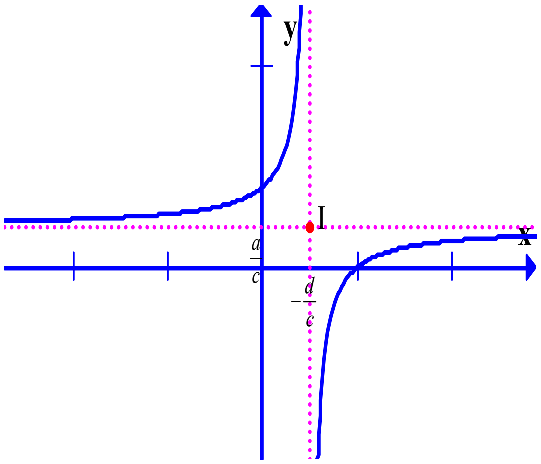
$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=4\left(m^2+2\right)+m^4+3=m^4+4m^2+11$

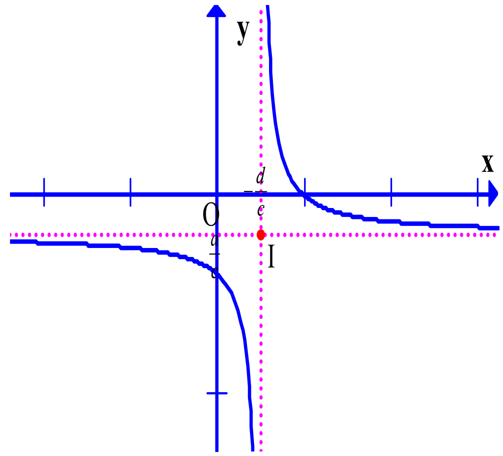
$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=11\Leftrightarrow m^4+4m^2+11=11\Leftrightarrow m^4+4m^2=0\Leftrightarrow m=0$

Hàm số hữu tỷ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$$f\left(x\right)=\frac{ax+b}{cx+d}\quad \left(c\ne 0, ad-bc\ne 0\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$$

Dáng điệu đồ thị của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad \left(c\ne 0, ad-bc\ne 0\right)$





Ví dụ: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{2x-1}{x-1}$

Giải :

- Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$
- Giới hạn :

$\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty \quad \lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

- Đạo hàm : $f'\left(x\right) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, x \neq 1$.

Đồ thị của hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

- Bảng biến thiên :

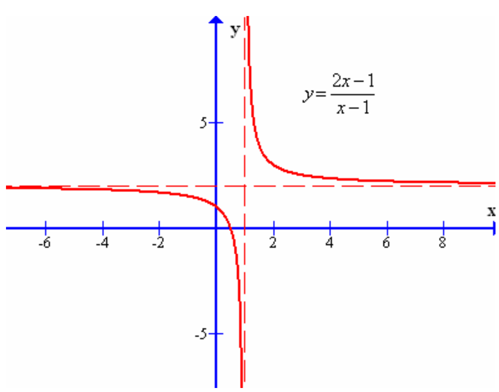
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

- Đồ thị :

Giao điểm của đồ thị với trục Oy $A\left(0;1\right)$

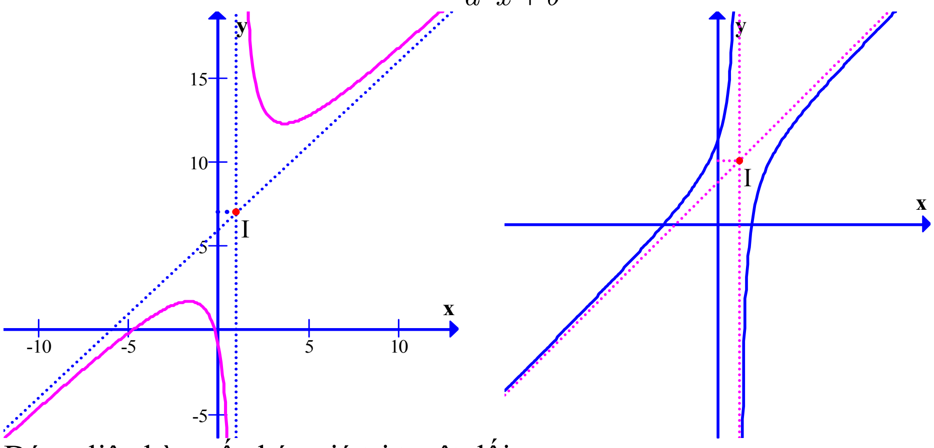
Giao điểm của đồ thị với trục Ox $B\left(\dfrac{1}{2};0\right)$

Đồ thị của hàm số nhận $I\left(1;2\right)$ giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



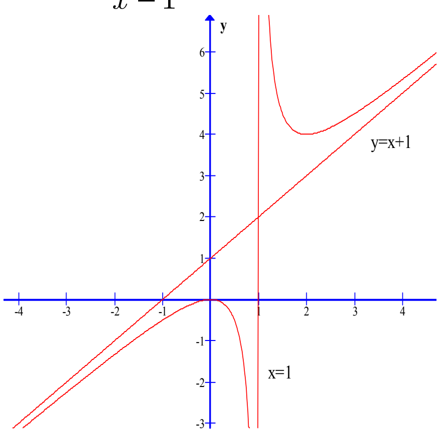
Hàm số hữu tỷ $\quad y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} \Rightarrow y' = \dfrac{aa'x^2 + 2ab'x + bb' - ca'}{\left(a'x + b'\right)^2}$

Dáng điệu đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

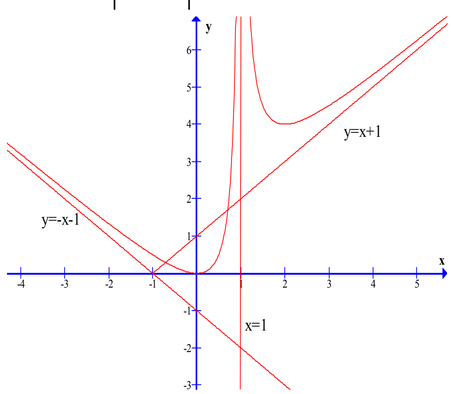


Dáng điệu hàm số chứa giá trị tuyệt đối

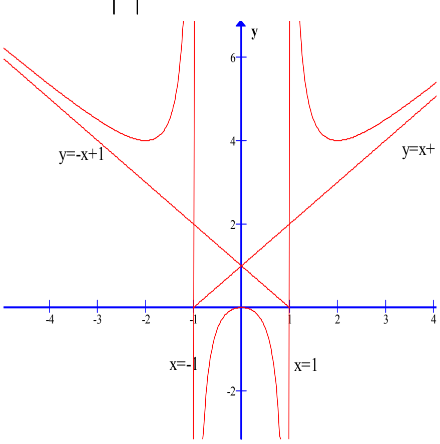
$f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{x-1}\ \left(C\right)$



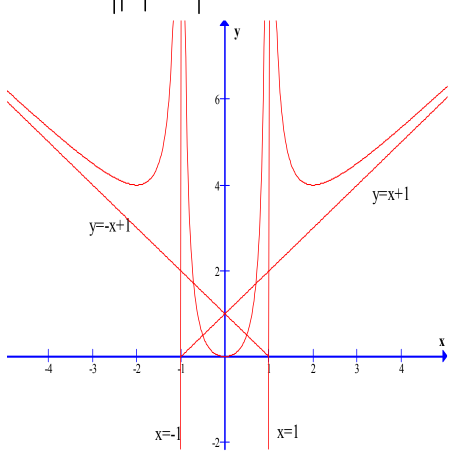
$f\left(x\right) = \left|\dfrac{x^2}{x-1}\right|\ \left(C_1\right)$



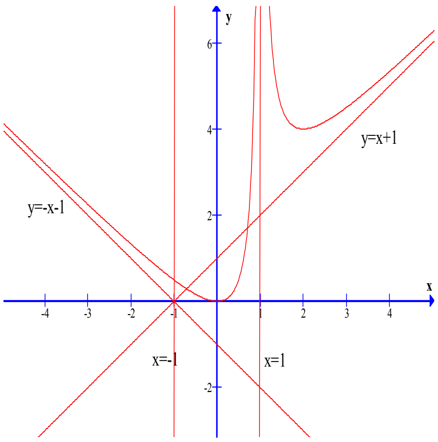
$f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{\left|x\right| - 1}\ \left(C_2\right)$

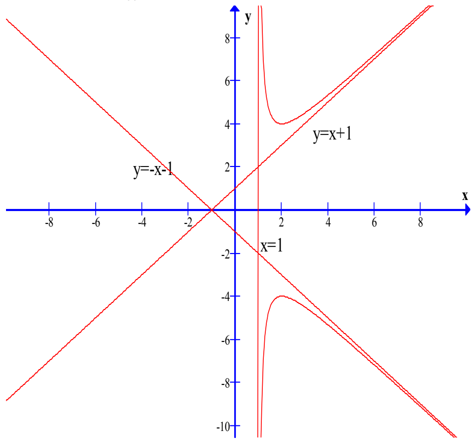


$f\left(x\right) = \left|\dfrac{x^2}{\left|x\right| - 1}\right|\ \left(C_3\right)$



$f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{\left|x-1\right|}\ \left(C_4\right)$ $\qquad\qquad$ $\left|f\left(x\right)\right| = \dfrac{x^2}{x-1}\ \left(C_5\right)$





Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$

Giải :

- Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$
- Giới hạn :

$\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty \quad \lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty \quad \lim\limits_{x\to -\infty} y = -\infty \quad \lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[y - \left(x-2\right)\right] = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4}{x-1} = 0, \lim\limits_{x\to +\infty}\left[y - \left(x-2\right)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4}{x-1} = 0$ là $\Rightarrow y = x - 2$ tiệm cận xiên.

- Đạo hàm : $f'\left(x\right) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, x \neq 1$.

$$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, f\left(-1\right) = -5 \\ x = 3, f\left(3\right) = 3 \end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$		0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	-5	$\searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow$	3	$\nearrow +\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$ và $\left(1;3\right)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = -1, f\left(-1\right) = -5$ và có điểm cực tiểu tại $x = 3, f\left(3\right) = 3$

- Đồ thị : Dành cho bạn đọc

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (2m-1)x - 1}{x+2}$ có đồ thị là $\left(C_m\right), m$ là tham

số .
1.Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ hàm số luôn có cực đại , cực tiểu .

2.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số với $m = 1$.

3.Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số biết tiếp tuyến đi qua $A\left(1;0\right)$.

Giải :

$y = mx - 1 + \dfrac{1}{x+2}$. Hàm số cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-2\right\}$

1. $y' = m - \dfrac{1}{\left(x+2\right)^2} = \dfrac{m\left(x+2\right)^2 - 1}{\left(x+2\right)^2}$.

Với $m > 0$ thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2. Vậy hàm số luôn có cực đại và cực tiểu khi $m > 0$.

2.Với $m = 1, y = x - 1 + \dfrac{1}{x+2}$

*) Hàm số cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-2\right\}$

*) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

Vì $\lim\limits_{x \to \left(-2\right)^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to \left(-2\right)^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[y - \left(x-1\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1}{x+2} = 0$ và $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[y - \left(x-1\right)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{1}{x+2} = 0$ nên đường $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

*) $y' = 1 - \dfrac{1}{\left(x+2\right)^2} = \dfrac{\left(x+2\right)^2 - 1}{\left(x+2\right)^2}, x \neq -2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left(x+2\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y\left(-1\right) = -1 \\ x = -3, y\left(-3\right) = -5 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Đồ thị của hàm số đồng biến trên các khoảng : $(-\infty;-3),(-1;+\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-3;-2),(-2;-1)$

Đồ thị của hàm số đạt điểm cực đại tại $x=-3, y(-3)=-5$ và đạt điểm cực tiểu tại $x=-1, y(-1)=-1$.

Đồ thị: Học sinh tự vẽ

3.Xét (d) đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc k. Nên $(d): y=k(x-1)$

(d) tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x-1+\dfrac{1}{x+2}=k(x-1) \\ 1-\dfrac{1}{(x+2)^2}=k \end{cases} \Rightarrow k=\frac{5}{9}.\text{Vậy tiếp tuyến là: } (d): y=\frac{5}{9}(x-1)$$

> Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ (1)
>
> 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1)
>
> 2. Tìm trên đường thẳng $y=4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số.

Giải :

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ (1)

• $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

• $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}, x\neq 1 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y(-1)=-2 \\ x=3, y(3)=6 \end{array}\right.$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;1),(1;\ 3)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1),(3;+\infty)$.

Đồ thị của hàm số đạt điểm cực đại tại $(-1;-2)$ và đạt điểm cực tiểu tại $(3;6)$.

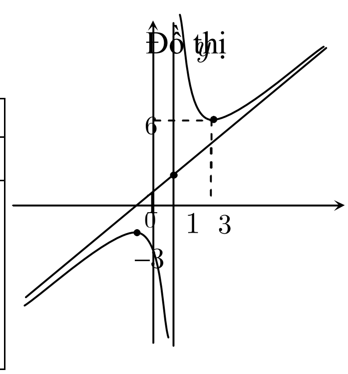
• $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty, \lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng.

• $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[y-(x+1)\right]=0, \lim\limits_{x\to +\infty}\left[y-(x+1)\right]=0 \Rightarrow y=x+1$ là tiệm cận xiên.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị



Đồ thị : Nhận $I(1;2)$ làm tâm đối xứng.

2. Tìm trên đường thẳng $y = 4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số.

Gọi $M(a;4) \in (d) : y = 4$ là điểm cần tìm .

Khi đó tiếp tuyến với (C) kẻ từ M có phương trình : $(\Delta) : y = k(x-a)+4$.

Để (Δ) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x-1} = k(x-a)+4 & (1) \\ \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm $x \neq 1$

Từ $(1),(2) \Rightarrow (3-a)x^2 + 2(a-7)x + 3a + 7 = 0 \; (3)$

Để từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số. Khi phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-a \neq 0 \\ \Delta = (a-7)^2 - (3a+7).(3-a) > 0 \\ 3-a+2(a-7)+3a+7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 3 \\ a^2 - 4a + 7 > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng $(d) : y = 4$ bỏ đi các điểm $(1;\ 4),(3;\ 4)$.

Bài 7: GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-2}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả tham số thực m để đường thẳng $(d) : y = mx + 1$ cắt đồ thị của hàm số tại 2 điểm phân biệt.

Giải :

Đồ thị là (C) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình : $\dfrac{x-3}{x-2} = mx + 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi đó phương trình $g(x) = mx^2 - 2mx + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$ hay

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 0 \vee m > 1 \\ m - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array} \right.$$

Ví dụ 2 :Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
2. Với giá trị nào của m đường thẳng (d_m) đi qua điểm $A(-2;2)$ và có hệ số góc m cắt đồ thị đã cho

- Tại hai điểm phân biệt?.
- Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị ?.

Giải :

2. $(d_m): y = mx + 2(m+1)$

$(d_m) \cap (C): g(x) = mx^2 + 3mx + 2m + 3 = 0, x \neq -1 \; (*)$

- Để $(d_m) \cap (C)$ tại hai điểm phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1. Khi đó ta

có hệ : $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 12 \end{array} \right.$

- Để $(d_m) \cap (C)$ tại hai điểm thuộc hai nhánh khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$

$\Leftrightarrow mg(-1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Cách khác : Để $(d_m) \cap (C)$ tại hai điểm thuộc hai nhánh khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$. Đặt $x = t - 1$ khi đó phương trình $(*)$ trở thành $mt^2 + mt + 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Ví dụ 3 :Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$

1. Tìm a, b để đồ thị hàm số cắt trục tung tại $A(0;-1)$ và tiếp tuyến của đồ thị tại A có hệ số góc bằng -3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với a, b vừa tìm được .
2. Cho đường thẳng (d) có hệ số góc m và đi qua điểm $B(-2;2)$. Tìm m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2. Các đường thẳng đi qua M_1, M_2 song song với các trục toạ độ tạo thành hình chữ nhật . Tính các cạnh của hình chữ nhật đó theo m, khi nào hình chữ nhật này trở thành hình vuông.

Giải :

1. $\begin{cases} A(0;-1) \in y = \dfrac{ax+b}{x-1} \\ y' = \dfrac{-a-1}{(x-1)^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

2. (d) đi qua điểm $B(-2;2)$ có phương trình $y = m(x+2) + 2$

Để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2 khi phương trình $m(x+2) + 2 = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có hai nghiệm khác 1, hay phương trình $mx^2 + mx - 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức là

$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 4m(2m+3) > 0 \\ m1^2 + m1 - 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{4}{3} \\ m > 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{4}{3} \\ m > 0 \end{array} \right. \quad (*)$

Giả sử $M_1\left(x_1;y_1\right),M_2\left(x_2;y_2\right)$, hai cạnh hình chữ nhật M_1PM_2Q có độ dài là

$$M_1P=\left|x_2-x_1\right|=\frac{\sqrt{9m^2+12m}}{|m|},M_1Q=\left|y_2-y_1\right|=\sqrt{9m^2+12m}$$

Hình chữ nhật M_1PM_2Q trở thành hình vuông khi và chỉ khi

$$M_1P=M_1Q\Leftrightarrow\frac{\sqrt{9m^2+12m}}{|m|}=\sqrt{9m^2+12m}\Leftrightarrow|m|=1\Leftrightarrow m=1\ \left(do\left(*\right)\right)$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $f\left(x\right)=2x^3+3x^2+1$ có đồ thị $\left(C\right)$ và parabol $\left(P\right):g\left(x\right)=2x^2+1$

$a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Tùy theo giá trị của m, giải và biện luận phương trình $2x^3+3x^2-m=0$

$b)$ Chứng tỏ rằng trong số tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ thì thiếp tuyến tại điểm uốn I có hệ số góc nhỏ nhất . Viết phương trình tiếp tuyến đó. Chứng tỏ I là tâm đối xứng của đồ thị $\left(C\right)$.

$c)$ Gọi A,B là giao điểm của đồ thị $\left(C\right)$ và parabol $\left(P\right)$. Viết phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ và parabol $\left(P\right)$ tại các giao điểm của chúng .

$d)$ Xác định trên khoảng đó $\left(C\right)$ nằm phía trên hoặc phía dưới $\left(P\right)$.

Hướng dẫn :

$c)$ $A\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),B\left(0;1\right)$. Tiếp tuyến $\left(C\right)$ tại A,B là $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4},y=1$ .Tiếp tuyến $\left(P\right)$ tại A,B là $y=-2x+\frac{1}{2},y=1$.

$d)$ Xét $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=2x^3+x^2$. Lập bảng xét dấu : $h\left(x\right)<0,x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\left(C\right)$ nằm phía dưới $\left(P\right)$. $h\left(x\right)>0,x\in\left(-\frac{1}{2};0\right),\left(0;+\infty\right)\Rightarrow\left(C\right)$ nằm phía trên $\left(P\right)$.

2. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x+1$

$a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn I của nó . Chứng minh rằng trong số tiếp tuyến của đồ thị thì tiếp tuyến tại I có hệ số góc nhỏ nhất .

$b)$ Gọi $\left(d_m\right)$ là đường thẳng đi qua điểm I có hệ số góc m. Tìm các giá trị m sao cho đường thẳng $\left(d_m\right)$ cắt đồ thị đã cho tại ba điểm phân biệt.

Hướng dẫn :

$a)$ $y=-3x+1$ $\qquad$ $b)$ $m>-3$

3. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-\left(m+1\right)x^2+m$

$a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m=2$. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị .

$b)$ Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm , tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau .

Hướng dẫn :

$b)$ $x^4 - (m+1)x^2 + m = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-m) = 0$. Để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt , tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau khi $0 < m \neq 1$.

- $m > 1, \sqrt{m} - 1 = 1 - (-1) \Leftrightarrow m = 9$
- $0 < m < 1, 1 - \sqrt{m} = \sqrt{m} - (-\sqrt{m}) \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{9}$

Ngoài cách giải trên các bạn có thể dùng cấp số cộng (lớp 11) để giải .

4.

$a)$ Với giá trị nào của m, đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại 4 điểm phân biệt?.

$b)$ Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng $(d_m): y = x - m$ cắt đường cong $y = \dfrac{-x^2+2x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt.

$c)$ Tìm k để đường thẳng $y = kx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$ tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB.

5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}, (C)$.

$a)$ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

$b)$ Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt : $x^2 - 2x = m|x-1| - 2$.

$c)$ Tìm m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x + 3$.

$d)$ Chứng minh rằng qua điểm $E(1;0)$ ta không thể kẻ được một tiếp tuyến nào đến đồ thị hàm số.

6. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$ có đồ thị (G)

$a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

$b)$ Chứng minh rằng đường thẳng $(d_m): y = mx + m - 1$ luôn đi qua điểm cố định của đường cong (G) khi m thay đổi .

$c)$ Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong (G) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của (G).

Hướng dẫn:

$b)$ $M(-1;-1)$ là điểm cố định mà (d_m) đi qua khi m biến thiên và $M(-1;-1) \in (G)$.

$c)$ Cách 1 : $(d_m) \cap (G): g(x) = 2mx^2 + 3(m-1)x + m - 3 = 0, x \neq -\dfrac{1}{2}$ $(*)$. Để $(d_m) \cap (G)$ tại hai điểm thuộc cùng một nhánh nếu và chỉ nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ g\left(-\dfrac{1}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \neq m < 0$

Cách 2 : $\left(d_m\right) \cap \left(G\right) : m\left(x+1\right) - 1 = \dfrac{x+2}{2x+1}, x \neq -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(2mx + m - 3\right) = 0, x \neq -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 < -\dfrac{1}{2} \\ k\left(x\right) = 2mx + m - 3 = 0 \end{array}\right.$

Hai nhánh của $\left(G\right)$ nằm về hai bên của tiệm cận đứng $x = -\dfrac{1}{2}$. Đường thẳng $\left(d_m\right) \cap \left(G\right)$ tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị khi phương trình $k\left(x\right) = 2mx + m - 3 = 0$ có nghiệm $x < -\dfrac{1}{2}$ và $x \neq -1$, khi đó

ta có $\begin{cases} m \neq 0 \\ x = \dfrac{3-m}{2m} < -\dfrac{1}{2} \\ k\left(-1\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{3}{2m} < 0 \\ -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < m < 0 \\ m < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -3 \neq m < 0$

Bài 8 :SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

Ví dụ 1 :Tìm tất cả các điểm trên trục hoành những điểm M mà qua đó vẽ được đúng 3 tiếp tuyến đến đồ thị $(C) : y = x^3 + 3x^2$ mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau .

Giải :

Gọi $M(m;0) \in Ox$, đường thẳng (t) đi qua M và có hệ số góc $k \Rightarrow (t) : y = k(x - m)$.

(t) tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} x^3 + 3x^2 = k(x-a) & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$

Từ $(1),(2)$ suy ra : $x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 6x(x-a) \Leftrightarrow 2x^3 + 3(a-1)x^2 - 6ax = 0$

$\Leftrightarrow x\left[2x^2 - 3(a-1)x - 6a\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 3(a-1)x - 6a = 0 \ (3) \end{array}\right.$

•$x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow 1$ tiếp tuyến.

Qua M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đến đồ thị (C) mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau .

Khi đó (3) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ và $k_1k_2 = -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 9(a-1)^2 + 48a > 0 \\ 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee \ a > -\dfrac{1}{3} \ \text{ và } \ a \neq 0 \\ 81a^2 - 81a(a-1) - 108a + 1 = 0 \\ (\text{ vì } x_1x_2 = -3a \ ; \ x_1 + x_2 = \dfrac{3(a-1)}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee \ a > -\dfrac{1}{3} \ \text{ và } \ a \neq 0 \\ -27a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{27}$$

Vậy $M(\frac{1}{27},0) \in Ox$ thỏa bài toán .

Ví dụ 2 : Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo với nhau 1 góc 45^0.

Giải :

Gọi $M \in Ox \Rightarrow M\left(x_0;0\right)$, đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k, phương trình có dạng :

$\left(d\right): y = k\left(x - x_0\right)$.

$\left(d\right)$ là tiếp tuyến của đồ thị khi hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} = k\left(x - x_0\right) \\ \dfrac{x^2 - 2x}{\left(x-1\right)^2} = k \end{cases}$

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 2x}{\left(x-1\right)^2}\left(x - x_0\right) \Leftrightarrow x\left[\left(x_0 + 1\right)x - 2x_0\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2x_0}{x_0 + 1} \end{array}\right. \quad , x_0 \neq -1$$

- $x = 0 \Rightarrow k = \dfrac{x^2 - 2x}{\left(x-1\right)^2} = 0$.
- $x = \dfrac{2x_0}{x_0 + 1} \Rightarrow k = \dfrac{-4x_0}{\left(x_0 + 1\right)^2}$
- Tiếp tuyến qua M tạo với đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo với nhau 1 góc 45^0 khi và chỉ

khi $\tan 45^0 = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| \Rightarrow \dfrac{4x_0}{\left(x_0+1\right)^2} = 1 \Rightarrow x_0 = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy $M\left(3 - 2\sqrt{2};0\right),\left(3 + 2\sqrt{2};0\right)$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$.Tìm $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho điểm $M\left(1 + \sin\alpha;9\right)$ nằm trên đồ thị $\left(C\right)$. Chứng minh rằng, tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm M cắt hai tiệm cận của $\left(C\right)$ tại hai điểm A,B đối xứng nhau qua điểm M.

Giải :

Vì $M(1+\sin\alpha;9)$ nằm trên đồ thị (C) nên:

$$\frac{2(1+\sin\alpha)^2}{1+\sin\alpha-1}=9 \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha-5\sin\alpha+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=2\end{array}\right.$$

Vì $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};9\right)$

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là: $y=y'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+9$

hay $(d): y=-6x+18$.

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận đứng $x=1$ tại: $A(1;12)$

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận xiên tai điểm B có tọa độ là nghiệm

$(x;y)$ hệ phương trình: $\begin{cases}y=-6x+18\\ y=2x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=6\end{cases}\Rightarrow B(2;6)$

Dễ thấy: $\begin{cases}\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{3}{2}=x_M\\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=9=y_M\end{cases}$

Suy ra, A,B đối xứng nhau qua điểm M *(đpcm)*.

Cho hàm số : $y=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}$ có đồ thị là (C). Giả sử $M\in(C)$ có hoành độ a. Với giá trị nào của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M.

Giải :

Vì $M\in(C)$ nên $M\left(a;y_M=\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}\right)$

Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $y'_M=2a^3-6a$

Tiếp tuyến tại M có dạng : $y=y'_{x_M}(x-x_M)+y_M\Rightarrow(d): y=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}$

Tiếp tuyến (d) của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M khi phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt : $\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}$ hay phương trình

$(x-a)^2(x^2+2ax+3a^3-6)=0$ có 3 nghiệm phân biệt , nghĩa là phương trình $g\left(x\right)=x^2+2ax+3a^3-6=0$ có hai nghiệm phân biệt và khác a .

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_{g(x)}=a^2-(3a^2-6)>0\\ g(a)=6a^2-6\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3<0\\ a^2\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left|a\right|<\sqrt{3}\\ a\neq \pm 1\end{cases}$$

Vậy giá trị a cần tìm $\begin{cases}\left|a\right|<\sqrt{3}\\ a\neq \pm 1\end{cases}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.

$a)$ Tìm a,b biết rằng đồ thị của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{ax^2-bx}{x-1}$ đi qua điểm $A\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến tại $O\left(0;0\right)$ có hệ số góc bằng -3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ứng với giá trị a,b vừa tìm được.

$b)$ Tìm a,b biết rằng đồ thị của hàm số $f\left(x\right)=2x^2+ax+b$ tiếp xúc với hypebol $a)$ Tìm a,b biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ tại điểm $M\left(\dfrac{1}{2};2\right)$

2.

$a)$ Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A\left(1;-2\right)$ và tiếp xúc với parabol $y=x^2-2x$

$b)$ Chứng minh hai đường cong $y=x^3+\dfrac{5}{4}x-2, y=x^2+x-2$ tiếp xúc nhau tại M , viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong đó .

$c)$ Chứng minh rằng các đồ thị của ba hàm số $f\left(x\right)=-x^2+3x+6, g\left(x\right)=x^3-x^2+4,$ $h\left(x\right)=x^2+7x+8$ tiếp xúc nhau tại điểm $A\left(-1;2\right)$.

$d)$ Chứng minh rằng các đồ thị của ai hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}x, g\left(x\right)=\dfrac{3x}{x+2}$ tiếp xúc nhau . Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm đó .

$e)$ Chứng minh rằng các đồ thị của ai hàm số $f\left(x\right)=x^3-x, g\left(x\right)=x^2-1$ tiếp xúc nhau . Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm đó .

Hướng dẫn :

1.

$a)$ $\begin{cases}\dfrac{a\left(-1\right)^2-\left(-1\right)}{-1-1}=\dfrac{5}{2}\\ f'\left(0\right)=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=-3\end{cases}$

$b)$ $a=-6, b=\dfrac{9}{2}$

2. $a)$ $\left(d\right): y=m\left(x-1\right)-2 \Rightarrow m=2$ $\left(y=2x-4\right)$, $m=-2$ $\left(y=-2x\right)$

$b)$ $M\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{4}\right), y=2x-\dfrac{9}{4}$

$c)$ $f\left(-1\right) = g\left(-1\right) = h\left(-1\right) = 2, f'\left(-1\right) = g'\left(-1\right) = h'\left(-1\right) = 5$, chứng tỏ tại $A\left(-1;2\right)$các đồ thị của ba hàm số có tiếp tuyến chung , nói khác hơn là các đồ thị của ba hàm số tiếp xúc nhau tại điểm $A\left(-1;2\right)$.

$d)$ $O\left(0;0\right), y = \dfrac{3}{2}x$

Chúc các em thi đỗ đạt kết quả cao nhất .
Tác giả : Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt và Nguyễn Tất Thu – Đồng Nai.