

# Đề thi Dự trữ Khối D - năm 2007

## Đề II

**Câu I :** Cho hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) sao cho d và hai tiệm cận của (C) cắt nhau tạo thành một tam giác cân.

**Câu II :**

1. Giải phương trình :  $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$
2. Tìm m để hệ phương trình : 
$$\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất

**Câu III :** Cho mặt phẳng (P):  $x - 2y + 2z - 1 = 0$  và các đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2} \text{ và } d_2: \frac{x-5}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-5}$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa  $d_1$  và  $(Q) \perp (P)$ .
2. Tìm các điểm  $M \in d_1$ ,  $N \in d_2$  sao cho  $MN \parallel (P)$  và cách (P) một khoảng bằng 2.

**Câu IV :**

1. Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

2. Giải phương trình:  $\log_2 \frac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$ .

**Câu Va** (cho chương trình THPT không phân ban)

1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau.
2. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm  $A(0, 1)$   $B(2, -1)$  và các đường thẳng:  $d_1: (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0$   
 $d_2: (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0$

Chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  luôn cắt nhau. Gọi  $P = d_1 \cap d_2$ . Tìm m sao cho  $PA + PB$  lớn nhất

**Câu Vb** (cho chương trình THPT phân ban)

1. Giải phương trình:  $2^{3x+1} - 7 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$ .

2. Cho lăng trụ đứng  $ABCA_1B_1C_1$  có tất cả các cạnh đều bằng a. M là trung điểm của đoạn  $AA_1$ . Chứng minh  $BM \perp B_1C$  và tính  $d(BM, B_1C)$ .

**Bài Giải****Câu I.**

1. Khảo sát hàm số (độc giả tự giải)

2. Ta có  $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

Từ đồ thị ta thấy để tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác vuông cân ta phải có hệ số góc của tiếp tuyến là  $-1$  tức là:

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

. Tại  $x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow$  phương trình tiếp tuyến là  $y = -x$

. Tại  $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 \Rightarrow$  phương trình tiếp tuyến là  $y = -x + 4$

**Câu II.**

1. Giải phương trình :  $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$  (1)

Đặt:  $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ . Pt (1) thành

$$(1-t) \left( 1 + \frac{2t}{1+t^2} \right) = 1+t \Leftrightarrow (1-t)(t+1)^2 = (t+1)(1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow t+1=0 \text{ hay } (1-t)(t+1) = (1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow t=-1 \text{ hay } t=0$$

Do đó (1)  $\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0$  hay  $\operatorname{tg} x = -1$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Cách khác**

$$(1) \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$$

(hiển nhiên  $\cos x = 0$  không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \text{ hay } (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \text{ hay } \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$(I) \begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ \sqrt{xy} = 1 - x \end{cases}$$

Với điều kiện:  $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$  ta có

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - m \\ xy = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - m \\ y = \frac{(1 - x)^2}{x} \end{cases} \quad (x \leq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{(1 - x)^2}{x} = 2x - m \Leftrightarrow x^2 + (2 - m)x - 1 = 0 \quad (*)$$

(hiển nhiên  $x = 0$  không là nghiệm của  $(*)$ )

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 + (2 - m)x - 1, \quad (a = 1)$$

ycbt  $\Leftrightarrow$  tìm m để phương trình  $(*)$  có đúng 1 nghiệm thỏa  $x \leq 1$

$$\Leftrightarrow af(1) < 0 \text{ hay } \begin{cases} f(1) = 0 \\ \frac{c}{a} = -1 > 1(VN) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \Delta = 0(vn, \text{ do } ac < 0) \\ -\frac{b}{2a} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$$

### Câu III.

1.  $d_1$  đi qua  $A(1, 3, 0)$ , VTCP  $\vec{a} = (2, -3, 2)$

Mặt phẳng  $(P)$  có PVT  $\vec{n}_P = (1, -2, 2)$

M/pha $\overline{\text{nh}}\text{ng}$   $(Q)$  chứa  $d_1$  và  $\perp (P)$  nên  $(Q)$  có PVT  $\vec{n}_Q = [\vec{a}, \vec{n}_P] = (-2, -2, -1)$

Vậy  $(Q)$  qua  $A$  có PVT  $\vec{n}_Q = (-2, -2, -1)$  nên phương trình  $(Q)$ :

$$-2(x - 1) - 2(y - 3) - 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 8 = 0$$

$$2. \text{ P/trình tham số } d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$M \in d_1 \Rightarrow M(1+2t, 3-3t, 2t)$$

$$P/\text{trình tham số } d_2: \begin{cases} x = 5+6t' \\ y = 4t' \\ z = -5-5t' \end{cases}$$

$$M \in d_2 \Rightarrow N(5+6t', 4t', -5-5t')$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MN} = (6t'-2t+4, 4t'+3t-3, -5t'-2t-5)$$

$$\text{Mặt phẳng (P) có PVT } \overrightarrow{n_P} = (1, -2, 2)$$

$$\text{Vì } MN // (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1(6t'-2t+4) - 2(4t'+3t-3) + 2(-5t'-2t-5) = 0 \Leftrightarrow t = -t'$$

. Ta lại có khoảng cách từ MN đến (P) bằng  $d(M, P)$  vì  $MN // (P)$

$$\frac{|1+2t-2(3-3t)+2(2t)-1|}{\sqrt{1+4+4}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |-6+12t| = 6 \Leftrightarrow -6+12t = 6 \text{ hay } -6+12t = -6 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hay } t = 0$$

$$. t = 1 \Rightarrow t' = -1 \Rightarrow M_1(3, 0, 2) \quad N_1(-1, -4, 0)$$

$$. t = 0 \Rightarrow t' = 0 \Rightarrow M_2(1, 3, 0) \quad N_2(5, 0, -5)$$

#### Câu IV.

$$1. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$\text{Đặt: } u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx ; \quad dv = \cos x dx, \text{ chọn } v = \sin x$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$\text{Ta có } x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx ; \quad \text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$dv = \sin x dx$ , chọn  $v = -\cos x$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= [-x \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

2. Giải phương trình  $\log_2 \frac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$  (\*)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 1 = 2^0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$(*) \Leftrightarrow \log_2 \frac{2^x - 1}{x} = 1 - 2^x + x \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) - \log_2 x = 1 - 2^x + x \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1) + \log_2(2^x - 1) = x + \log_2 x \text{ (**)}$$

Xét hàm  $f(t) = t + \log_2 t$  đồng biến nghiêm cách khi  $t > 0$

Do đó  $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ , với  $u > 0, v > 0$

$$\text{Vậy từ (**)} \Leftrightarrow 2^x - 1 = x \Leftrightarrow 2^x - x - 1 = 0 \text{ (***)}$$

Lại xét hàm  $g(x) = 2^x - x - 1$  khi  $x > 0$

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 1, g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e > 1$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2(\log_2 e) > 0$$

Ta có  $g''(x) > 0$  với mọi  $x$  nên  $g'(x)$  là hàm tăng trên  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow g'(x) < 0, \forall x < \log_2(\log_2 e) \text{ và } g'(x) > 0, \forall x > \log_2(\log_2 e)$$

$$\Rightarrow g \text{ giảm nghiêm cách trên } (-\infty; \log_2(\log_2 e)]$$

và  $g$  tăng nghiêm cách trên  $[\log_2(\log_2 e); +\infty)$

$\Rightarrow g(x) = 0$  có tối đa là 1 nghiệm trên  $(-\infty; \log_2(\log_2 e)]$ , và có tối đa là 1 nghiệm trên  $[\log_2(\log_2 e); +\infty)$ .

bằng cách thử nghiệm ta có pt  $g(x) = 0$  (\*\*\*) có 2 nghiệm là  $x = 0$  và  $x = 1$ . Vì  $x > 0$  nên (\*)  $\Leftrightarrow x = 1$ .

**Câu Va.**

1/ Gọi  $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$  là số cần tìm. Vì  $n$  chẵn  $\Rightarrow a_4$  chẵn.

\* TH1 :  $a_4 = 0$       Ta có

- 1 cách chọn  $a_4$
- 6 cách chọn  $a_1$
- 5 cách chọn  $a_2$
- 4 cách chọn  $a_3$

Vậy ta có  $1.6.5.4 = 120$  số n

\* TH2:  $a_4 \neq 0$ . Ta có

- 3 cách chọn  $a_4$
- 5 cách chọn  $a_1$
- 5 cách chọn  $a_2$
- 4 cách chọn  $a_3$

Vậy ta có  $3.5.5.4 = 300$  số n.

Tổng cộng hai trường hợp ta có :  $120 + 300 = 420$  số n

2. Tọa độ giao điểm P của  $d_1, d_2$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (m-1)x + (m-2)y = m-2 \\ (2-m)x + (m-1)y = -3m+5 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } D = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ 2-m & m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 6m + 5 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0 \quad \forall m$$

$$\forall m \quad D = 2 \left( m - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} > 0 \quad \forall m \quad \text{nên } d_1, d_2 \text{ luôn luôn cắt nhau.}$$

Ta dễ thấy  $A(0,1) \in d_1$  ;  $B(2,-1) \in d_2$  và  $d_1 \perp d_2$

$\Rightarrow \Delta APB$  vuông tại P  $\Rightarrow P$  nằm trên đường tròn đường kính AB.

Ta có  $(PA + PB)^2 \leq 2(PA^2 + PB^2) = 2AB^2 = 2(2\sqrt{2})^2 = 16$

$\Rightarrow PA + PB \leq 4$ . Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow PA = PB \Leftrightarrow P$  là trung điểm của cung  $\widehat{AB}$

Vậy  $\text{Max} (PA + PB) = 4$  khi P là trung điểm của cung  $\widehat{AB}$

$\Rightarrow P$  nằm trên đường thẳng  $y = x - 1$  qua trung điểm  $I(1; 0)$  của  $AB$   
 và  $IP = \sqrt{2} \Rightarrow P(2; 1)$  hay  $P(0; -1)$

Vậy ycbt  $\Leftrightarrow m = 1$  v  $m = 2$

### Câu Vb.

1. Giải phương trình :  $2^{3x+1} - 7.2^{2x} + 7.2^x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2.2^{3x} - 7.2^{2x} + 7.2^x - 2 = 0$$

Đặt  $t = 2^x > 0$  thì (1) thành

$$2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(2t^2 - 5t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hay } t = 2 \text{ hay } t = \frac{1}{2}$$

Do đó pt đã cho tương đương

$$2^x = 1 \text{ hay } 2^x = 2 \text{ hay } 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 1 \text{ hay } x = -1$$

2. Chọn hệ trục Oxyz sao cho

$$\text{ta có } A(0; 0; 0); A_1(0, 0, a); C(-a; 0; 0) \Rightarrow B\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right);$$

$$B_1\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a\right); M\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right); \overrightarrow{CB_1} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow BM \perp B_1C$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{B.B_1} = (0, 0, a) \Rightarrow d(BM, B_1C) = \frac{|[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B_1C}] \cdot \overrightarrow{BB_1}|}{|[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B_1C}]|} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$$

Hà Văn Chương - Phạm Hồng Danh  
 ( TT bồi dưỡng văn hóa và luyện thi Vĩnh Viễn )