

**PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH**

**Câu I** (2 điểm). Cho hàm số  $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$  (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm  $M(-1; -9)$ .

**Câu II** (2 điểm). 1. Giải phương trình  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$

2. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

**Câu III** (2 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm  $A(0;1;2)$ ,  $B(2;-2;1)$ ,  $C(-2;0;1)$

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.
2. Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng  $2x + 2y + z - 3 = 0$  sao cho  $MA = MB = MC$ .

**Câu IV** (2 điểm). 1. Tính tích phân 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$$

2. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức  $x^2 + y^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức 
$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$$

**PHẦN RIÊNG ----- Thí sinh chỉ được làm 1 trong 2 câu : V.a hoặc V.b -----**

**Câu V.a. Theo chương trình KHÔNG phân ban** (2 điểm)

1. Chứng minh rằng  $\frac{n+1}{n+2} \left( \frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{1}{C_n^k}$  (n, k là các số nguyên dương,  $k \leq n$ ,  $C_n^k$  là số tổ hợp chập k của n phần tử).
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm  $H(-1; -1)$ , đường phân giác trong của góc A có phương trình  $x - y + 2 = 0$  và đường cao kẻ từ B có phương trình  $4x + 3y - 1 = 0$ .

**Câu V.b. Theo chương trình phân ban** (2 điểm)

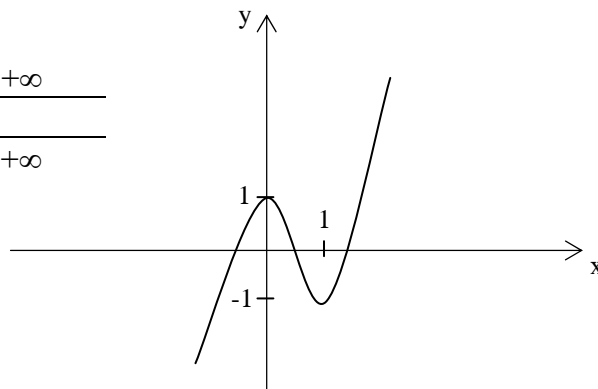
1. Giải bất phương trình  $\log_{0,7} \left( \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0$
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a,  $SA = a$ ,  $SB = a\sqrt{3}$  và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

**BÀI GIẢI GỢI Ý**

**Câu I. 1.** MXĐ :  $\mathbb{R}$ ,  $y' = 12x^2 - 12x$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hay  $x = 1$

BBT :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			1			$+\infty$
			CĐ			
				-1		
				CT		



2. Tiếp tuyến qua M (-1, -9) có dạng  $y = k(x + 1) - 9$

Phương trình hoành độ tiếp điểm qua M có dạng :

$$\begin{aligned} 4x^3 - 6x^2 + 1 &= (12x^2 - 12x)(x + 1) - 9 \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 10 &= (12x^2 - 12x)(x + 1) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 5 = 6(x^2 - x)(x + 1) \\ \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } 2x^2 - 5x + 5 &= 6x^2 - 6x \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } 4x^2 - x - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = \frac{5}{4}; \quad y'(-1) &= 24; y'(\frac{5}{4}) = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Vậy pt các tiếp tuyến qua M là:  $y = 24x + 15$  hay  $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$

**Câu II.** 1.  $\cos x = 0$  : phương trình thành :  $\pm 1 = 0$  vô lý

$\cos \neq 0$  : chia hai vế cho  $\cos^3 x$  ta có :  $\operatorname{tg}^3 x - \sqrt{3} = \operatorname{tg} x - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x + \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \text{ hay } \operatorname{tg} x = -1 \text{ hay } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2. \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 & (1) \\ xy = \frac{6x + 6 - x^2}{2} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (2) vào (1)} \Rightarrow \left( x^2 + \frac{6x + 6 - x^2}{2} \right)^2 = 2x + 9$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 6)^2 = 4(2x + 9) \Leftrightarrow x(x^3 + 12x^2 + 48x + 64) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = -4$$

$$x = 0 \Rightarrow (1) : \text{vô nghiệm}; \quad x = -4 \Rightarrow y = \frac{17}{4}$$

$$\text{Vậy hệ } \Leftrightarrow (x = -4; y = \frac{17}{4})$$

**Câu III.** 1.  $\overline{AB} = (2, -3, -1); \overline{AC} = (-2, -1, -1) \Rightarrow \overline{AB} \wedge \overline{AC} = (2, 4, -8) = 2(1, 2, -4)$

Phương trình mp (ABC) :  $1(x - 0) + 2(y - 1) - 4(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4z + 6 = 0$

2. Gọi M (x, y, z).  $MA = MB = MC \Leftrightarrow MA = MB$  và  $MA = MC$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 &= (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 \\ \text{và } (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 &= (x + 2)^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 6y - 2z - 4 = 0 \quad (1) \text{ và } 4x + 2y + 2z = 0 \quad (2)$$

Mà  $M \in (\alpha) : 2x + 2y + z - 3 = 0$ . Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow M(2, 3, -7)$

**Câu IV.** 1. Đặt  $t = \sin x + \cos x \Rightarrow t^2 = 1 + \sin 2x$

Ta có :  $dt = (\cos x - \sin x)dx$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{-dt}{(t+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{t+1} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2. Đặt  $x = \cos \alpha; y = \sin \alpha \quad (0 \leq \alpha < 2\pi)$

$$P = \frac{2(\cos^2 \alpha + 6 \sin \alpha \cos \alpha)}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha + 6 \sin 2\alpha}{2 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (P - 6) \sin 2\alpha - (P + 1) \cos 2\alpha = 1 - 2P \quad (1)$$

$$(1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (P - 6)^2 + (P + 1)^2 \geq (1 - 2P)^2 \Leftrightarrow P^2 + 3P - 18 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3$$

$\Rightarrow \max P = 3$  và  $\min P = -6$ .

**Câu V.a.**

$$1. \frac{n+1}{n+2} \left( \frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{C_{n+2}^{k+1}}{C_{n+1}^k \cdot C_{n+1}^{k+1}} = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}$$

2. Phương trình d qua H (-1, -1) và vuông góc với (D):  $x - y + 2 = 0$  có dạng

$$1(x+1) + 1(y+1) = 0$$

Giao điểm I của (d) và (D) là nghiệm hệ phương trình:  $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow I(-2, 0)$

Gọi K là điểm đối xứng của H qua (D) thì K(-3, 1)

AC qua K và vuông góc đường cao:  $4x + 3y - 1 = 0$

Phương trình AC:  $3(x+3) - 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 13 = 0$

Tọa độ A là nghiệm hệ phương trình:  $\begin{cases} 3x-4y+13=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow A(5, 7)$

CH qua H và có PVT  $\overrightarrow{HA} = 2(3, 4)$

Phương trình CH:  $3(x+1) + 4(y+1) = 0$

Tọa độ C là nghiệm hệ phương trình:  $\begin{cases} 3x+4y+7=0 \\ 3x-4y+13=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3}, \frac{3}{4}\right)$

### Câu V.b.

$$1. \log_{0,7} \left( \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} \right) < 0 \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0 \Leftrightarrow -4 < x < -3 \text{ hay } x > 8$$

$$2. \text{ Tam giác SMA là tam giác đều cạnh } a, \text{ nên ta có: } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích tứ giác BNMD

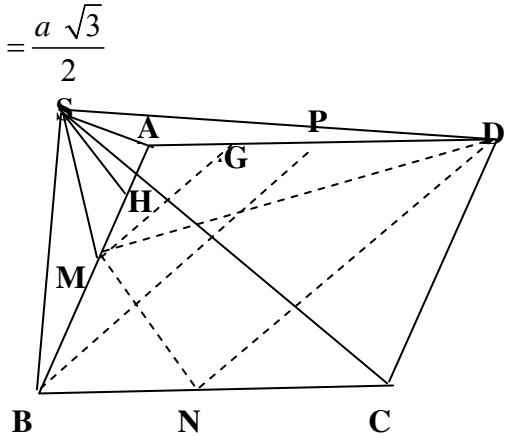
$$S(\text{BNMD}) = \frac{1}{2} MN \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a^2$$

$$V(\text{S.BNMD}) = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} 2a^2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Kẻ thêm MG // ND, ta có  $ND = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$

$$\text{và ta có: } MG = \frac{1}{2} PB = \frac{1}{2} ND = \frac{1}{2} a\sqrt{5}$$

$$SG = \sqrt{SH^2 + HG^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos(SM, ND) = \frac{SM^2 + MG^2 - SG^2}{2SM \cdot MG} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



Cách khác: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho  $A(0, 0)$ ;  $S\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $D(0, 2a, 0)$ ,  $B(2a, 0, 0)$ ,

$$M(a, 0, 0), C(2a, 2a, 0); N(2a, a, 0) \Rightarrow \overrightarrow{SM} = \left(\frac{a}{2}, 0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); \overrightarrow{DN} = (2a, -a, 0)$$

$$\cos(SM, DN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{\|\overrightarrow{SM}\| \|\overrightarrow{DN}\|} = \frac{a^2}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right)(4a^2 + a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

----- oOo -----

**TRẦN MINH QUANG - NGUYỄN PHÚ VINH**  
(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và Luyện thi đại học Vĩnh Viễn, TP.HCM)