Trần Thành Minh – Phan Lưu Biên - Trần Quang Nghĩa

HÌNH HỌC 11
Chương 2.

QUAN HỆ SONG SONG

www.saosangsong.com.vn

MỤC LỤC

CHƯƠNG II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

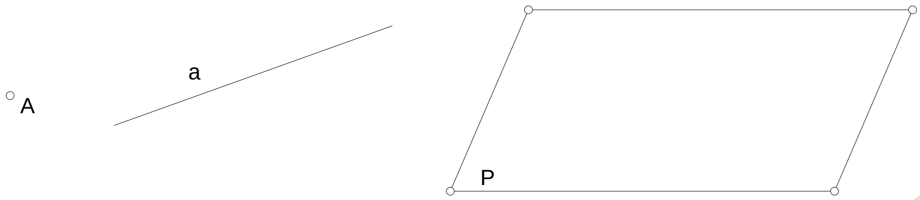
§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

A.Tóm tắt giáo khoa

2. Mở đầu về hình học không gian

Hình học không gian là môn học nghiên cứu các tính chất của những hình có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng .

Đối tượng cơ bản của hình học không gian là :điểm ,đường thẳng ,mặt phẳng



Điểm A thuộc mp(P) : $A \in$ mp(P)

Điểm A không thuộc mp(P) : $A \notin$ mp(P)

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

<u>Tính chất thừa nhận 1</u> :

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước

<u>Tính chất thừa nhận 2</u> :

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước

<u>Tính chất thừa nhận 3</u> :

Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng

<u>Tính chất thừa nhận 4</u> :

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó, đường
thẳng này gọi là *giao tuyến* của hai mặt phẳng

<u>Tính chất thừa nhận 5</u> :

Trên mỗi mặt phẳng ,các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng

Định lí :

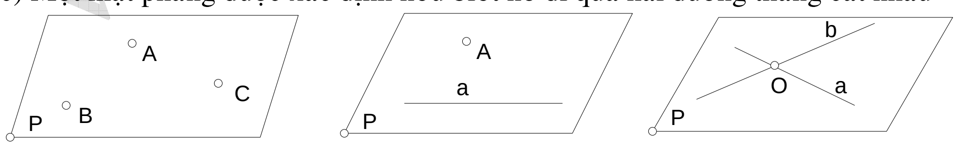
Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trên mặt phẳng đó

3. Điều kiện xác định mặt phẳng

a) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng

b) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó

c) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau



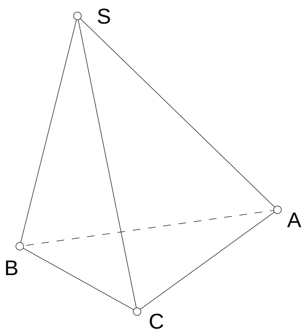
4. Hình chóp và hình tứ diện

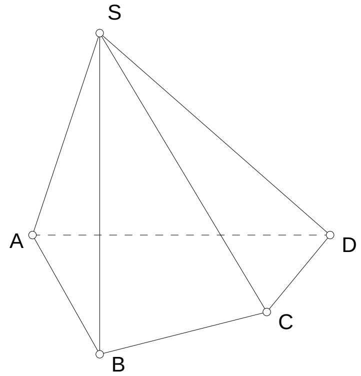
Hình chóp : Cho đa giác phẳng $A_1A_2 \ldots A_n$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng đa giác.

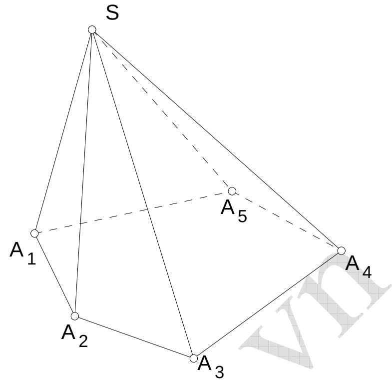
Hình gồm n tam giác $SA_1A_2, \ldots, SA_nA_1$ và đa giác phẳng $A_1A_2 \ldots A_n$ gọi là hình chóp và được kí hiệu $S.A_1A_2 \ldots A_n$

- S là đỉnh . Đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ là mặt đáy. Các cạnh của mặt đáy là cạnh đáy

- Các đoạn thẳng SA_1, SA_2 , . . . ,SA_n là cạnh bên
- Các tam giác SA_1A_2 , . . . , SA_nA_1 là mặt bên







Hình chóp tam giác Hình chóp tứ giác Hình chóp ngũ giác

Hình tứ diện : Cho bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng.Hình gồm bốn tam giác ABC,ACD,ABD và BCD gọi là hình tứ diện hay tứ diện kí hiệu ABCD.

- Tứ diện có thể coi là hình chóp tam giác bằng bốn cách,mặt nào cũng có thể là mặt đáy
- Tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều gọi là tứ diện đều

B.Giải toán

Dạng 1 : Xác định mặt phẳng :dùng 3 điều kiện xác định mặt phẳng

Ví dụ 1: Cho 4 điểm A,B,C,D không đồng phẳng. Chứng minh 3 trong 4 điểm này không thẳng hàng

Giải

Nếu 3 trong 4 điểm chẳng hạn A,B,C thẳng hàng thì điểm D và đường thẳngABC xác định một mặt phẳng ,điều này trái với giả thiết 4 điểm A,B,C và D không đồng phẳng

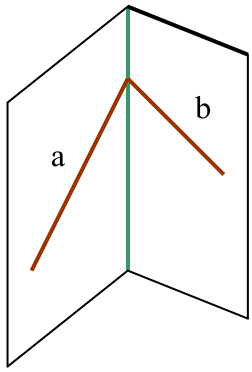
Ví dụ 2 : Cho ba đường thẳng a,b,c không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một .Chứng minh chúng đồng qui.

Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng a và b .Đường thẳng c phải qua O vì nếu c không qua O thì c cắt a tai A khác O và cắt b tại B khác O do đó c nằm trong mp(a,b)vì c có hai điểm A và B thuộc mp(a,b).Điều này trái với giả thiết a,b,c không đồng phẳng.

Dạng 2 : Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

- ❖ Ta tìm hai điểm chung A, B. Giao tuyến là đường thẳng AB.
- ❖ Để tìm điểm chung của A của α và β , ta chọn một đường thẳng a của α và một đường thẳng b của β sao cho a và b cắt nhau tại A.
  (Điều kiện cần là a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thứ ba)



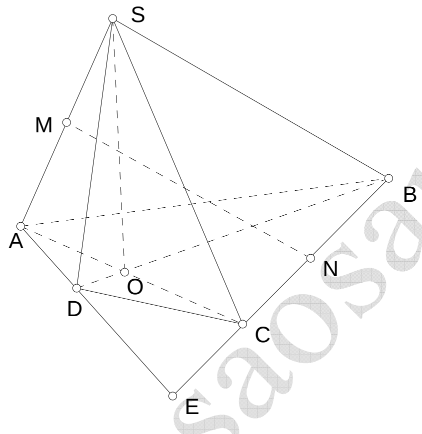
Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD trong đó đáy ABCD là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song
Tìm giao tuyến của :
a) Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)
b) Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)
c) Hai mặt phẳng (MBC) và (SAN) với M là trung điểm của SA và N là trung điểm của BC.

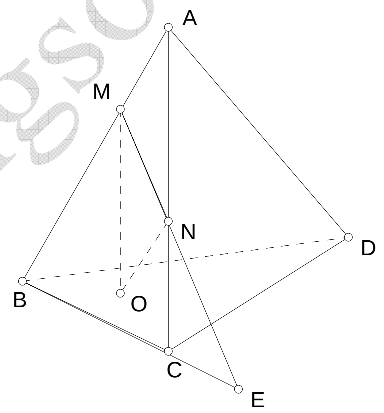
Giải

a) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của mặt đáy ABCD thì :
O thuộc AC nên O thuộc mp(SAC)
O thuộc BD nên O thuộc mp(SAD)
Do đó hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có hai điểm chung S và O
Vậy SO = (SAC) $\cap$ (SBD)

b) Theo giả thiết hai cạnh đối AB và CD cắt nhau tại E .Do đó hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có hai điểm chung S và E
Vậy SE = (SAB) $\cap$ (SCD)

c) M là trung điểm của SA nên M $\in$ mp(SAN) và M $\in$ mp(MBC)
N là trung điểm của BC nên N $\in$ mp(MBC) và N $\in$ mp(SAN)
Vậy MN = (MBC) $\cap$ (SAN)





Ví dụ 4 : Cho thứ diện ABCD .Lấy điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh cạnh AC sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tai E.Gọi O là điểm trong tam giác BCD.
a) Tìm giao tuyến của hai mp(OMN) và mp(BCD)
b) Tìm giao tuyến của hai mp(OMN) và mp(ACD)

Giải

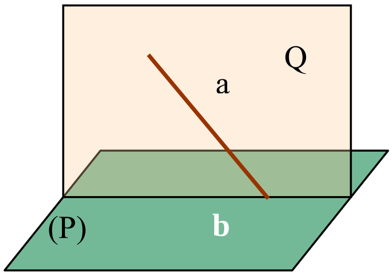
a) E $\in$ BC nên E $\in$ mp(BCD)
E $\in$ MN nên E $\in$ mp(OMN)
O là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng này
Vậy OE = mp(OMN) $\cap$ mp(BCD)

b) Hai mặt phẳng (OMN) và mp(ACD) có N chung vì N $\in$ AC
Đường thẳng OE cắt BD tại F . Đường thẳng MF cắt AD tại I vì nằm trong mp(ABD) và giả sử không song song.
I $\in$ MF nên I $\in$ mp(OMN) và I $\in$ AD nên I $\in$ mp(ACD)
Vậy NI = mp(OMN) $\cap$ mp(ACD)

Hoặc : OE cắt CD tại K thì NK = mp(OMN) $\cap$ mp(ACD)

Dạng 3 : Xác định giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng

- Muốn tìm giao điểm của đường thẳng a với mặt phẳng (P) ta tìm giao điểm của đường thẳng a với đường thẳng b nằm trong mp(P)
- Đường thẳng b phải tìm thường là giao tuyến của (P) và mặt phẳng (Q) nào đó chứa a.



Ví dụ 5 : Cho tứ diện ABCD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC và O là điểm trong tam giác BCD.Tìm giao điểm của :

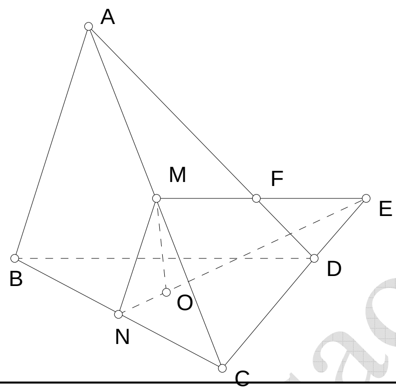
a) CD và mp(OMN)

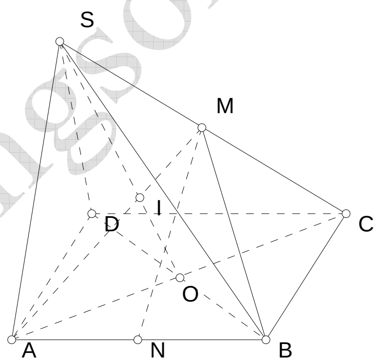
b) AD và mp(OMN)

Giải

a) NO và CD cùng nằm trong mp(BCD) và giả sử cắt nhau tai E .
Vậy CD $\cap$ mp(OMN) = $\{E\}$

b) Ta có mp(OMN) $\cap$ mp(ACD) = ME
Trong mp(ACD) , AD và ME cắt nhau tai F
Vậy AD $\cap$ mp(OMN) = $\{F\}$





Ví dụ 6 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.Gọi M là trung điểm của SC ,

a) Tìm giao điểm I của AM với mp(SBD) và tính $\dfrac{IA}{IM}$

b) Gọi N là trung điểm của AB .Tìm giao điểm E của MN với mp(SBD).
Chứng minh EM = EN

c) Tìm giao điểm của SD với mp(ABM)

Giải

a) Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.Trong tam giác SAC hai trung tuyến AM và SO giao nhau tại I .
Mà I $\in$ SO và SO nằm trong mặt phẳng SBD nên I $\in$ mp(SBD)
Vậy AM $\cap$ mp(SBD) = $\{I\}$

I là trọng tâm tam giác SBD nên $\dfrac{IA}{IM} = 2$

b) Ta thấy BI = mp(SBD) $\cap$ mp(ABM) .Do đó BI cắt MN tại F
Vậy MN $\cap$ mp(SBD) = $\{E\}$

Xét tam giác AMN ta có IA = 2 IM (chứng minh trên)
Do đó gọi F là trung điểm của AI thì NF song song với BI (đường trung của tam giác ABI.Trong tam giác MNI ta có EI song song với NF và I là trung điểm của MF nên E là trung điểm của MN

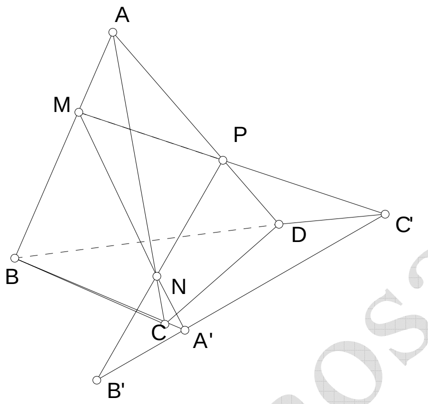
c) Trong tam giác SBD đường thẳng BI cắt SD tại H thì H $\in$ mp(ABM)
Vậy SD $\cap$ mp(ABM) tại H

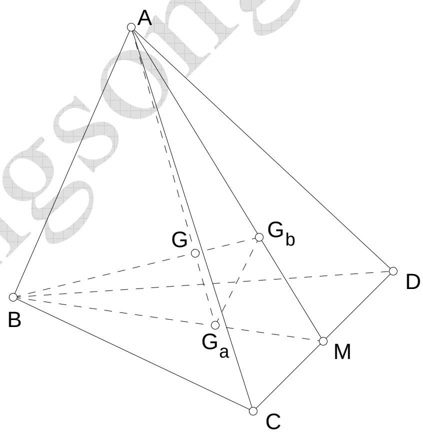
Dạng 4 : Chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng

Ta chứng minh chúng là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau

Ví dụ 7 : Cho tứ diện ABCD.Lần lượt lấy trên các cạnh AB,AC,AD các điểm M,N,P sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại A', đường thẳng NP cắt đường thẳng CD tại B' và đường thẳng MP cắt đường thẳng BD tại C'
Chứng minh ba điểm A',B',C' thẳng hàng

Giải
Ta có A' $\in$ MN nên A' $\in$ mp(MNP) và A' $\in$ BC nên A' $\in$ mp(BCD)
Tương tự B' và C' là điểm chung của hai mp(MNP) và mp(BCD)
Vậy ba điểm A',B',C' thẳng hàng trên giao tuyến của hai mặt phẳng MNP và BCD





Dạng 5 : Chứng minh ba đường thẳng đồng qui

Có 2 cách :

- chứng minh 3 đường thẳng này không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một
- chứng minh 2 trong 3 đường thẳng này cắt nhau và giao điểm của chúng ở trên đường thẳng thứ ba

Ví dụ 8: Cho tứ diện ABCD . Gọi G_a , G_b , G_c lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABC. Chứng minh AG_a và BG_b cắt nhau .Suy ra ba đường thẳng AG_a , BG_b và CG_c đồng qui

Giải
Gọi M là trung điểm của CD . BM là trung tuyến của tam giác BCD nên trọng tâm $G_a \in$ BM . AM cũng là trung tuyến của tam giác ACD nên trọng tâm
$G_b \in$ AM .Trong tam giác ABM hai đoạn AG_a và BG_b cắt nhau tại G
Chứng minh tương tự ba đường thẳng AG_a , BG_b và CG_c không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một ,vậy chúng đồng qui tại G

Ví dụ 9 : Cho hình chóp S.ABCD .Một mặt phẳng (P) lần lượt cắt SA, SB, SC, SD tại A', B' ,C', D'. Gọi O là giao điểm của AC và BD .Chứng minh ba đường thẳng A'C', B'D' và SO đồng qui.

Giải

Trong mặt phẳng (P) hai đường chéo A'C' và B'D' cắt nhau tại O'

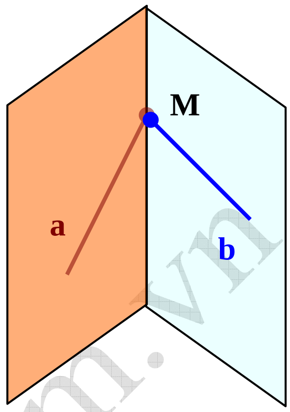
Ta có : (SAC) $\cap$ (SBD) = SO

Mà O' $\in$ A'C' và A'C' nằm trong mp(SAC) nên O' $\in$ mp(SAC)

và O' $\in$ B'D' và B'D' nằm trong mp(SBD) nên O' $\in$ mp(SBD)

Vậy O' $\in$ SO giao tuyến của hai mặt phẳng này

Suy ra A'C' , B'D' và So đồng qui



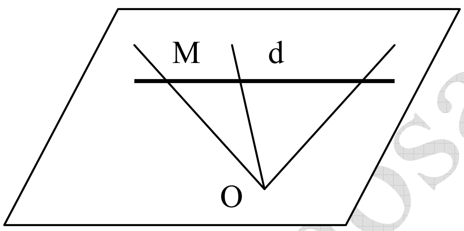
Dạng 6 : Tập hợp các giao điểm M của 2 đường thẳng a và b di động.

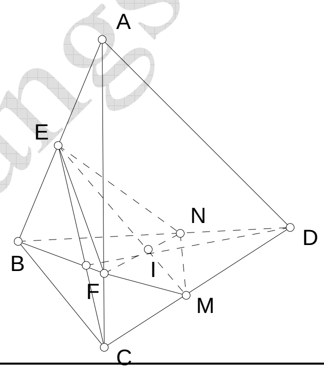
- Tìm mặt phẳng (P) cố định chứa a và mặt phẳng (Q) cố định chứa b.
- M di động trên giao tuyến d của (P) v à (Q).
- Xét giới hạn. nếu có.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O.Điểm M di động trên đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (P) và không quaO .Tập hợp các đường thẳng OM làmặt phẳng cố định nào?

Giải

Điểm O cố định và đường thẳng d cố định không qua O xác định mặt phẳng (O,d) .Điểm M $\in$ d nên OM nằm trong mặt phẳng cố định (O,d)





Ví dụ 11 : Cho tứ diện ABCD . Gọi E và F lần lượt là hai điểm cố định trên các cạnh AB và AC sao cho EF không song song với BC.Điểm M di động trên cạnh CD

a) Xác định giao điểm N của mp(MEF) với BD
b) Tìm tập hợp giao điểm I của EM và FN

Giải

a) EF không song song với BC nên cắt BC tại K.Trong tam giác BCD đường thẳng KM cắt BD tại N.Vậy N là giao điểm của mp(MEF) với BD

b) Ta có I $\in$ EM và EM nằm trong mp(ECD) cố định nên I $\in$ mp(ECD)

I $\in$ FN và FN nằm trong mp(FBD) cố định nên I $\in$ mp(FBD)

Vậy I $\in$ giao tuyến của hai mp(ECD) và (FBD)

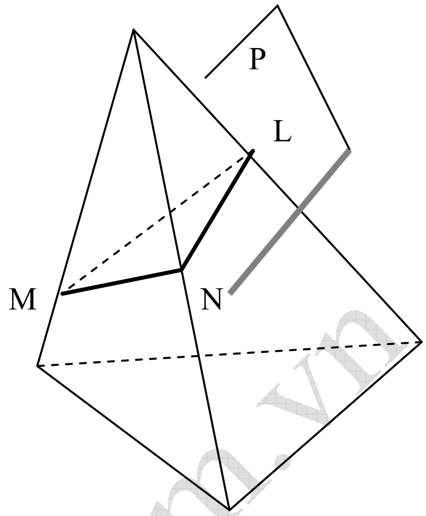
Gọi G là giao điểm của BF và CE thì I $\in$ DK giao tuyến của hai mp(ECD) vàmp(FBD)

Giới hạn : khi M di động trên đoạn CD thì I di động trên đoạn DG

Phần đảo : Gọi I là điểm tùy ý trên đoạn DG .EI cắt CD tại M và FI cắt BD tại N .Vậy I là giao điểm của EM và FN

Dạng 7: Thiết diện (mặt cắt) của hình (H) khi cắt bởi mp(P).

- Thiết diện là phần chung của mp(P) và hình (H)
- Xác định thiết diện là xác định **giao tuyến** của mp(P) với các mặt của hình (H). Thường ta xác định giao tuyến đầu tiên của (P) và một mặt nào đó (tìm 2 điểm chung). Sau đó kéo dài giao tuyến này ta tìm được các điểm chung khác với các mặt khác. Từ đó tìm được các giao tuyến tiếp theo. Đa giác giới hạn bởi các đoạn giao tuyến này khép kìm thành thiết diện cần tìm..



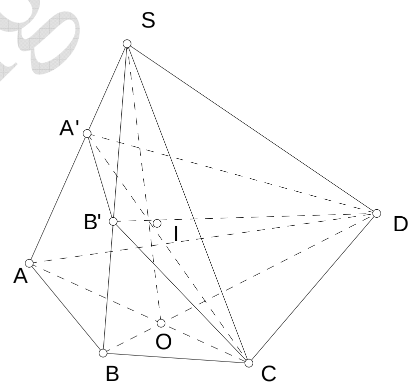
Trong hình bên, tam giác MNL là thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp.

Ví dụ 12 : Cho hình chóp S.ABCD. Lấy điểm A' trên cạnh SA Xác định thiết diện của mp(A'CD) với hình chóp

Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của mặt đáy .Trong tam giác SAC, SO cắt A'C tại O'.Trong tam giác SBD , DO' cắt SB tại B'.

Vậy thiết diện của hình chóp với mp(A'CD) là tứ giác A'B'CD



C.Bài tập rèn luyện

2.1 Hình chóp có đáy là lục giác thì có bao nhiêu mặt bên và bao nhiêu cạnh

2.2 Cho tứ diện ABCD.Lần lượt lấy trên các cạnh AB,AC và BD các điểm M.N,P sao cho MN cắt BC tại E và AD cắt MP tại F

a) Xác định giao tuyến của hai mp(MNP) và mp(BCD)

Xác định giao tuyến của hai mp(MNP) và mp(ACD)

b) Chứng minh CD, EP và NF đồng qui

2.3 Cho hình chóp S.ABCD ,giả sử AD và BC cắt nhau tại E .Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SA và SB , điểm M lưu động trên cạnh SD

a) Tìm giao tuyến của hai mp(SAD) và mp(SBC)

Tìm giao tuyến của hai mp(SAC) và (SBD)

b) Tìm giao điểm N của SC với mp(MIJ)

c) Tìm tập hợp giao điểm H của IN và JM

2.4 Cho tứ diện ABCD .Lấy điểm M trên cạnh AB và N trên cạnh AD sao cho MN và BD không song song .Gọi O là điểm trong tam giác BCD.Tìm giao tuyến của mp(OMN) với các mp(BCD), mp(ABC) và mp(ACD)

2.5 Cho tứ diện ABCD .Lấy điểm P trên đường thẳng BD không thuộc đoạn BD. Trong mp(ABD) đường thẳng qua P cắt hai cạnh AB và AD lần lượt tại E và F .Trong mp(BCD) đường thẳng qua P cắt hai cạnh BC và CD lần lượt tại M và N .

a) Bốn điểm E,F,M,N có thuộc mặt phẳng không?

b) Gọi O là giao điểm của BN và DM , I là giao điểm của BF và DE , J là giao điểm của EN và FM .Chứng mimh ba điểm A,O,J thẳng hàng và ba điểm C,I,J thẳng hàng
c) Giả sử EM và FN cắt nhau tại K.Chứng minh A,K,C thẳng hàng

2.6 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.Lấy điểm M trên cạnh SC, điểm N trên cạnh SD và gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.
a) Tìm giao điểm của SO với mặt phẳng (BMN)
b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (BMN)
c) Xác định giao điểm của MN với mặt phẳng (SAB)

2.7 Cho tứ diện ABCD.Lấy điểm M trong tam giác BCD và điểm N trong tam giác ACD .
Xác định giao tuyến của mặt phẳng (AMN) với các mặt phẳng (BCD). (ABC)

2.8 Cho hình chóp S.ABCD .Giả sử AD và BC không song song .Gọi O là giao điểm của AC và BD,E và F lần lượt là trung điểm của SA và SB.Điểm M di động trên cạnh SC.
a) Xác định giao điểm N của SD với mp(EFM)
b) Tìm tập hợp giao điểm I của EM và FN
c) Tìm tập hợp giao điểm J của EN và FM

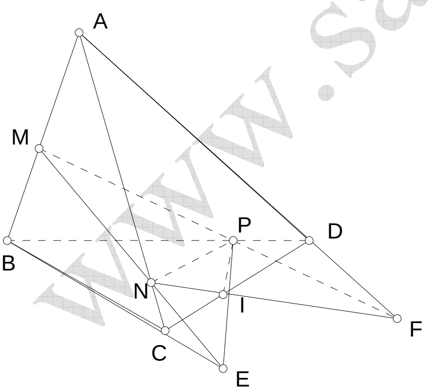
2.9 Cho tứ diện đều ABCD có các cạnh đều bằng a.Kéo dài BC một đoạn CE = a và kéo dài BD một đoạn DF = a.Gọi M là trung điểm của AB.Xác định và tính diện tích của thiết diện của tứ diện với mp(MEF)

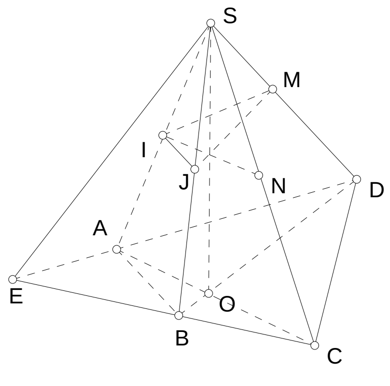
2.10 Cho hình chóp S.ABCD và điểm O trong tam giác SAB.Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (CDO)

D.Hướng dẫn giải

2.1 12 cạnh và 6 mặt bên

2.2 a) Hai mặt phẳng (MNP) và (BCD) có hai điểm chung E và P .Vậy giao tuyến của chúng là EP
Hai mặt phẳng (MN) và (ACD) có hai điểm chung là N và F .Vậy giao tuyến của chúng là NF
b) Gọi I là giao điểm của EP và NF thì I thuộc hai mặt phẳng (BCD) và (ACD)
Vậy I thuộc giao tuyến CD của hai mặt phẳng này.Suy ra CD,EP và NF đồng qui





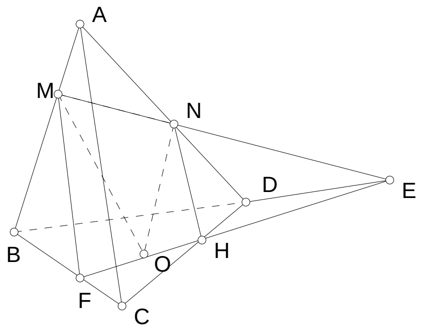
2.3 a) Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có hai điểm chung S và E .Vậy giao tuyến của chúng là SE
Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có hai điểm chung S và O .Vậy giao tuyến của chúng là SO
b) Trong tam giác SBD , SO và MJ cắt nhau tai H.Trong tam giác SAC , IH cắt SC tại N .Vậy N là giao điểm của SC với mặt phẳng (MIJ)
a) Ta có H $\in$ IN nên thuộc mặt phẳng (SAC)
H $\in$ MJ nên H thuộc mặt phẳng (SBD)

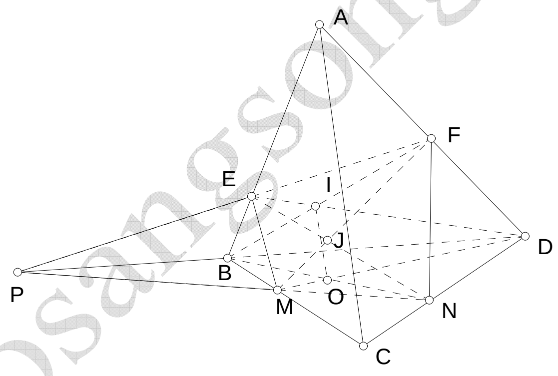
Vậy H $\in$ SO giao tuyến của hai mặt phẳng này
Giới hạn : khi M đến S thì H đến S và khi M đến D thì H đến H' là giao điểm của SO với JD
Đảo lại , lấy điểm H trên đoạn SH'.JH cắt SD tại M và IH cắt SC tại N
Vậy tập hợp các điểm H là đoạn SH'

2.4.Trong mặt phẳng ABD , MN và AD không song song nên cắt nhau taiE.
Hai mặt phẳng (OMN) và (BCD) có hai điểm chung O và E nên giao tuyến của chúng là OE
Giả sử EO cắt BC tại F .Hai mặt phẳng (OMN) và (ABC) có hai điểm chung M và F .Vậy giao tuyến của chúng là MF
Giả sử OE cắt CD tại H .Hai mặt phẳng (OMN) và (ACD) có hai điểm chung N và H .Vậy giao tuyến của chúng là NH

2.5 a) Hai đường thẳng PEF và PMN đồng qui nên xác định mặt phẳng .Vậy 4 điểm E,F,M,N thuộc mặt phẳng
b) Ba điểm A,O,J là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (ABN) và (ADM) .Vậy chúng thẳng hàng trên giao tuyến của hai mặt phẳng này
Ba điểm C,I,J là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (CDE) và (CBF) .Vậy chúng thẳng hàng trên giao tuyến của hai mặt phẳng này

c) Ba điểm A,K,C là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (ABC) và (ADC) .Vậy chúng thẳng hàng trên giao tuyến của hai mặt phẳng này

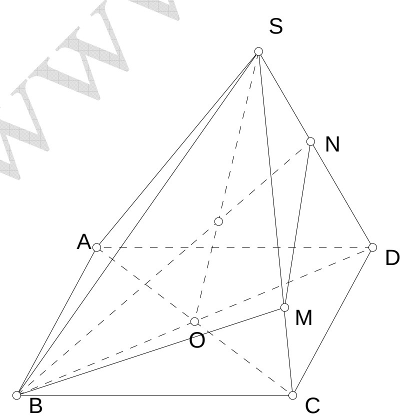


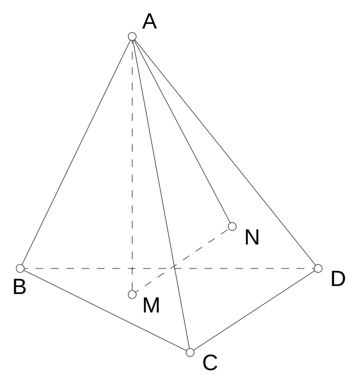


a) SO và BN nằm trong tam giác SBD nên cắt nhau tại I.Vậy I là giao điểm của SO với mp(BMN).

b) Trong tam giác SAC, MI cắt SA tại P .Vậy PN là giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và(SAD)

c) Trong mp(BMN) giả sử MN và BP cắt nhau tại H thì MN $\cap$ (SAB) = $\{H\}$





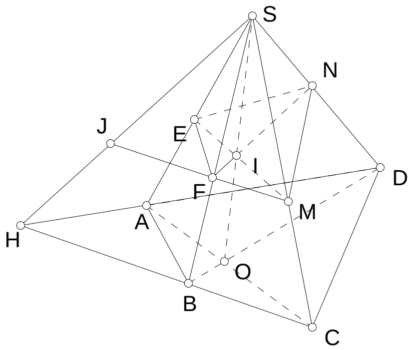
2.6. N thuộc mp(ACD) nên AN nối dài cắt CD tại E .Hai mặt phẳng (AMN) và (BCD) có hai điểm chung M và E nên giao tuyến của chúng là ME

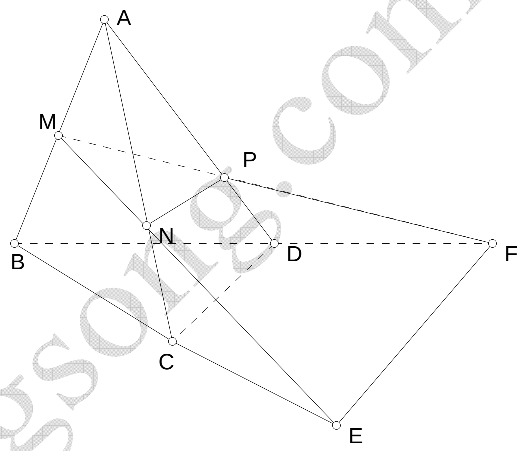
Giả sử ME cắt BC tại F .Hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) có hai điểm chung A và F nên giao tuyến của chúng là AF

2.8 a) Trong mp(SAC) , EM cắt SO tại I.Trong mp(SBD) , FI cắt SD tại N.Vậy N là giao điểm của SD với mp(EFM)
b) I thuộc giao tuyến SO của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
Giới hạn : Khi M đến S thì I đến S và khi M đến C thì I đến I' là giao điểm của SO với CE.Xét phần đảo

c) J thuộc giao tuyến SH của hai mặt phẳng (SBC) và(SAD).Giới hạn : khi M đến S thì J đến S và khi M đến C thì J đến J' giao điểm của SH với MF.Xét phần đảo

2.9 ME cắt AC tại N và MF cắt AD tại P .Thiết diện của tứ diện với mp(MEF) là tam giác MNP.
Trong tam giác ABE,AC và EM là hai trung tuyến giao nhau tại trọng tâm N
Trong tam giác ABF,AD và FM là hai trung tuyến giao nhau tại trọng tâm P



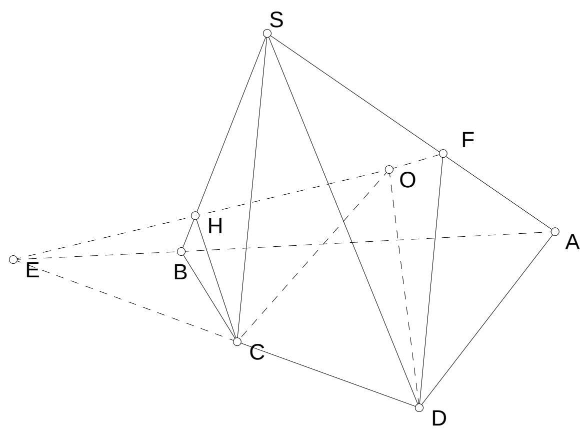


Ta có AM = $\dfrac{a}{2}$, AN = AP = NP = $\dfrac{2a}{3}$ .Tam giác MNP cân tại M nên đường cao MH cũng là trung tuyến ,do đó NH = $\dfrac{a}{3}$

Tam giác vuông MNH cho $MH^2 = MN^2 - NH^2 = \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{9} = \dfrac{5a^2}{36}$

Do đó MH = $\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$. Vậy S_{MNP} =

$$\frac{1}{2}NP \times MH = \frac{1}{2}.\frac{2a}{3} \times \frac{a\sqrt{5}}{6} = \frac{a^2\sqrt{5}}{18}$$



2.10 Giả sử đường thẳng CD cắt đường thẳng AB tại E.Đường thẳng EO cắt SA tại F và cắt SB tại H (vì điểm O ở trong tam giác SAB).Hai mặt phẳng (CDO) và (SBC) có hai điểm chung C và H nên cắt nhau theo giao tuyến CH .Hai mặt (CDO) và (SDA) có hai điểm chung D và F nên cắt nhau theo giao tuyến DF
Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt (CDO) là tứ giác CDFH

§2. Hai đường thẳng song song

A. Tóm tắt giáo khoa

1..Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian :

a) Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b, ta nói hai đường thẳng a và b **chéo nhau**

b) Có mặt phẳng chứa cả a và b ,ta nói chúng **đồng phẳng**

- nếu a và b không có điểm chung thì ta nói chúng song song với nhau và kí hiệu a // b
- nếu a và b có một điểm chung duy nhất thì ta nói chúng cắt nhau Nếu điểm chung của chúng là I , ta nói chúng cắt nhau tại I hoặc I là giao điểm của chúng và viết $a \cap b = \{I\}$

Định nghĩa : Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng

Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

2. Hai đường thẳng song song

Tính chất 1 :

Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ,có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó

Tính chất 2 :

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song nhau

Định lí :

Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng qui hoặc song song

Hệ quả :

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó)

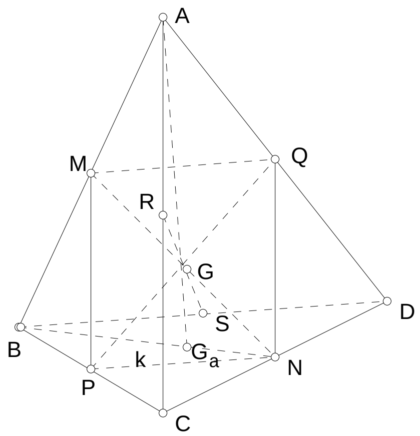
B.Giải toán

Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD.Gọi M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, DA, AC, BD.

a) Chứng minh ba đoạn thẳng MN,PQ và RS đồng qui tại trung điểm G của mỗi đoạn.

b) Gọi G_a là trọng tâm tam giác BCD.Chứng minh ba điểm A,G,G_a thẳng hàng và tính $\frac{GA}{GG_a}$

Giải



a) MP là đường trung bình tam giác ABC và NQđường trung bình tam giác ACD nên ta có : MP//NQ//AC và $MP = NQ = \frac{AC}{2}$

Vậy tứ giác MPNQ là hình bình hành nên hai đường chéo MN và PQ giao nhau tại trung điểm G mỗi đường.

Chứng minh tương tự tứ giác PRQS là hình bính hành nên hai đường chéo PQ và RS giao nhau tại trung điểm mỗi đường.

Vậy ba đoạn thẳng MN,PQ và RS đồng qui tại trung điểm G

b) G_a là trọng tâm của tam giác BCD nên G_a thuộc trung tuyến BN và trung tuyến DP ,do đó G_a thuộc hai mặt phẳng (ABN) và mặt phẳng (ADP).

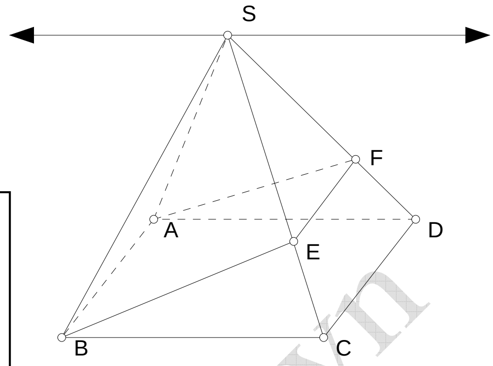
Ba điểm A, G, G_a là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (ABN) và (ADP) .Vậy chúng thẳng hàng trên giao tuyến AG_a

Gọi I là trung điểm của BN thì GI // BM (đường trung bình của tam giác BMN)

Ta có $GI = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{4}AB$

Hai tam giác G_aGI và G_aAB đồng dạng nên $\frac{G_aG}{G_aA} = \frac{IG}{AB} = \frac{1}{4}$

Vậy $\frac{GA}{GG_a} = 3$



Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)
b) Lấy điểm E trên cạnh SC . Mặt phẳng (ABE) cắt SD tại F .Tứ giác ABEF là hình gì?

Giải

a) Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có điểm S chung và lần lượt chứa hai đường thẳng AD và BC song song nên chúng cắt nhau theo giao tuyến d đi qua S và song song với AD và BC

b) Hai mặt phẳng (ABE) và (SCD) có điểm E chung và lần lượt chứa hai đường thẳng AB và CD song song nên chúng cắt nhau theo giao tuyến EF song song với AB.Vậy tứ giác ABEF là hình thang

C.Bài tập rèn luyện

2.11 Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b .Lấy trên a hai điểm A và B .Lấy trên b hai điểm C và D.Hai đường thẳng AB và CD có thể song song nhau không?

2.12 Cho tứ diện ABCD .Gọi E và F lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD .Chứng minh EF song song với CD

2.13 Cho tứ diện ABCD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC.P là điểm di động trên đoạn CD.Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q.
a) Tứ giác MNPQ là hình gì?
b) Tìm tập hợp giao điểm I của MQ và NP khi M di động trên đoạn CD

2.14 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.Gọi E và F là trung điểm của SA và SB
a) Lấy điểm M trên cạnh SC.Mặt phẳng (EFM) cắt hình chóp theo hình gì?
b) Lấy điểm I trên BC.Mặt phẳng EFI cắt hình chóp theo hình gì?

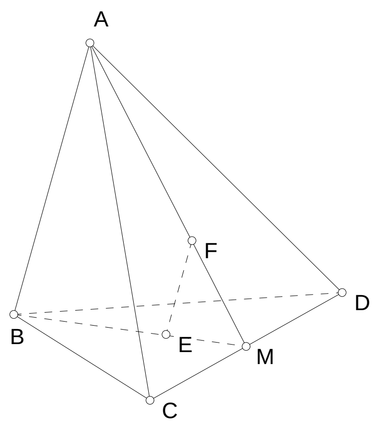
D. Hướng dẫn giải

2.11 Nếu AB // CD thì AB và CD đồng phẳng , khi ấy a và b nằm trong mặt phẳng (ABCD).Điều này trái giả thiết a và b chéo nhau.
Vậy AB và CD không thể song song

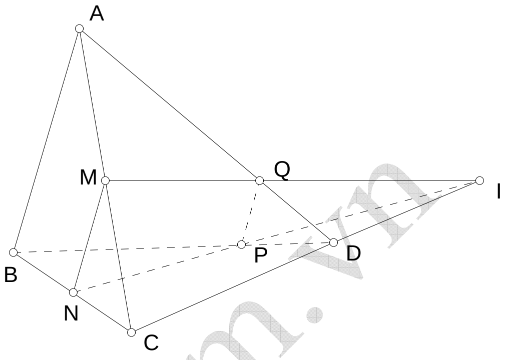
2.12
Gọi M là trung điểm của CD . E là trọng tâm tam giác BCD nên E thuộc trung tuyến BM
F là trọng tâm tam giác ACD nên F thuộc trung tuyến AM .
Trong mp(ABM) ta có :

$$\frac{ME}{MB} = \frac{MF}{MA} = \frac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

Vậy EF//AB



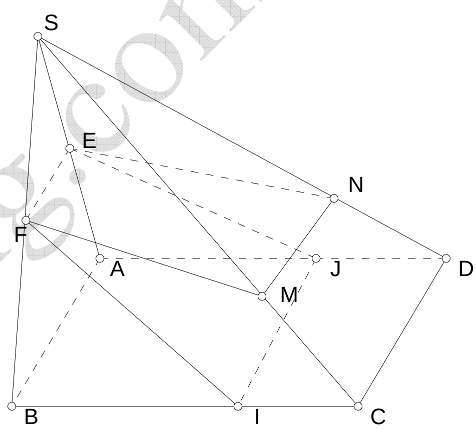
2.13 a) Ta có MN // AB (đường trung bình của tam giác ABC)
Hai mặt phẳng (MNP) và (ABD) có P chung và lần lượt chứa MN và AB song song nên chúng cắt nhau theo giao tuyến PQ // MN
Vậy tứ giác MNPQ là hình thang



b) I là điểm chung của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) . Vậy I thuộc giao tuyến CD của hai mặt phẳng này . Gọi E là trung điểm của BD. Khi P di động trên đoạn DE thì PQ < MN nên I thuộc tia Dt nối dài của CD
Khi P trùng với E thì PQ = MN ,khi đó tứ giác MNPQ là hình bình hành nên I chạy xa ra vô tận trên tia Dt
Khi P di động trên đoạn EB thì PQ > MN nên I thuộc tia Ct' nối dài của DC
Vậy điểm I di động trên đường thẳng CD ngoại trừ đoạn CD
Xét phần đảo.

2.14 a) Ta có EF // AB // CD (đường trung bình của tam giác SAB) .Hai mặt phẳng (EFM) và(SCD) có M chung và lần lượt chứ EF và CDsong song nên giao tuyến của chúng là MN // EF
Vậy thiết diện là hình thang EFMN

b) Tương tự mặt (EFI) cắt AD tại J và thiết diện EFIJ là hình thang



§3. Đường thẳng song song với mặt phẳng

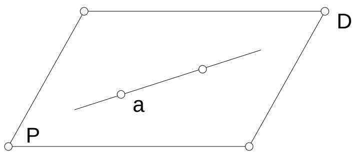
A.Tóm tắt giáo khoa

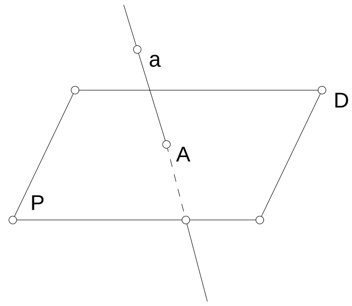
1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

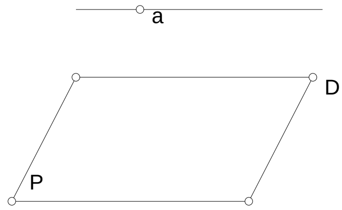
Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P).Ta có ba trường hợp :

a) Đường thẳng a và mp(P) có hai điểm chung phân biệt thì đường thẳng a nằm trên mp(P),tức là a $\subset$ mp(P)
b) Đường thẳng a và mp(P) có một điểm chung duy nhất A thì ta nói a và (P) cắt nhau tại A và viết a $\cap$ (P) = $\{A\}$
c) Đường thẳng a và mp(P) không có điểm chung nào thì ta nói đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), hoặc mặt phẳng (P) song song với đường thẳng a ,hoặc a và (P) song song với nhau và viết a // mp(P)

<u>Định nghĩa</u> :
Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung







2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

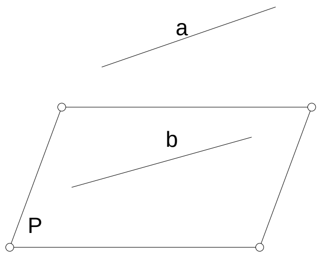
<u>Định lí 1</u> :

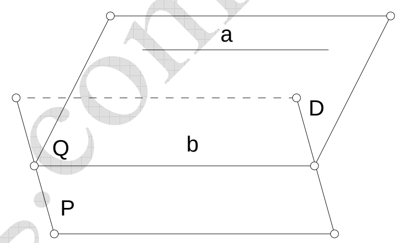
Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó nằm trên (P) thì a song song với (P)

3. Tính chất

<u>Định lí 2</u> :

Nếu đường thẳng a song song với một mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt (P) theo giao tuyến song song với a





<u>Hệ quả 1</u> :

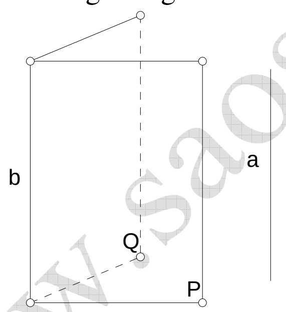
Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó của mặt phẳng

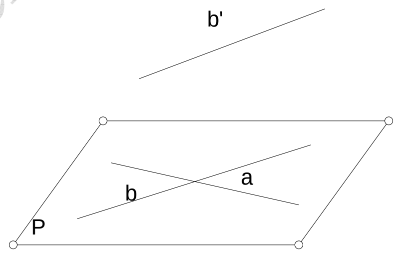
<u>Hệ quả 2</u> :

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó

<u>Định lí 3</u> :

Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a , có một và chỉ một mặt phẳng song song với b





B. Giải toán

Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng ta có thể chứng minh **đường thẳng đó song song với một đường thầng nằm trong mặt phẳng.**

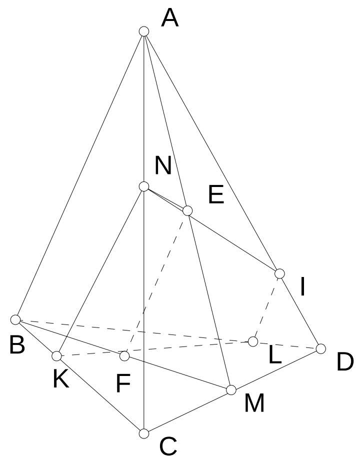
Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD.Gọi M là trung điểm của CD,E là trung điểm của AM và F là trung điểm của BM.

a) Chứng minh rằng EF song song với các mặt phẳng (ABC) và ABD)

b) Lấy diểm N trên cạnh AC .Xác định thiết diện của hình chóp với mp(NEF)

Thiết diện là hình gì?

Giải



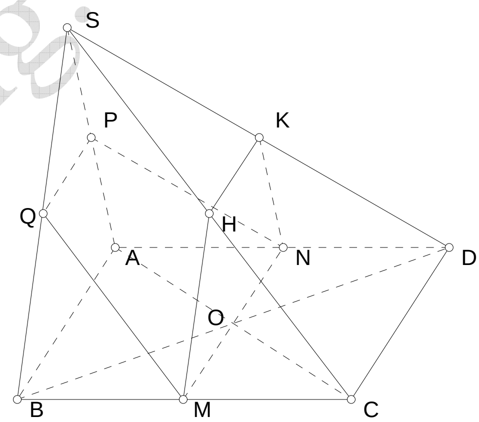
a) EF // AB (đường trung bình của tam giác ABM)
Vậy EF //mp(ABC) và EF // mp(ABD)

b) Ta có EF // mp(ABC) nên mp(NEF) cắt mp(ABC) theo giao tuyến NK //AB//EF
Giả sử KF cắt BD tại L.Hai mp(NEF) và (ABD) có L chung và EF // AB nên giao tuyến của chúng là LI // AB// NK
Vậy thiết diện là hình thangNKLI

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình tâm O.Gọi M , N và P lần lượt là trung điểm của BC ,AD và SA.
a) Chứng minh SC và SD song song với mp(MNP)
b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (R) qua O và song song với CD và SA

Giải

a) Ta có NP // SD (đường trung bình của tam giác SAD .Do đó SD // mp(MNP) .Hai mặt phẳng (MNP) và (SAB) có điểm P chung và lần lượt chứa MN và AB song song nên giao tuyến làPQ // AB . Do đó Q là trung điểm của SB . Khi đó ta có MQ // SC (đường trung bình của tam giác SBC .Vậy SC // mp(MNPQ)



b) Ta có MN // CD nên mp(R) qua O và // CD thì mp(R) chứa MN.Hai mặt (R) và (SAD) có N chung và (R) // SA ,do đó (R) cắt (SAD) theo giao tuyến
NK // SA . Vì mp(R) // CD nên (R) $\cap$ (SCD) = HK // CD // MN
Vậy thiết diện là thình thang MNKH.

C. Bài tập rèn luyện

2.15 Cho tứ diện ABCD .Gọi E và F là trọng tâm các tam giác ACD và BCD.
a) Chứng minh EF song song với các mp(ABC) và mp(ABD)
b) Mặt phẳng (P) qua EF cắt tứ diện ABCD theo hình gì?

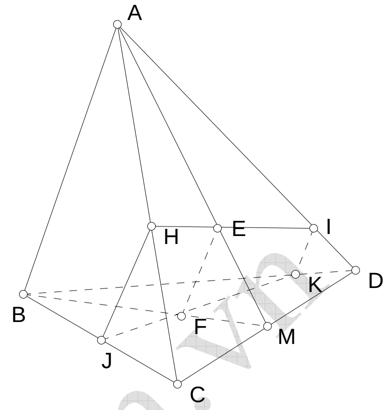
2.**16** Cho tứ diện ABCD .Lấy điểm M trên cạnh BC. Mặt phẳng (P) qua M và song song với AB và CD cắt tứ diện ABCD theo hình gì?

2**. 17** Cho hình thang ABCD (AB//CD) và điểm S ở ngoài mặt phẳng hình thang. Lấy điểm M trên cạnh CD .Mặt phẳng (P) qua M và song song với SA và BC
a) Mặt phẳng (P) cắt hình chóp SABCD theo hình gì?
b) Tìm giao tuyến của mp(P) với mp(SAD)

2.18 Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có cạnh chung AB và không cùng nằm trên một mặt phẳng.
a) Gọi O và O’ lần lượt là tâm của ABCD và ABEF .Chứng minh OO’ song song với các mp(ADF) và (BCE)

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABE.Chứng minh MN song song với mp(CEF)

D. Hướng dẫn giải



2.15 a) Gọi M là trung điểm của CD thì E $\in$ AM và F $\in$ BM

Theo tính chất trọng tâm ta có :

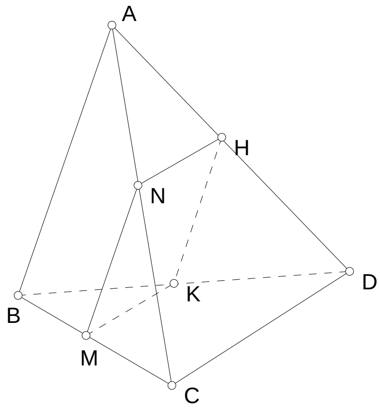
$\dfrac{ME}{MA} = \dfrac{MF}{MB} = \dfrac{1}{3}$ Vậy EF // AB

Suy ra EF song song với các mp(ABD) và mp(ABC)

b) Mặt phẳng (P) qua EF // mp(ABC)

nên (P) $\cap$ (ABC) = HJ // AB // EF . Tương tự (P) $\cap$ (ABD) = IK // AB// EF. Vậy thiết diện là hình thang HIKJ

2.**16** Mặt phẳng (P) qua M và song song với AB nên



(P) $\cap$ (ABC) = MN//AB

(P) $\cap$ (ABD) = HK // AB

Mặt phẳng (P) // CD nên

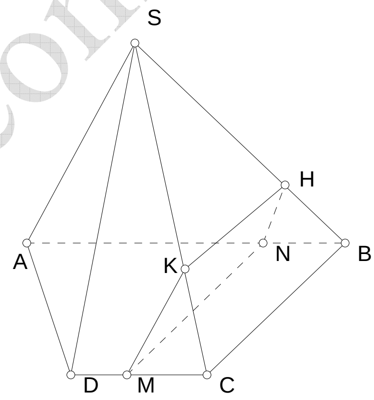
(P) $\cap$ (BCD) = MK // CD

(P) $\cap$ (ACD) = NH // CD

Vậy MN // HK // AB và

MK // NH //CD

Suy ra thiết diện MNHK là hình bình hành



2.17 a) mp(P) // BC nên mp(P) cắt hai mặt phẳng (ABCD) và (SBC) theo hai giao tuyến MN và HK song song với BC.Mặt phẳng (P) // SA nên (P) $\cap$ (SAB) = NH // SA

Thiết diện là hình thang MNHK

b) Đường thẳng MN cắt đường thẳng AD tại E .Hai mặt phẳng (P) và (SAD) có E chung và SA // mp(P) nên giao tuyến là đường thẳng d qua E và song song với SA

2.18 a) OO' là đường trung bình của tam giác BDF nên OO'//DF

Vậy OO' // mp(ADF)

CDFE là hình bình hành nên CE // DF do đó OO' // CE

Vậy OO' // mp(BCE)

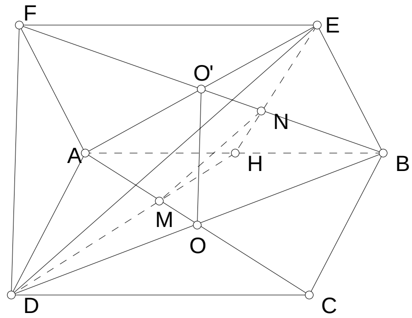
b) Gọi H là trung điểm của AB

M là trọng tâm tam giác ABD nên

M $\in$ DH và N là trong tâm tam giác ABE nên N $\in$ EH và ta có :

$\dfrac{HM}{HD} = \dfrac{FN}{FE} = \dfrac{1}{3}$ .Do đó MN // DE mà DE nằm trên mp(CEF)

Vậy MN // mp(CEF)



§4 . Hai mặt phẳng song song

A .Tóm tắt giáo khoa

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

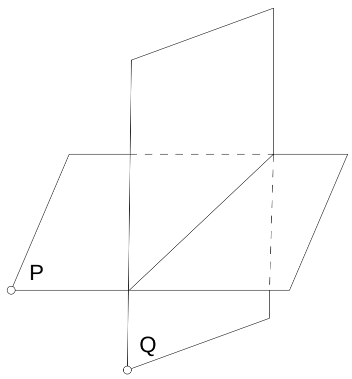
Cho hai mặt phẳng phân biệt ta có hai trường hợp :

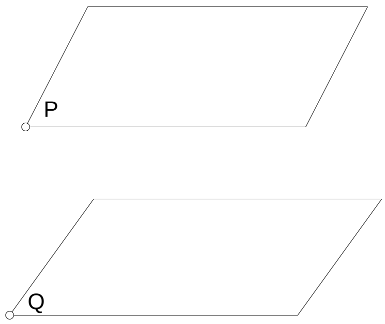
a) (P) và (Q) có điểm chung thì chúng cắt nhau theo một đường thẳng

b) (P) và (Q) không có điểm chung thì ta nói chúng song song với nhau (hoặc song song) ,kí hiệu (P) // (Q) hay (Q) // (P)

Định nghĩa :

Hai mặt phẳng gọi là song song nếu chúng không có điểm chung

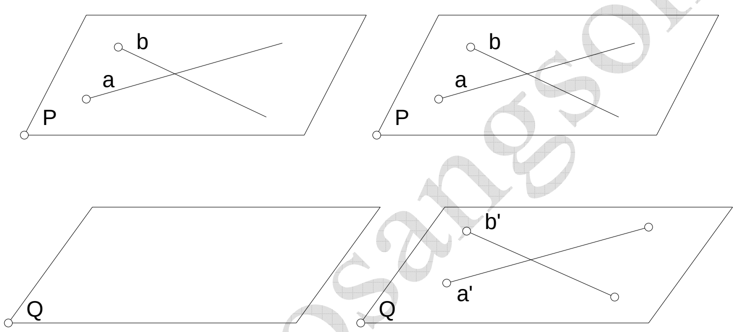




2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lí 1 :

Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q)



3. Tính chất

Tính chất 1 :

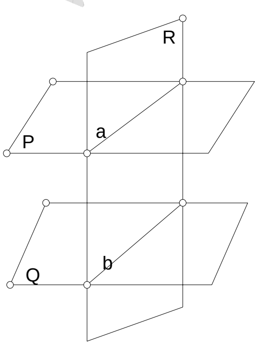
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng,có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó

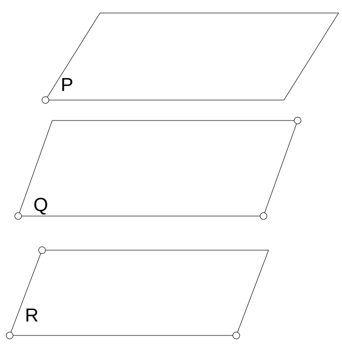
Hệ quả 1 : Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q)

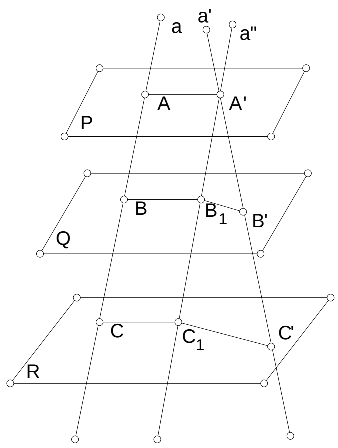
Hệ quả 2 : Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau

Tính chất 2 :

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song







4. Định lí Ta-lét (Thalès) trong không gian

Định lí 2 (Định lí Ta-lét)

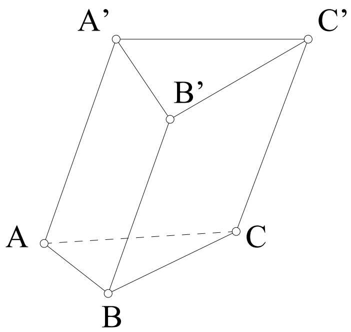
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ

Định lí 3 : (Định lí Ta-lét đảo)

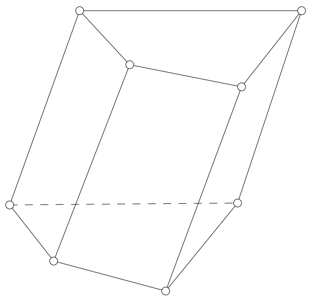
Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a và a’ lần lượt lấy các điểm A,B,C và A’,B’,C’ sao cho $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$ .Khi đó ba đường thẳng AA’,BB’,CC’ lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song,tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

5. Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa hình lăng trụ : Cho hai mặt phẳng (P) và (P’) song song.Trên (P) cho đa giác AB . .D. Qua các đỉnh A , B , . . . , D , ta vẽ các đường thẳng song song với nhau, lần lượt cắt mp(P’) tại A’, B’, . . ., D’. Ta được hình lăng trụ , kí hiệu AB . . .D. A’B’. . .D’. Nếu đáy của hình lăng trụ là tam giác ,tứ giác,ngũ giác v.v. . .thì lăng trụ tương ứng gọi là lăng trụ tam giác,lăng trụ tứ giác , lăng trụ ngũ giác v.v...



Lăng trụ tam giác

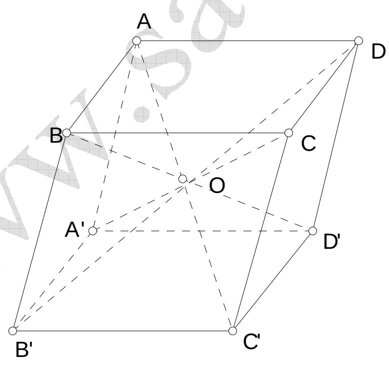


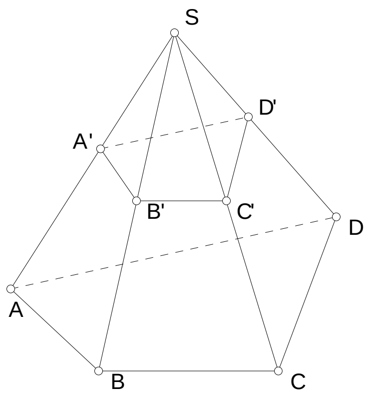
Lăng trụ tứ giác

- Trong lăng trụ , các cạnh bên AA’, BB’ . . .song song và bằng nhau
- Các mặt bên ABB’A’, BCC’B’. . . là hình bình hành
- Hai đáy AB . . .D và A’B’. . D’ bằng nhau và có các cạnh tương ứng bằng nhau.

Hình hộp : Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp. Hình hộp có:

- 6 mặt đều là những hình bình hành, các mặt đối diện thì song song và bằng nhau.
- 12 cạnh chia làm 4 nhóm, mỗi nhóm 4 cạnh song song và bằng nhau.
- 4 đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.





6. Hình chóp cụt

Định nghĩa : Cho mặt phẳng (P) không qua đỉnh hình chóp và song song với mặt phẳng đáy và cắt các cạnh bên hình chóp . Hình giới hạn bởi (P) và mặt phẳng đáy gọi là hình chóp cụt.

Tính chất :

- Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau

- Các mặt bên là những hình thang
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng qui tại một điểm

B.Giải toán

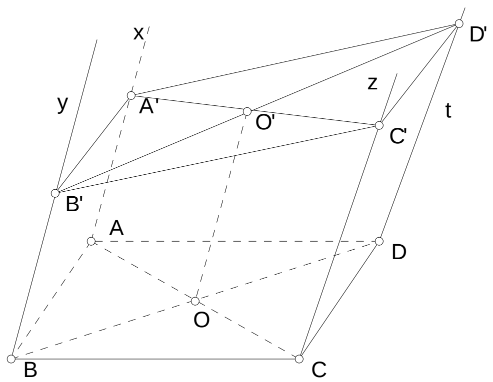
Chứng minh hai mặt phẳng song song ta chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau song song với mặt phẳng kia

Ví dụ 1 : Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD .Qua A,B,C,D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt song song với nhau và nằm về một phía đối với mặt phẳng (P).Mặt phẳng (Q) lần lượt cắt Ax, By, Cz, Dt tại A', B', C', D'.

a) Chứng minh mp(Ax,By) song song với mp(Cz,t)
b) Chứng minh tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành
c) Chứng minh AA' + CC' = BB' + DD'

Giải

a) Ta có Ax // Cz (giả thiết) và AB // CD (cạnh đối hình bình hành)
Vậy mp(Ax,By) // mp(Cz,Dt)

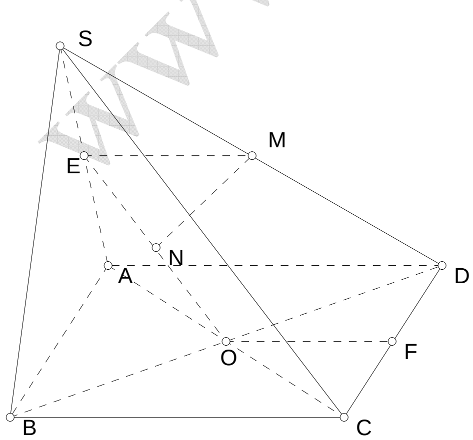


b) mp(Q) cắt hai mặt phẳng songsong (Ax,By) và (Cz,Dt) theo hai tuyến A'B' // C'D'
Tương tự mp(By,Cz) // mp(Ax.Dt) .Do đó mp(Q) cắt hai mặt này theo hai giao tuyến B'C' // A'D'
Vậy tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành
c) Gọi O và O' là tâm hai hình bình hànhABCD và A'B'C'D' .Ta có : OO' = $\dfrac{AA'+CC'}{2}$ (đường trung bình của hình thang ACC'A')
và OO' = $\dfrac{BB'+DD'}{2}$ (đường trung bình của hình thang BDD'B').
Vậy AA' + CC' = BB' + DD'.

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O .Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh mp(OEF) song song với mp(SBC)
b) Gọi M là trung điểm của SD và N là trung điểm của OE . Chứng minh MN song song với mặt phẳng (SBC)

Giải



a) Ta có OF // BC (đường trung bình của tam giác BCD)
và OE // SC (đường trung bình của tam giác SAC)
Vậy mp(OEF) // mp(SBC)

b) Ta có EM // AD (đường trung bình của tam giác SAD)
do đó EM//OF .Suy ra MN nằm trên mặt phẳng (OEMF)
Mà mp(OEMF) // mp(SBC)
Vậy MN // mp(SBC)

Ví dụ 3 : Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau .Hai điểm C và D lần lượt di động trên Ax và By sao cho AC = BD .

a) Chứng minh rằng CD luôn luôn song song với mặt phẳng cố định

b) Trung điểm M cũa CD chạy trên đường nào?

Giải

a) Kẻ Bt // Ax và lấy điểm H trên Bt sao cho BH = AC

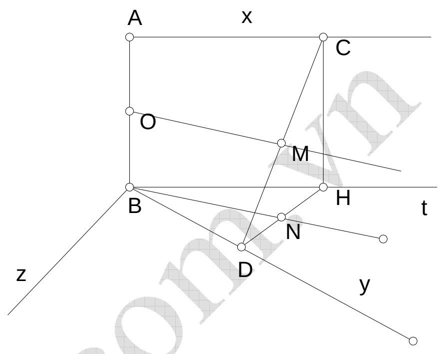
Ta có AC // BH và AC = BH nên tứ giác ABHC là hình bình hành

Do đó CH // AB

Mặt khác BH = BD nên tam giác BDH cân tại B, do đó DH song song với phân giác ngoài Bz .Vậy mp(CDH) // mp(ABz)

Mà CD nằm trên mặt phẳng (CDH) nên

CD // mp(ABz) cố định



b) Gọi O là trung điểm của AB và N là là trung điểm của DH .Ta có MN // OB và MN = OB nên OMNB là hình bình hành, suy ra OM // BN.

Vì tam giác BDH cân nên trung tuyến BNcũng là phân giác của góc yBt , do đó N di động trên tia phân

giác trong Bz’của góc yBt cố định .Vậy M di động trên tia Ou // Bz’

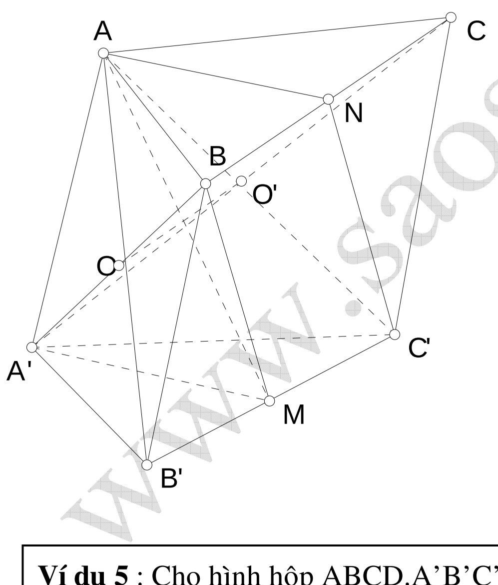
Ví dụ 4 : Cho lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’.Gọi M là trung điểm của B’C’

a) Chứng tỏ mp(AA’M) cắt BC tại N và AN//A’M

b) Chứng minh rằng đường thẳng AC’ song song với mp(BA’M)

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB’C’) và (A’BC)

Giải



a) Hai mặt phẳng (ABC) và (A’B’C’) song song cắt bởi mặt phẳng (AA’M) theo hai giao tuyền AN // A’M , do đó N là trung điểm của BC.

b) Ta có AN // A’M và NC’ // BM.

Do đó mp(ANC’) // mp(BA’M)

Vậy AC’ // mp(BA’M)

c) Gọi O là tâm hình bình hành ABB’A’ và O’ là tâm hình bình hành ACC’A’

Hai mặt phẳng (AB’C’) và (A’BC) có hai điểm chung O và O’ nên giao tuyến của chúng là OO’

Ví dụ 5 : Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’.

a) Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

b) Chứng minh rằng tổng bình phương các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đơ.

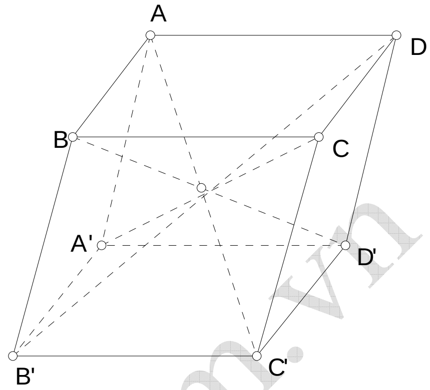
Giải

a) Ta có AA’ // CC’ và AA’ = CC’ nên tứ giác ACC’A’ là hình bình hành, do hai đường chéo AC’ và A’C cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Tương tự các tứ giác ABC’D’ và ADC’B’ là hình bình hành.

Vậy bốn đường chéo AC’, A’C, BD’ và B’D giao nhau tại trung điểm O của mỗi đường

b) Ta chứng minh tính chất : Trong hình bình hành tổng bình phương hai đường chéo bằng tổng bìng phương các cạnh



Xét hình bình hành ABCD, theo định lí hàm cos ta có :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 – 2AB.BC.\cos B$

$BD^2 = AB^2 + AD^2 – 2AB.AD.\cos A$

mà góc A và góc B bù nhau nên cosA = - cosB

Vậy $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$

Áp dụng tính chất này vào các hình hành:

ACC’A’ $\Rightarrow$ $AC'^2 + A'C^2 = 2(AC^2 + AA'^2)$

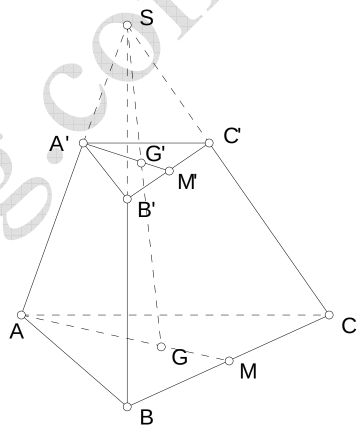
BDD’B’ $\Rightarrow$ $BD'^2 + B'D^2 = 2(BD^2 + BB'^2)$

Vậy $AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 = 4AA'^2 + 2(AC^2 + BD^2)$

(vì AA’ = BB’)

$$= 4AA^2 + 4(AB^2 + BC^2)$$

Ví dụ 6 : Cho hình chóp cụt tam giác ABC.A’B’C’.Gọi S là giao điểm các đường thẳng chứa các cạnh bên và G và G’ là trọng tâm các tam giác ABC và A’B’C’. Chứng tỏ AG // A’G’



Giải

Gọi M và M’ là trung điểm của BC và B’C’ thì trọng tâm G thuộc AM và trọng tâm G’ thuộc A’M’.Hai mặt phẳng song song (ABC) và (A’B’C’) cắt bởi mặt phẳng AGA’ theo hai giao tuyến AG // A’G’

C. Bài tập rèn luyện

2.19 Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có cạnh chung AB và không nằm trong cùng mặt phẳng .

a) Chứng minh mp(CBE) // mp(ADF)

b) Lấy điểm M trên đường chéo AC với MC = 2AM và điểm N trên đường chéo BF với NF = 2BN .Các đường song song với AB kẻ từ M,N lần lượt cắt AD và AF tại M’ và N’.Chứng minh mp(DEF) // mp(MNN’M’)

2.20 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.Gọi O là tâm của hình bình hành , M và N lần lượt là trung điểm của SC và SD .

a) Chứng minh mp(OMN) song song với mp(SAB)

b) Gọi E và F là trung điểm của CD và ON .Chứng minh EF song song với mp(SBC)

2..21. Cho tứ diện ABCD.Gọi M và N là hai điểm di động trên hai đường thẳng AB và CD. Chứng tỏ điểm I nằm trong mặt phẳng cố định

2.22 Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA’ và AC

a) Dựng thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (MNB’)

b) Dựng thiết diện của lăng trụ với mp(MNP) với P là trung điểm của B’C’

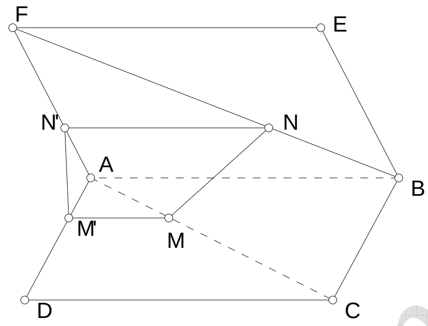
2..23 Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’

a) Chứng minh mp(BDA’) song song với mp(B’D’C)

b) Chứng minh đường chéo AC’ đi qua trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA’ và B’D’C và $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$

D. Hướng dẫn giải

2.19



a) Ta có BC // AD và BE // AF

Vậy mp(CBE) // mp(DAF)

b)MM' // DC nên theo định lí Ta-lét trong tam giác ACD ta có : $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{1}{3}$

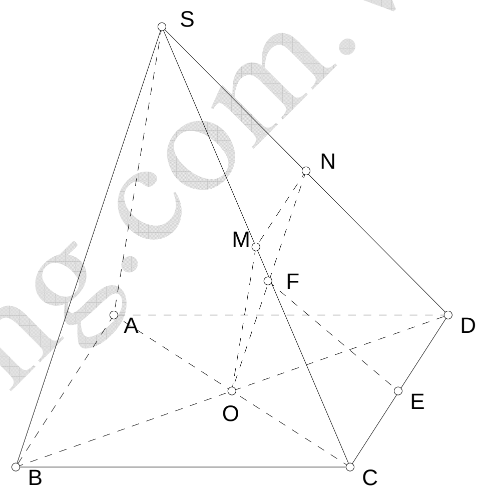
NN' // AB nên ta có : $\dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{1}{3}$

Do đó : $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF}$ $\Rightarrow$ M'N' // DF

Ta có EF // NN' (cùng song song với AB) và DF // M'N'

Vậy mp(DEF) // mp(MNN'M').

2.20



a) Ta có MN // CD và AB // CD nên MN // AB

Ta có MO // SA

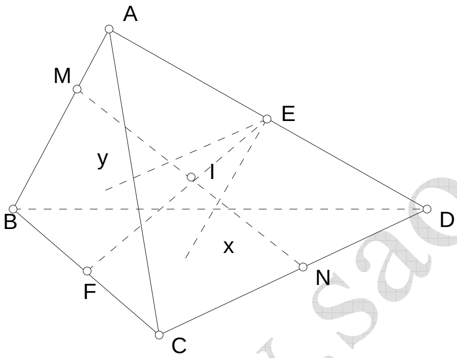
Vậy mp(OMN) // mp(SAB)

b) Ta có OE // BC và ON // SB

Vậy mp(OEN) // mp(SBC)

Suy ra EF // mp(SBC)

2.21 Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AD và BC .



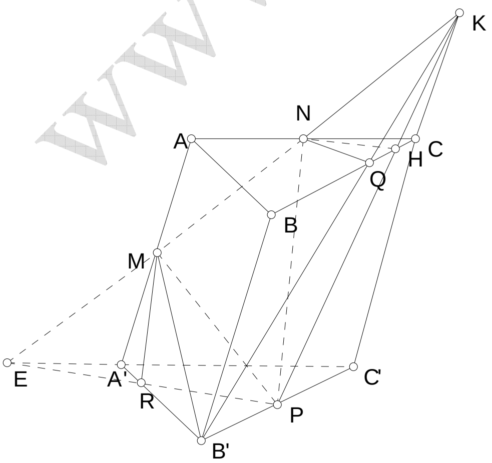
Ta có : $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{EA}{ED} = 1$

hay $\dfrac{IM}{EA} = \dfrac{IN}{ED}$

Do đó theo định lí Ta-lét đảo thì ba đường thẳng EI , AM , DN cùng song song với một mặt phẳng.

Nếu kẻ Ex // AB và Ey // DC thì EI nằm trong mặt phẳng (xEy) cố định

2.22

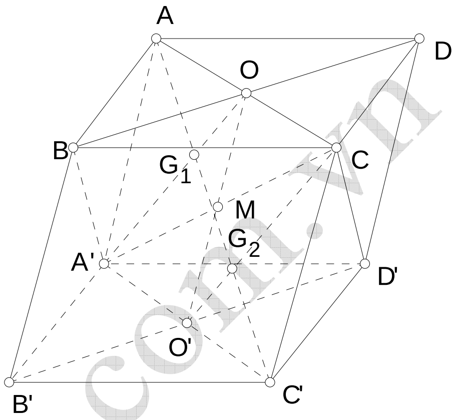


a) Đường thẳng MN cắt đường thẳng CC' tại K .Đường thẳng BK cắt BC tại Q . Vậy thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (MNB') là tứ giác MNQB'

b) Đường thẳng PK cắt BC tại H và đường thẳng MN AC tại E .Đường thẳng PE A'B' tại R .

Vậy thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP) là ngũ giác MNHPR .

2.23 a) Ta có BD // B'D' và BA' // CD'
Vậy mp(BDA') // mp(B'D'C)
b) Gọi O . O' và M là tâm các hình bình hànhABCD,A'B'C'D' và ACC'A'.
Trong hình bình hành ACC'A',đường chéo AC' cắt A'O tại G_1 và cắt CO' tại G_2 .Ta có AO // A'C' và A'C' = 2AO

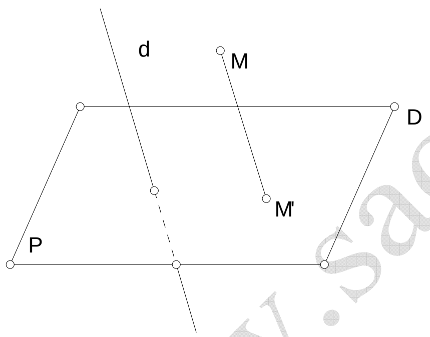


Do đó hai tam giác G_1A'C' đồng dạng với tam giác G_1OA ,ta có :
$\frac{G_1A'}{G_1O} = \frac{A'C'}{AO} = 2$ .Vậy G_1 là trọng tâm của tam giác BDA' vì A'O là trung tuyến của tam giác này.
Tương tự $\frac{G_2C}{G_2O'} = \frac{AC}{C'O'} = 2$ nên G_2 là trọng tâm tam giác B'D'C
Mặt khác ta có OG_1 // CG_2 và O là trung điểm của AC nên $AG_1 = G_1G_2$
Tương tự $O'G_2$ // $A'G_1$ nên $C'G_2 = G_1G_2$

§5. Phép chiếu song song

A. Tóm tắt giáo khoa

1. Định nghĩa phép chiếu song song Trong không gian cho một mặt phẳng (P) và đường thẳng d cắt mp(P). Với mỗi điểm M trong không gian ,vẽ đường thẳng qua M và song song với d hoặc trùng với d. Đường thẳng này cắt mp(P) tại M' .

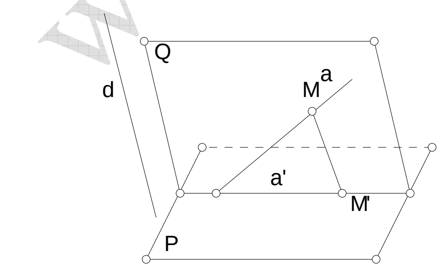


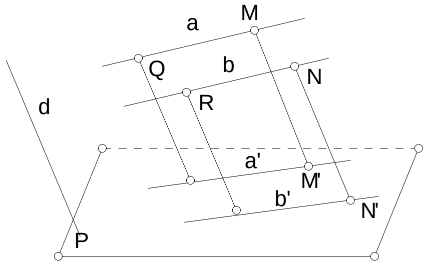
Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mp(P) như trên gọi là **phép chiếu song song lên mp(P) theo phương d**, mp(P) gọi là mặt phẳng chiếu, đường thẳng d gọi là phương chiếu M' gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của điểm M qua phép chiếu song song

- Nếu M vạch một hình (H) và hình chiếu M' của nó vạch hình (H') thì (H') gọi là hình chiếu song song của hình (H).
- Nếu M thuộc mặt phẳng chiếu (P) thì hình chiếu song song của M là M.

2. Tính chất

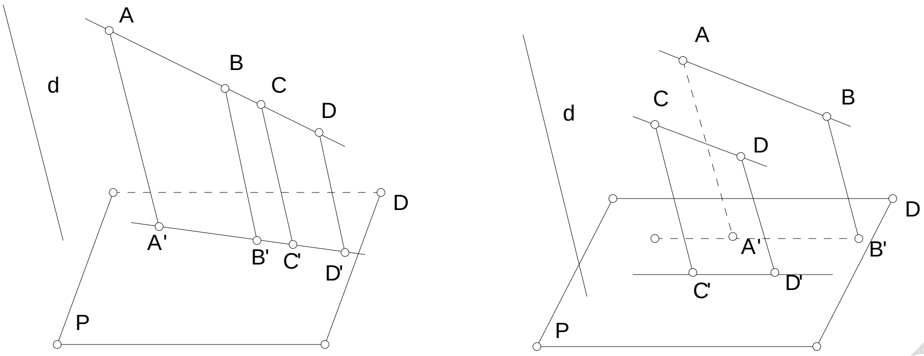
<u>Tính chất 1</u> : Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng
<u>Hệ quả</u> : Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng, của một tia là một tia





<u>Tính chất 2</u> : Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau

<u>Tính chất 3</u> : Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song



3. Hình biểu diễn của một hình không gian

<u>Định nghĩa</u> :

Hình biểu diễn của một hình (H) trong không gian là hình chiếu song song của hình (H) trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó

Người ta chứng minh rằng :Hình chiếu song song của một đường tròn là một đường elip hoặc là đường tròn (đặc biệt có thể là một đoạn thẳng).Vì vậy ta thường dùng đường elip làm hình biểu diễn của đường tròn ,tâm của elip biểu diễn cho tâm của đường tròn

B. Giải toán

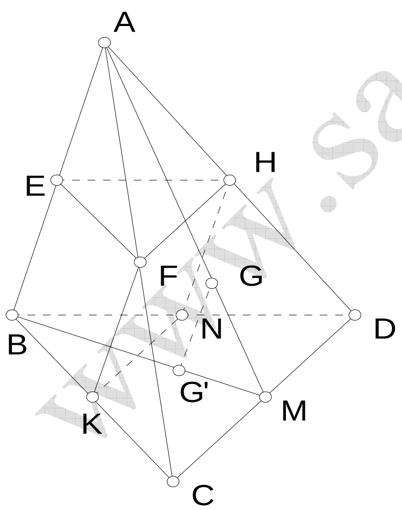
Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD.Gọi G là trọng tâm tam giác ACD.

a) Chứng minh rằng hình chiếu song song G'của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương AB là trọng tâm của tam giác BCD

b) Gọi E,F,H lần lượt là trung điểm của AB,AC,AD.Hình chiếu của tam giác EFH là hình gì?

Giải

a) Gọi M là trung điểm của CD thì G $\in$ AM và GA = 2GM .Hình chiếu song song của AM theo phương AB trên mp(BCD) là BM .Do đó hình chiếu song song của điểm G trên mp(BCD) theo phương AB là điểm G' $\in$ BM và G'B = 2G'M (tính chất 3)



Vậy G là trọng tâm tam giác BCD

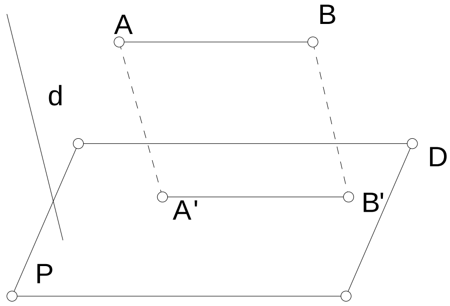
Hình chiếu của điểm E theo phương AB trên mp(BCD) là B .Hình chiếu của trung điểm F của AC theo phương AB trên mp(BCD) là trung điểm K của BC và hình chiếu của trung điểm H của AD là trung điểm N của BD.Vậy hình chiếu của tam giác EFH theo phương AB trên mp(BCD) là tam giác BKN

Ví dụ 2 : Cho đoạn AB song song với mp(P) .Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên mp(P) theo phương của đường thẳng d cho trước .Chứng minh rằng A'B' = AB.Phần đảo có đúng không?

Giải

Ta có AB // mp(P) và A'B' = (ABB'A') $\cap$ (P)

do đó A’B’ // AB
Ta có AA’ // BB’ // d
Vậy ABB’A’ là hình bình hành
Suy ra A’B’ = AB
Phần đảo sai vì nếu lấy điểm C trên đường thẳng BB’ với AC = AB thì hình chiếu của AC vẫn là A’B’ = AC nhưng AC không song song với mp(P)



C. Bài tập rèn luyện

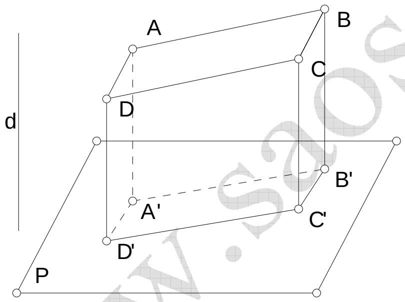
2.24 Chứng minh rằng hình chiếu song song của hình bình hành trên mp(P) theo một phương d cho trước thường là hình bình hành

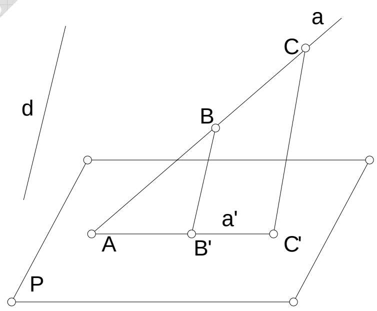
2.25 Cho đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại A .Gọi a’ là hình chiếu song song của a trên mp(P) theo phương d cho trước.
a) Chứng tỏ a’ qua A
b) Lấy hai điểm B và C trên a và gọi B’ , C’ lần lượt là hình chiếu song song của B và C trên mp(P) theo phương d .Chọn phương d sao cho B’C’ = BC

2.26 Cho tam giác ABC nằm ngoài mặt phẳng (P).Giả sử BC song song với (P) và AB và AC lần lượt cắt (P) tại D và E.Hãy chọn phương chiếu d sao cho hình chiếu của tam giác ABC trên (P) theo phương d là một tam giác đều

D.Hướng dẫn giải

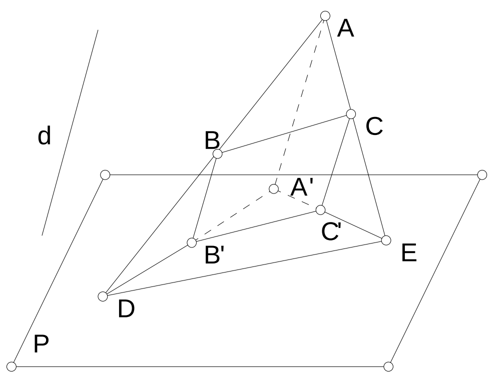
2.24 Theo tính chất 2 thì hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song nên hình chiếu song song của nó trên mặt phẳng chiếu (P) thường là hính bình hành .Nếu phương chiếu d song song với mặt phẳng của hình bình hành thì hình chiếu của hình bình hành là một đoạn





2.25 a) Ta có điểm $A \in a$ và điểm $A \in$ mp(P) ,do đó hình chiếu song song của A trên mp(P) theo phương d nào đó cũng là điểm A.Mà hình chiếu song song của đường trẳng a trên mp(P) là a’ ,Vậy $A \in a'$
b) Nếu B’C’ = BC thì tứ giác BCC’B’ là hình thang cân cạnh đáy BB’và CC’.Do đó AB’ = AB .Lấy điểm B’ trên mp(P) sao cho AB’ = AB và chọn phương d song song với BB’

2.26
Ta có BC // mp(P) nên BC //DE // B’C’
Do đó nếu tam giác A’B’C’ là tam giác đều thì tam giác A’DE cũng là tam giác đều.
Vậy trong mặt phẳng (P) ta dựng tam giác đều A’DE biết cạnh DE cho trước. Chọn phương d // AA’



Câu hỏi trắc nghiệm cuối chương 2

Câu 1 : Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?
a) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau
b) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau
c) Không có đường thẳng nào cắt cả hai đường thẳng chéo nhau
d) Hai đường thẳng chéo nhau nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng

Câu 2 : Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?
a) Cho đường thẳng a // mp(P) và đường thẳng b bất kỳ nằm trong mp(P) thì a song song với b
b) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song
c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó
d) Cả ba câu trên đều sai

Câu 3 : Cho tứ diện ABCD.Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng:
a) Có ba cặp đường thẳng chéo nhau là AB và CD, AD và BC ,AC và BD
b) Các đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối thì đồng qui
c) Các đoạn nối từ đỉnh đến trọng tâm mặt đối diện thì đồng qui
d) Cả ba câu trên đều đúng

Câu 4 : Cho tứ diện ABCD .Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại E .Lấy điểm O bất kỳ trong tam giác BCD.Các kết luận sau kết luận nào đúng?
(I) mp(OMN) $\cap$ mp(BCD) = OE
(II) Giao điểm của mp(OMN) với đường thẳng BD là giao điểm của BD với đường thẳng OE
(III) Giao điểm của mp(OMN) với đường thẳng CD là giao điểm của CD với đường thẳng ON
a) chỉ (I) b) chỉ (I) và (II) c) chỉ (II) d) cả ba (I) (II) (III)

Câu 5 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O.Gọi M là trung điểm của SC.Các kết luận sau kết luận nào đúng?
(I) Giao điểm I của đường thẳng AM với mp(SBD) thuộc SO
(II) IA = 2IM
(III) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và mp(SCD) là đường thẳng qua S và song song với AB
a) ba câu (I),(II),(III) đều đúng b) chỉ (I)
c) chỉ (I) và (III) d) chỉ (I) và (II)

Câu 6 : Cho tứ diện ABCD .Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD và G là trong tâm tam giác BCD.Giao điểm của đường thẳng EG và mp(ACD) là :
a) Điểm F b) Giao điểm của đường thẳng EG và đường thẳng AF
c) Giao điểm của đường thẳng EG và đường thẳng AC
d) Giao điểm của đường thẳng EG và đường thẳng CD

Câu 7 : Cho tứ diện ABCD .Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC.Điểm P tuỳ ý trên cạnh AD. Thiết diện của hình tứ diện ABCD với mp(MNP) là :
a) Thường là hình bình hành b) Một tam giác c) Một hình thang
d) Môt ngũ giác

Câu 8 : Cho tứ diện ABCD có các cạnh đều bằng a.Lấy điểm M trên AB với
AM = $\frac{a}{3}$.Diện tích của thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với mp(BCD) là :

a) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$ b) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{18}$ c) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{24}$ d) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{36}$

Câu 9 : Cho tứ diện ABCD có các cạnh đều bằng a.Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD thì đoạn G_1G_2 bằng bao nhiêu?

a) $\dfrac{a}{4}$ b) $\dfrac{a}{3}$ c) $\dfrac{2a}{3}$ d) đáp số khác

Câu 10 : Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau.Điểm M di động trên Ax và điểm N di động trên By sao cho BN = AM.Trên tia Bz // Ax lấy điểm M' sao cho BM' = AM Gọi I là trung điểm của MN.Câu nào sau đây đúng?

a) M'N song song với một đường thẳng cố định
b) MN song song với một mặt phẳng cố định
c) I chạy trên tia Ot với O là trung điểm của AB
d) Cả ba câu trên đều đúng

Câu 11 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AD//BC).Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là :

a) Đường thẳng qua S và trung điểm của AB
b) Đường thẳng qua S và song song với AD
c) Đường thẳng qua S và song song với AB
d) Đường thẳng qua S và giao điểm O của AC và BD

Câu 12 : Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'.Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CC'.Mặt phẳng (A'MN) cắt AB tại H thì $\dfrac{HA}{HB}$ bằng :

a) 2 b) 3 c) ½ d) tỉ số khác

Câu 13 : Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'.Gọi H là trung điểm của A'B'.Mặt phẳng (BCH) cắt A'C' tại K thì tỉ số $\dfrac{A'K}{A'C'}$ bằng :

a) 2 b) ½ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{3}{4}$

Câu 14 : Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' .Gọi H là trung điểm của A'B'.Mặt phẳng (BCH) cắt AC' tại E thì tỉ số $\dfrac{AE}{AC'}$ bằng :

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{3}{4}$

Câu 15 : Cho tứ diện ABCD có các cạnh đều bằng a.Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (ABG) thì diện tích của thiết diện bằng :

a) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ b) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$ d) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Câu 16 : Cho tứ diện ABCD và M là trung điểm của CD.Lấy điểm O trên BM với BO = 3 OM.Đường song song với AB kẻ từ O cắt mp(ACD) tại A' thì tỉ số
$\dfrac{OO'}{AB}$ bằng :

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

Câu 17 : Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thang ABCD (AD//BC) .Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và SC .Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là :

a) Đường thẳng AD b) Đường thẳng song song với MN

c) Đường thẳng AM d) Đường thẳng BN

Câu 18 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành .Một mặt phẳng (P) qua điểm M trên cạnh SA và song song với AC và SB lần lượt cắt AB, BC, SC , BD và SD tại N,Q,R,E và F.Các mệnh đề sau đây mệnh đề nào đúng?

a) MNPR là hình bình hành
b) MN,QR và EF cùng song song với SB
c) MQ, NR và EF đồng qui
d) Cả ba câu trên đều đúng

Câu 19 : Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’.Lấy điểm M trên AB với AB = 4AM, điểm N trên DD’ với ND = 3ND’ và điểm P trên B’C’ với B’C’ = 4 B’P.

Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

a) mp(MNP) song song với mp(AB’D’)
b) mp(MNP) song song với mp(AC’D’)
c) MN song song với AP
d) Cả ba câu trên đều sai

Câu 20 : Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

(I) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó

(II) Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác A’B’C’ thì trọng tâm của tam giác ABC có hình chiếu là trọng tâm tam giác A’B’C’

(III) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu của nó

a) Chỉ (I) b) chỉ (I) và (II)c) chỉ (III) d) cả ba (I) (II) (III)

Bảng trả lời

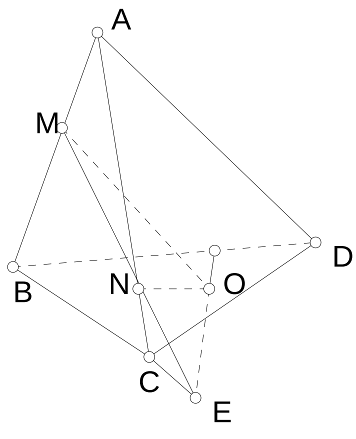
1d	**2c**	**3d**	**4b**	**5a**	**6b**	**7c**	**8d**	**9b**	**10d**
11b	**12a**	**13b**	**14a**	**15c**	**16b**	**17b**	**18d**	**19a**	**20b**

Hướng dẫn giải

1d

2c

3d

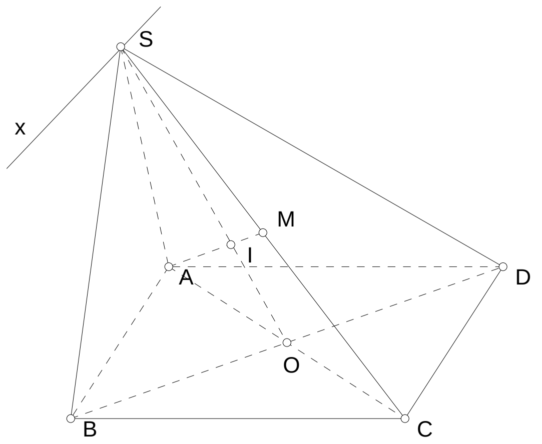


4b (I) đúng vì hai mặt phẳng (OMN) và (BCD) có hai điểm chung O và E Vậy mp(OMN) $\cap$ mp(BCD) = OE

(II) đúng vì OE và BD nằm trong mặt phẳng (BCD) nên cắt nhau tại F thì F là giao điểm của BD với mp(OMN)

(III) sai vì CD và ON không cắt nhau

5a



- đúng vì AM và SO là hai trung tuyến của tam giác SAC giao nhau tại trọng tâm I ,mà SO nằm trong mp(SBD) nên AM cắt mp(SBD)tại I trên SO
- (II) đúng vì I là trọng tâm tam giácSAC
- (III) đúng vì hai mặt phẳng (SAB)

(SCD) có S chung và AB//CD

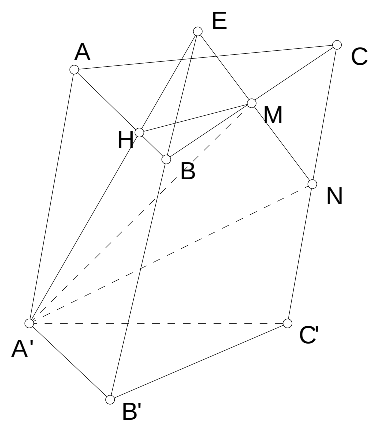
6 b F là trung điểm của CD nên BF là trung tuyến của tam giác BCD.Do đó G thuộc BF.Vậy trong tam giác ABF, EG và AF cắt nhau tại H thì H là giao điểm của EG và mp(ACD)

7c MN // BC ,do đó mp(MNP) cắt mp(BCD) theo giao tuyến PQ // BC// MN
Vậy thiết diện MNPQ là hình thang

8d Thiết diện là tam giác đều cạnh bằng $\frac{a}{3}$ .Vậy diện tích của thiết diện là S = $\frac{a^2\sqrt{3}}{36}$

9b Gọi M là trung điểm của CD thì $G_1 \in$ BM và $G_2 \in$ AM.
Ta có : $\frac{MG_1}{MB} = \frac{MG_2}{MA} = \frac{1}{3}$ Do đó G_1G_2 // AB
Vậy $\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}$ Suy ra G_1G_2 = $\frac{a}{3}$

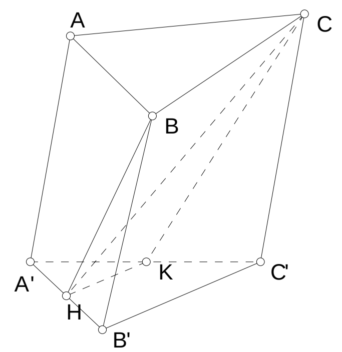
10d Ta có BN = BM' = AM .Do đó tam giác BNM' cân nên cạnh NM' // với phân giác ngoài Bu của góc yBz.
Ta có MM' // AB và NM' // Bu nên mp(MNM') // mp(ABu)
Vậy MN // mp(ABu) cố định
Gọi O là trung điểm của AB và J là trung điểm của NM' thì OI // BJ
Vậy I thuộc tia Ot // pnân giác trong Bv của góc yBz



11b Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có điểm S chung và lần lượt chứa AD và BC song song . Vậy giao tuyến của chúng là đường thẳng qua S và song song với AD

12a Đường thẳng MN cắt đường thẳng BB' tại E
Đường thẳng A'E cắt AB tại H thì H là giao điểm của mp(A'MN) với AB. M là trung điểm của BC nên BE = CN = $\frac{1}{2}$CC'mà BB' = CC' và AB = A'B'

Vậy $\frac{HB}{A'B'} = \frac{EB}{EB'} = \frac{1}{3}$
Suy ra HA = 2 HB



13c
Ta có BC // B'C' . Do đó mp(BCH) cắt mp(A'B'C') theo giao tuyến HK // B'C'.

H là trung điểm của A'B'.Vậy K là trung điểm A'C'.

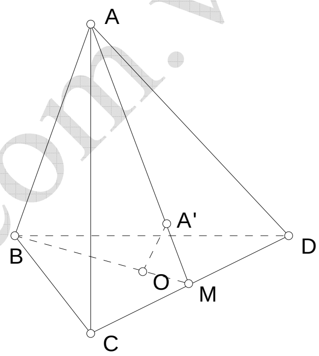
Suy ra $\dfrac{A'K}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$

14a AC' cắt CK tại E thì E là giao điểm của mp(BCH) với AC'

Vậy $\dfrac{AE}{AC'} = \dfrac{2}{3}$

15c Mặt phẳng (ABG) cắt CD tại trung điểm M.Vậy thiết diện là tam giác ABM cân tại M với AB = a và MA= MB = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,đường cao MH của tam giác bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy S = $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$



16b Trong tam giác ABM, đường song song với AB kẻ từ O cắt AM tại A'

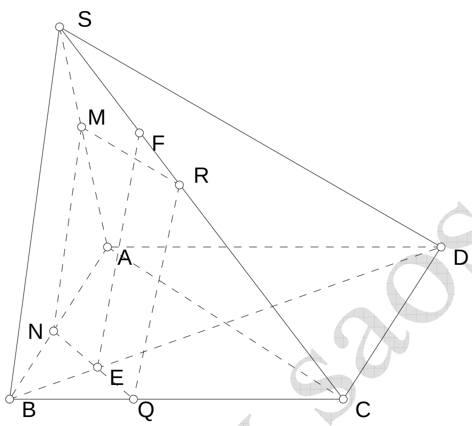
Ta có : $\dfrac{OA'}{AB} = \dfrac{MO}{MB} = \dfrac{1}{4}$

17b Ta có MN // BC (đường trung bình của tam giác SBC

Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có S chung và lần lượt chứa AD // BC //MN

Vậy giao tuyến của chúng là đường thẳng qua S và song song với MN

18d



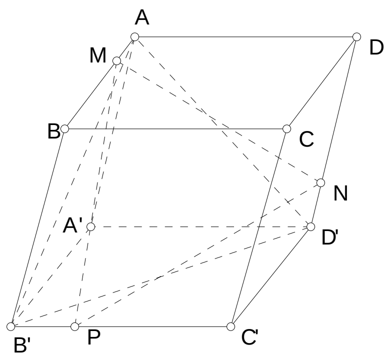
- mp(P) qua M và // với SB và AC nên mp(P) $\cap$ (SAB) = MN //SB.
- mp(P) $\cap$ mp(ABC) = NQ // AC
- mp(P) $\cap$ mp(MAC) = MR // AC
- mp(P) $\cap$ mp(SBC) = QR // SB
- mp(P) $\cap$ mp(SBD) = EF // SB

Vậy tứ giác MNQR là hình bình hành

Ta có MN // QR // EF // SB

Vì NQ // AC nên E là trung điểm của NQ và EF // MN .Vậy EF qua giao điểm của hai đường chéo MQ và NR

19a. Ta có : $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{ND'}{ND} = \dfrac{1}{3}$



Do đó theo định lí Ta-lét đảo thì MN, AD'và BD cùng song song với một mặt phẳng hay MN // mp(AB'D')

Ta cũng có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{PB'}{PC} = \dfrac{1}{3}$ nên MP , AB' và BC cùng song song với một mặt phẳng hay MP // mp(AB'D')

Vậy mp(MNP) // mp(AB'D')

20b (I) và (II) đúng