Trần Thành Minh – Phan Lưu Biên - Trần Quang Nghĩa

HÌNH HỌC 11
Chương 3.

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

www.saosangsong.com.vn

Chương III : QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1 . Vectơ trong không gian

A . Tóm tắt giáo khoa .

Vectơ , các phép tóan vectơ trong không gian được định nghĩa hòan tòan giống như trong hình học phẳng và chúng cũng có các tính chất tương tự . Ta chỉ xét một số tinh chất của vectơ trong không gian .

1 . Sự đồng phẳng của các vectơ .

Định nghĩa : Ba vectơ gọi là đồng phẳng khi ba đường thẳng chứa ba vectơ này cùng song song với một mặt phẳng .

2 . Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng :

Định lý 1 : Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m , n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$. Các số m , n là duy nhất .

Hệ quả 1 : Nếu ta có : $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ và một trong ba số m , n , p khác 0 thì ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng .

Hệ quả 2 : Nếu $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ thì ta suy ra được m = n = p = 0 .

Định lý 2 : Nếu $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng và $\vec{d}$ là một vectơ bất kỳ thì ta luôn luôn có : $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ và các số m , n , p là duy nhất .

B . Giải tóan .

<u>Dạng tóan 1</u> : Sử dụng các phép tóan về vectơ và các tính chất .

Cần nhớ :

- Quy tắc ba điểm : Với mọi ba diểm A , B , C ta có : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$
- I là trung điểm của đọan MN $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OI}, \forall O$.
- Ba điểm A , B , C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
- Các công thức về tích vô hướng :

$$AB^2=\overrightarrow{AB}^2 \ ;\ \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) \ ;\ \vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$$
$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c} \ \ldots$$

Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD . I , J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng :

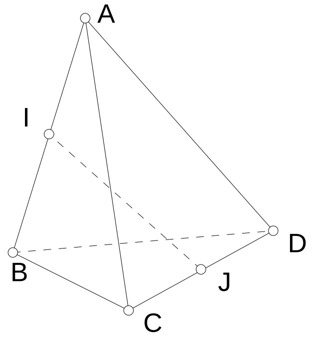
$$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$$

Giải :

Ta có : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}$ (quy tắc ba điểm) mà :

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}); \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (quy tắc trung điểm) nên

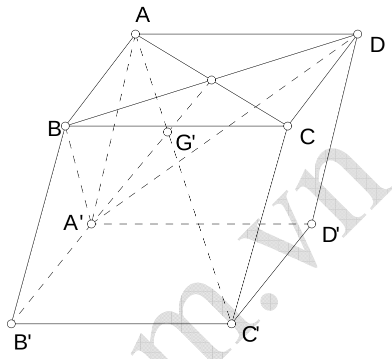
$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$.



Ví dụ 2 : Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ . Đường chéo AC’ cắt mặt phẳng (A’BD) tại G_1 . Chứng minh rằng G_1 là trọng tâm của tagiác A’BD .

Giải :

Gọi G là trọng tâm tam giác A’BD , ta chỉ cần chứng minh A , G , C’ thẳng hàng thì G_1 sẽ trùng với G (vì cùng là giao điểm của đường thẳng AC’ với mặt phẳng (A’BD)) và bài tóan được chứng minh .



Ta có : $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ mà

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ nên

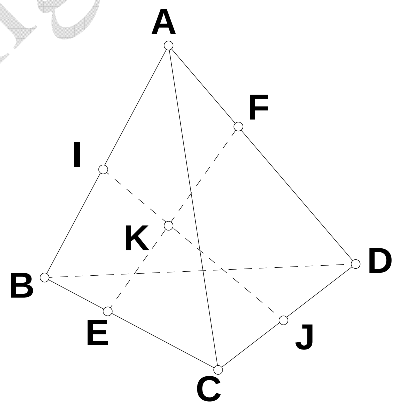
$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC'}$. Vậy :

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$ hay ba điểm A , G , C’ thẳng hàng .

Ví dụ 3 : Cho tứ diện ABCD . E , F là những điểm xác định bởi : $\overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$. Chứng minh rằng trung điểm của các đọan AB , CD , EF thẳng hàng .

Giải :

Gọi I , J , K lần lượt là trung điểm của AB , CD , EF .Ta có



$$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IC}\right)$$

$$\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AF}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{AD}\right)\ (do\ \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0})$$

$$=\frac{k}{2}\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IA}\right)$$

$$=\frac{k}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)(do\ \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0})$$

$$=k\overrightarrow{IJ}$$

Vậy I , J , K thẳng hàng .

Ví dụ 4 : Cho tứ diện ABCD có : AB = 2a ; CD = 2b ; I , J lần lượt là trung điểm của AB , CD và IJ = 2c . M là một điểm bất kỳ . Chứng minh rằng :

a) $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2a^2$.

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + 2(a^2+ b^2+2 c^2)$ G là trọng tâm của tứ diện). Suy ra vị trí của điểm M để ($MA^2+ MB^2+ MC^2+ MD^2$) đạt giá trị nhỏ nhất .

Giải :

a) Ta có :

$$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2=MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$$

$$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=MI^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$$

$$MA^2+MB^2=2MI^2+2a^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\,(do\ IA=IB=a)$$

$$=2MI^2+2a^2\ (do\ \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0})$$

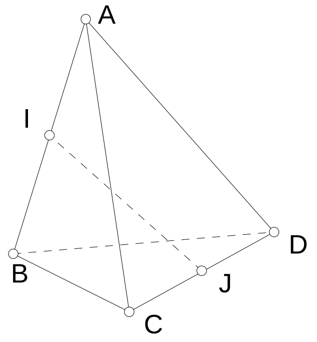
b) Tương tự : $MC^2+ MD^2 = 2MJ^2 + 2b^2$.

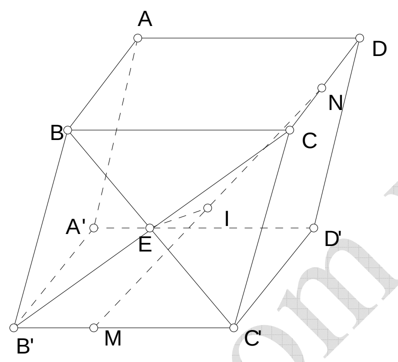
Suy ra : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(MI^2 + MJ^2) + 2(a^2 + b^2)$. Mà $MI^2 + MJ^2 = 2MG^2 + 2c^2$
(chứng minh tương tự như câu a) .

Vậy : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(2MG^2 + 2c^2) + 2(a^2 + b^2) = 4MG^2 + 2(a^2 + b^2 + 2c^2)$.

Do đó : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq 2(a^2 + b^2 + 2c^2)$. Dấu “=” xảy ra khi MG = 0 hay M trùng với G .

Tóm lại ($MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$) đạt giá trị nhỏ nhất khi điểm M trùng với trọng tâm của tứ diện .





Ví dụ 5 : Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’, có B’C’ = CD . M , N là hai điểm lưu động lần lượt trên hai cạnh B’C’ và CD sao cho B’M = CN . E là tâm của mặt BCC’B’ và I là trung điểm của MN .
Biểu thị vectơ $\overrightarrow{EI}$ theo hai vec tơ $\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{CD}$. Suy ra rằng điểm I lưu động trên một đường thẳng cố định .

Giải :

Ta có : $\overrightarrow{B'M} = k\overrightarrow{B'C'}$; $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$ (vectơ cùng phương và do B’M = CN ; B’C’ = CD)

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB'} + \overrightarrow{B'M} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B'M} + \overrightarrow{CN})\,(do\ \overrightarrow{EB'} + \overrightarrow{EC} = \vec{0})$$

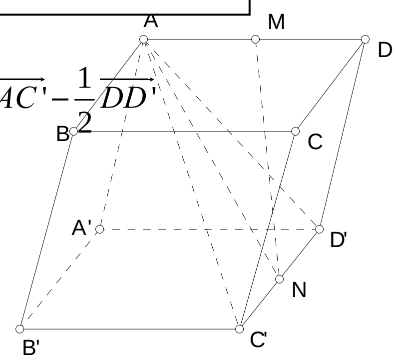
$$= \frac{1}{2}(k\overrightarrow{B'C'} + k\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD})$$

Mà : $\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}k\overrightarrow{BD}$, nên điểm I lưu động trên đường thẳng qua E và song song với BD .

Dạng tóan 2 : **Chứng minh ba vectơ đồng phẳng** .

Sử dụng định lí 1.

Ví dụ 1 : Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ . M , N lần lượt là trung điểm của AD và C’D’ .
Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng .



Giải : Ta có :

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'}$$

Theo định lý 1 , ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng

Ví dụ 2 : Cho 4 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ thỏa :

$$\begin{cases} \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} + 2\vec{d} = \vec{0} \ (1) \\ 2\vec{a} - 5\vec{b} - 7\vec{c} + 7\vec{d} = \vec{0} \ (2) \end{cases}$$

. Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ đồng phẳng .

Giải :

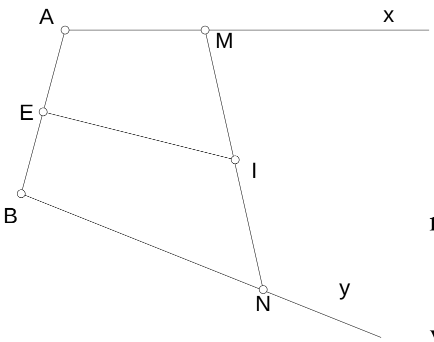
$(1)\, cho: 2\vec{a} = -4\vec{b} - 6\vec{c} - 4\vec{d}$; (2) $cho: 2\vec{a} = 5\vec{b} + 7\vec{c} - 7\vec{d}$

$$Suy\, ra: -4\vec{b} - 6\vec{c} - 4\vec{d} = 5\vec{b} + 7\vec{c} - 7\vec{d} \Leftrightarrow \vec{b} = -\frac{13}{9}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$$

Vậy ba vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ đồng phẳng .

Ví dụ 3 : Cho hai nửa đường thẳng Ax , By chéo nhau . M , N là hai điểm lưu động lần lượt trên Ax và By ; E , I lần lượt là trung điểm của AB và MN . Chứng minh rằng điểm I nằm trong một mặt phẳng cố định .

Giải :



Gọi $\vec{a},\vec{b}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của Ax , By , Ta có :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BN})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN})\,(do\, \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0})$$

mà : $\overrightarrow{AM} = k\vec{a}$; $\overrightarrow{BN} = k'\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{EI} = \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k'}{2}\vec{b}$. Vậy ba vectơ $\overrightarrow{EI},\vec{a},\vec{b}$ đồng phẳng hay ba đường thẳng E I , Ax , By cùng song song với một mặt phẳng hay đương thẳng EI nằm trong mặt phẳng (P) qua E và song song với hai dường thẳng Ax , By . Vậy điểm I nằm trong mặt phẳng (P) cố định .

Ví dụ 4 : Cho tứ diện ABCD và các điểm M , N định bởi :

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ (1); $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$ (2) .

a) Các điểm M , N thuộc các mặt phẳng nào của tứ diện ?

b) Định x để các đường thẳng AD , BC , MN cùng song song với một mặt phẳng .

Giải :

a) (1) cho : 3 vectơ $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ đồng phẳng . Vậy M thuộc mặt phẳng (ABC) .

(2) cho : 3vectơ $\overrightarrow{DN},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$ đồng phẳng . Vậy N thuộc mặt phẳng (BDC) .

b) Ta cần định x để 3 vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng . (1) cho :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$$

$$(2)\, cho: \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AN} = (1+x)\overrightarrow{AB} - (1+x)\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{BC}$$

$$Suy\ \ ra\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (2+x)\overrightarrow{AB} - (1+x)\overrightarrow{AD} + (x+3)\overrightarrow{BC}$$

Vây 3 vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng khi 2 + x = 0 hay x = - 2 .

C . Bài tập rèn luyện .

3.1 .Cho hai tứ diện ABCD , A'B'C'D' có trọng tâm lần lượt là G , G' . Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = 4\overrightarrow{GG'}$. Suy ra điều kiện để hai tứ diện trên có cùng trọng tâm .

3.2 . Cho tứ diện ABCD . Tìm quỹ tích những điểm M thỏa điều kiện :
$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$

3.3 . Cho tứ diện ABCD . Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . và O là trung điểm của AG .
a) Chứng minh hệ thức : $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$
b) M là một điểm bất kỳ, chứng minh rằng :
$3MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=6MO^2+3OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$. Suy ra vị trí của điểm M để biểu thức ($3MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$) đạt giá trị nhỏ nhất .

3.4 . Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành , tâm là O . I là trung điểm của SO và điểm E thỏa $\overrightarrow{SE}=x\overrightarrow{SC}$. Định x để ba điểm A , E , I thẳng hàng .

3.5 . Cho tứ diện ABCD . M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD . P , Q là các điểm định bởi : $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AD}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng .
3.6 . Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. M , N lần lượt là trung điểm của CD và DD' ; G , G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện A'D'MN và BCC'D' . Chứng minh rằng GG' song song với mặt phẳng (ABB'A')

Hướng dẫn – Đáp số .
3.1 . $VT=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+..=4\overrightarrow{GG'}+(\overrightarrow{G'A'}+..)-(\overrightarrow{GA}+..)=4\overrightarrow{GG'}$

3.2 . Gọi G là trọng tâm của tứ diện và E là điểm thỏa : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, G , E cố định . Ta có :
$\left|4\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|\Leftrightarrow GM=\frac{1}{4}AE$. Vậy quỹ tích của M là mặt cầu tâm G bán kính bằng một phần tư đoạn AE .

3.3 . a) VT = $3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG})=\vec{0}$

b)
$$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2=MO^2+OA^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}.$$
$$VT=6MO^2+3OA^2+OB^2+OC^2+OD^2+2\overrightarrow{MO}(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=VP$$

3.4. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{SE}=x\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AS}=x(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS})\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}=(1-x)\overrightarrow{AS}+x\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{k}{2}=1-x\\ \frac{k}{4}=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{4}{3}\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}$$

3.5. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$

$$\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{MB}=k(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}=(1-k)\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}$$

. $\overrightarrow{MQ}=(1-k)\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MD}$

$$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=(1-k)(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+k(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=k(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})\,(do\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0})$$

$$Suy\,ra:\overrightarrow{MN}=\frac{2}{k}\overrightarrow{MP}+\frac{2}{k}\overrightarrow{MQ}$$

$$3.6.\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD'})$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'}) + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) - \overrightarrow{AC}\right]$$

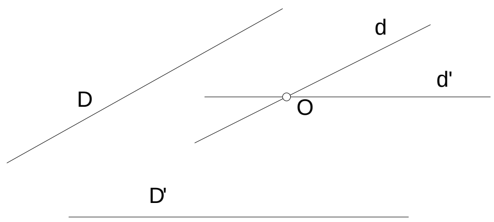
$$= \frac{1}{4}\left(-2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AC})\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{BA'}$$

Vậy ba dường thẳng GG' , AB , BA' cùng song song với một mặt phẳng . Mà G không thuộc mặt phẳng (ABB'A') nên GG' song song với mặt phẳng này .

§2 . Hai đường thẳng vuông góc với nhau .

A . Tóm tắt giáo khoa .

1 . **Góc của hai đường thẳng** : Góc của hai đường thẳng D , D' là góc giữa hai đường thẳng d , d' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với D và D' .

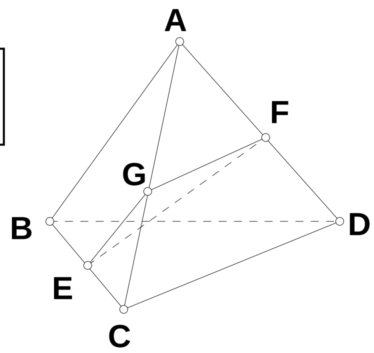


Như thế , để có góc của D , D' ta có thể lấy O thuộc D và qua O vẽ d' song song với D'.

Góc (D , D') = góc (D , d')

2 . **Hai đường thẳng vuông góc với nhau** : Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau khi góc của chúng bằng 90^o .

B . Giải tóan .



Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD có AB = CD ; E , F lần lượt là trung điểm BC và AD . Chứng minh rằng : góc (AB , EF) = góc (CD , EF) .

Giải :

Vẽ EG song song với AB , ta có : G là trung điểm của AC (vì EG là đường trung bình của tam giác ABC) và góc (AB , EF) = góc (EG , EF) .

Ta cũng có : góc (CD , EF) = góc (FG , EF) (vì FG song song với CD) .

Ta lại có : EG = FG (cùng bằng $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$) . Suy ra : tam giác GEF cân , do đó : góc (EG , EF) = góc (FG , EF) . Vậy góc (AB , EF) = góc (CD , EF) .

Ví dụ 2 : Cho tứ diện ABCD có : AB = 5cm ; AC = 7cm ; BD = $\sqrt{57}cm$; CD = 9cm .Chứng minh rằng hai đường thẳng BC và AD vuông góc .

Giải :

Ta có : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$. Mà :

$$CD^2 = \overrightarrow{CD}^2 = \left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}\right)^2 = BD^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(BC^2 + BD^2 - CD^2\right)$$

Tương tự : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\left(BC^2+BA^2-CA^2\right)$. Suy ra :

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(BD^2+BC^2-CD^2\right)-\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-CA^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(BD^2+AC^2-CD^2-AB^2\right)=\frac{1}{2}\left(57+49-81-25\right)=0$$

Vậy hai đường thẳng BC và AD vuông góc .

Ví dụ 3 : Cho tứ diện đều ABCD (tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau) , G là tâm của tam giác BCD . a) Chứng minh rằng AG vuông góc với CD . b) M là trung điểm của CD , tính góc của AC và BM ,

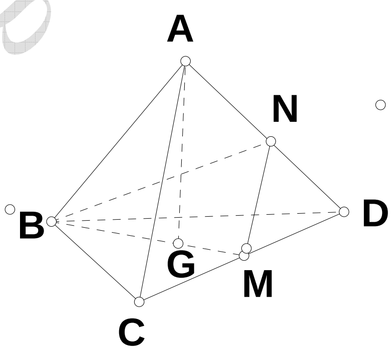
Giải :

a) G cũng là trọng tâm của tam giác BCD nên : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AG}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC})=0$$

$$(do\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a.a.\cos 60^o=\frac{a^2}{2};\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AC}^2=a^2)$$

(a là cạnh của tứ diện đều) . Vậy AG vuông góc với CD .



b) Vẽ MN song song với AC , ta có : N là trung điểm của AD (vì MN là đường trung bình của tam giác ACD) và góc (AC , BM) = góc (MN , BM) . Trong tam giác BMN , ta có :

$MN=\frac{a}{2};BM=BN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều) . Định lý cosin cho :

$$\cos\widehat{BMN}=\frac{BM^2+MN^2-BN^2}{2BM.MN}=\frac{MN}{2BM}=\frac{a}{2.a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\Rightarrow$$

$$\widehat{BMN}=73^o13'$$

Vậy góc của hai đường thẳng AC và BM bằng 73°13’ .

C . Bài tập rèn luyện .

3.7 . Cho tứ diện ABCD có : $AB\perp CD; AC\perp BD$. Chứng minh rằng : $AD\perp BC$.

3.8 . Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có tất cả các cạnh đều bằng a và : $\widehat{B'BA}=\widehat{B'BC}=60^o$. Chứng minh rằng : AB vuông góc với B’C .

3.9 Cho tứ diện ABCD có : AB = AC = AD = a ; $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^o$; $\widehat{CAD}=90^o$ .Tính góc của hai đường thẳng AB và DM (M là trung điểm của BC) .

D . Hướng dẫn – Đáp số .

3.7 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$$

mà : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0;\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=0.Suy\ ra:\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$. Vậy AD vuông góc với BC .

3.8 . Tam giác ABB' là tam giác đều (tam giác cân có một góc bằng 60^o) . Tương tự , tam giác BB'C cũng là tam giác đều . Ta có : $\overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CA} = a.a\cos 60^o - a.a\cos 60^o = 0$.
Vậy AB vuông góc với B'C .

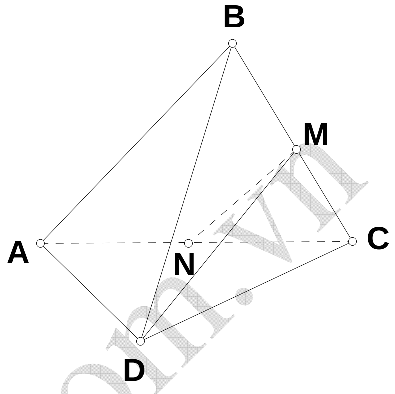
3.9 . Các tam giác ABC , ABD là tam giác đều .Các tam giác ADC , BDC lần lượt vuông tại A và B . Vẽ MN song song với AB , ta có : N là trung điểm của AC .
góc (AB , DM) = góc (MN , DM) và

$MN = \dfrac{a}{2}; DM = DN = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Định lý cosin cho :

$DN^2 = DM^2 + MN^2 - 2DM.\ MN \cos DMN$ hay

$\cos\widehat{DMN} = \dfrac{MN}{2DM} = \dfrac{a}{2a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$

$\widehat{DMN} = 77^o4'$

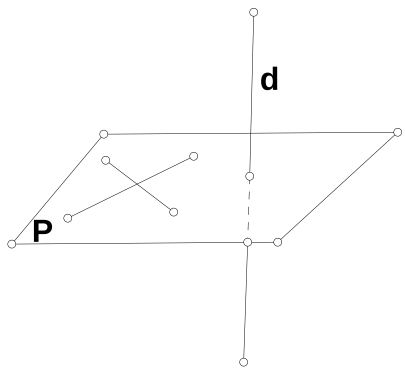


§3. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

A . Tóm tắt giáo khoa .

1 . **Định nghĩa** : Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng khi nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó

2 . **Định lý 1** : Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong một mặt phẳng thì nó sẽ vuông góc với mặt phẳng đó .
Hệ quả 1 : Qua một điểm cho trước , có và chỉ có một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho sẵn .
Hệ quả 2 : Qua một điểm cho trước , có và chỉ có một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho sẵn .

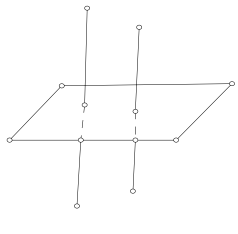


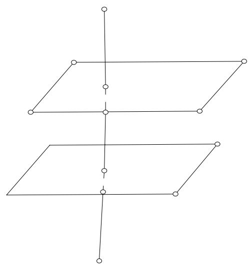
3 . Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng .

Định lý 2 : Có hai đường thẳng song song , Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng thì cũng vuông góc với đường thẳng kia .

Định lý 3 : Có hai mặt phẳng song song . Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia

Định lý 4 : Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau .

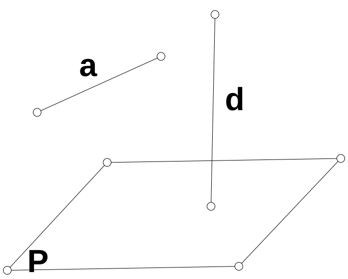


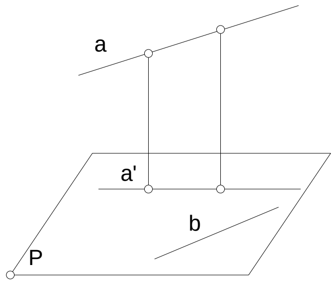


Định lý 5 : Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau .

Định lý 6 : Có một đường thẳng a và một mặt phẳng (P) song song với nhau . Đường thẳng d nào vuông góc với mặt phẳng (P) thì cũng vuông góc với đường thẳng a .

Định lý 7 : Có một đường thẳng a và một mặt phẳng (P) không chứa a . Nếu a và (P) cùng vuông góc với một đường thẳng thì a và (P) song song với nhau .



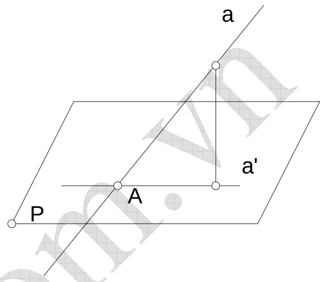


4 . Định lý ba đường vuông góc .

a) Phép chiếu vuông góc : Phép chiếu lên mặt phẳng (P) theo phương d vuông góc với (P) gọi là phép chiếu vuông góc .

b) **Định lý ba đương vuông góc** : Cho đường thẳng a có hình chiếu lên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'và b là một đường thẳng nằm trong (P) .

b vuông với a khi và chỉ khi b vuông góc với a' .

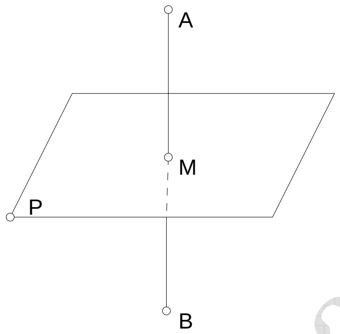


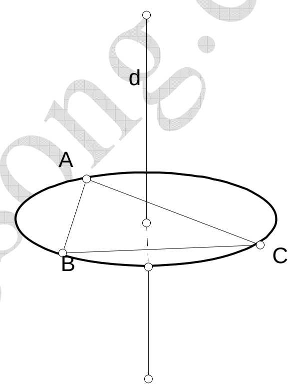
5 . Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng : Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng d và đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên (P) .

Nếu d vuông góc với (P) thì góc giữa d và (P) bằng 90^{o}.

6 . Mặt phẳng trung trực :

- Mặt phẳng trung trực của một đọan thẳng là mặt phẳng qua trung điểm của đọan thẳng này và vuông góc với đọan thẳng đó .
- Mặt phẳng trung trực của đọan thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A , B





7 . Trục của một đường tròn :

- Trục của đường tròn là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn đó
- Trục của đường tròn (ABC) là tập hợp các điểm cách đều ba điểm A , B , C .

B . Giải tóan .

Dạng tóan 1 : **Chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng** .

- ❖ Ta chỉ cần chứng minh đường thẳng này vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau và nằm trong mặt phẳng ấy .

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD , đáy là hình thoi có tâm là O và SA = SC ; SB = SD .
Chứng minh rằng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) .

Giải :

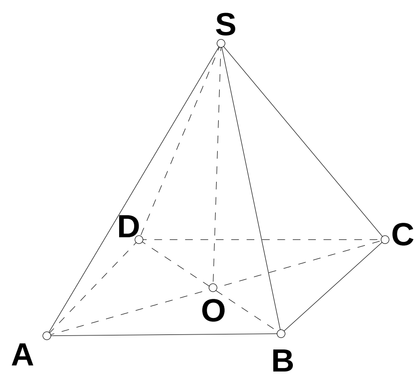
\Ta có : $SO \perp AC(1)$ (tam giác SAC cân , trung tuyến SO cũng là đường cao)

$SO \perp BD(2)$ (Tam giác SBD cân , trung tuyến SO cũng là đường cao)

(1) và (2) cho : $SO \perp (ABCD)$.

Ta cũng có : $BD \perp AC(3)$ (đường chéo của hình thoi)

(1) và (3) cho : $AC \perp (SBD)$



Ví dụ 2 : Cho tứ diện ABCD có : $AB \perp CD$; $AC \perp BD$. Chứng minh rằng chân đường vuông góc vẽ từ A xuống mặt phẳng (BCD) là trực tâm của tam giác BCD .

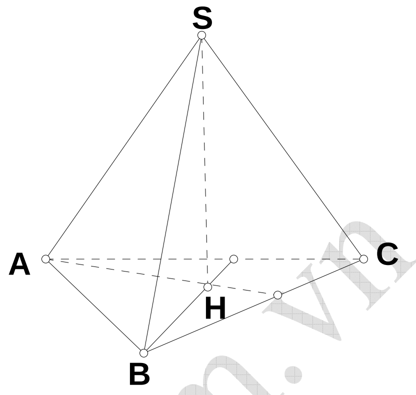
Giải :

Vẽ AH $\perp (BCD)$; $H \in mp(BCD)$, ta có :

AH $\perp CD\,(1); AB \perp CD\,(2)\ (gt)$

(1) và (2) cho : $CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$.

Tương tự : $BD \perp CH$. Vậy H là trực tâm của tam giác BCD .



Ví dụ 3 : Cho tứ diện ABCD có : ABC và DBC là các tam giác đều cạnh bằng a , AD = $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

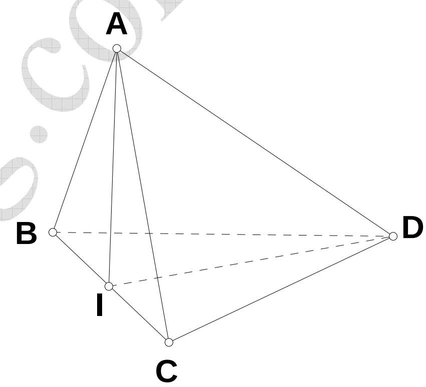
Chứng minh rằng AI vuông góc với mặt phẳng (BCD) , I là trung điểm của BC .

Giải :

Ta có : $AI \perp BC\,(1)$; $AI = DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều) .

Trong tam giác ADI ta có : $AI^2 + DI^2 = AD^2 = \dfrac{6a^2}{4}$. Vậy tam giác ADI vuông tại I hay $AI \perp DI\,(2)$.

(1) và (2) cho : AI vuông góc với mặt phẳng (BCD) .



Dạng tóan 2 : **Chứng minh một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng**

❖ Ta chỉ cần chứng minh đường thẳng này vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia .

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD , đáy là hình vuông . SA vuông góc với ABCD .
a) Chứng minh rằng BD vuông góc với SC .
b) AH là đường cao của tam giác SAB , chứng minh rằng AH vuông góc với BC .

Giải :

a) Ta có :

$SA \perp BD\,(do\, SA \perp (ABCD)$

$AC \perp BD$

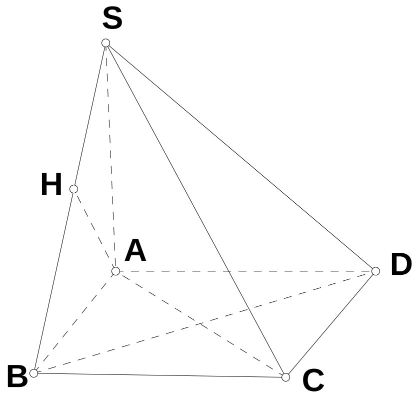
$Suy\, ra\, BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

b) Ta có :

$BC \perp SA$

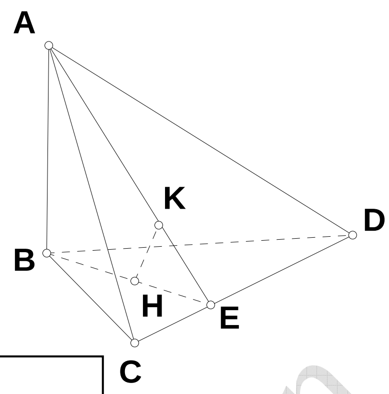
$BC \perp AB$

$Suy\, ra: BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \subset (SAB)$



Ví dụ 2 : Cho tứ diện ABCD có : AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Gọi H và K lần lượt là trực tâm của tam giác BCD và ACD . Chứng minh rằng HK vuông góc với CD .

Giải : Ta có :



$AB \perp CD\,(do\ AB \perp (BCD)$

$BH \perp CD$

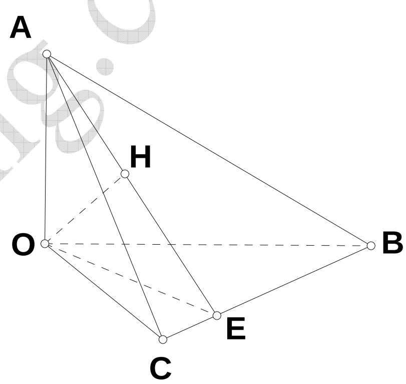
$Suy\,ra: CD \perp (ABH)$

Gọi E là giao điểm của CD và mặt phẳng (ABH) , ta có : CD vuông góc với AE hay AE là đường cao của tam giác ACD . Vậy K thuộc AE , do đó HK nằm trong mặt phẳng (ABE) . Mà CD vuông góc với (ABE) nên CD vuông góc với HK .

Ví dụ 3 : Cho tứ diện OABC có : các cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc .
a) Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn .
b) Vẽ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) , (H thuộc mặt phẳng (ABC)) .

Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Giải :



a)Ta có : $BC^2 = OB^2 + OC^2$.
$CA^2 = OC^2 + OA^2$.
$AB^2 = OA^2 + OB^2$.

Định lý cosin trong tam giác ABC cho :

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AB.AC}$$
$$= \frac{OA^2 + OC^2 + OA^2 + OB^2 - OB^2 - OC^2}{2AB.AC}$$
$$= \frac{OA^2}{AB.AC} > 0$$

Vậy góc BAC nhọn . Tương tự : góc ABC , góc ACB nhọn . Do đó , ba góc của tam giác ABC nhọn .

b)Ta có : $OA \perp (OBC)\,(do\,OA \perp OB; OA \perp OC) \Rightarrow OA \perp BC$ (1) . Mà $OH \perp BC\,(2)\,(do\,OH \perp (ABC))$. (1) và (2) cho : BC $\perp$ (AOH) . Gọi E là giao điểm của BC và mặt phẳng (AOH) , ta có : OE , AE lần lượt là đường cao của tam giác OBC và tam giác ABC .

Tam giác vuông OBC cho : $\dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Tam giác AOE vuông tại O và có đường cao là AH cho : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OE^2}$.

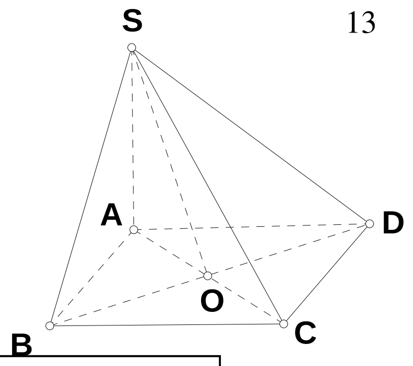
Vậy : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Dạng toán 3 : **Sử dụng định lý ba đường vuông góc .**

❖ Ta có thể sử dụng định lý này để chứng minh hai đường thẳng vuông góc .

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) . Chứng minh : tam giác SBC và tam giác SOD là những tam giác vuông . (O là tâm cuả hình vuông)

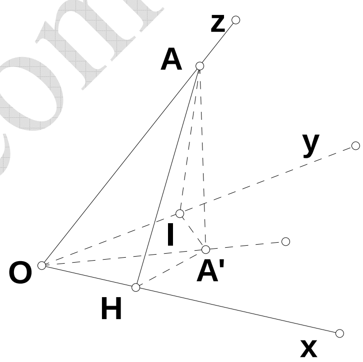
Giải :



Ta có: AB là hình chiếu của SB xuống mặt phẳng (ABCD) , mà BC vuông góc với AB nên BC vuông góc với SB . Vậy tam giác SBC vuông tại B .
Tương tự : AO là hình chiếu của SO xuống mặt phẳng (ABCD) , mà BD vuông góc với AO nên BD vuông góc với SO . Vậy tam giác SOD vuông tại O .

> **Ví dụ 2 :** Cho ba tia Ox , Oy , Oz không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một tạo với nhau một góc bằng 60^o . A thuộc Oz và OA = a .
> a) Chứng minh rằng hình chiếu của Oz xuống mặt phẳng (Oxy) là phân giác của góc xOy
> b) A' là hình chiếu của A xuống mặt phẳng (Oxy) , tính đọan AA'.

Giải :



a) Vẽ

$$AA' \perp (Oxy); A'H \perp Ox; A'I \perp Oy$$
$$Suy\, ra: \quad AH \perp Ox; \; AI \perp Oy$$

(định lý ba đường vuông góc) . Tam giác AOH và tam giác AOI là nửa tam giác đều : $AH = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; OH = OI = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra : hai tam giác vuông AA'H và AA'I bằng nhau (tam gíac vuông có cạnh huyền và một cạnh góc vuông bằng nhau) Do đó : A'I = A'H .
Vậy OA' là đường phân giác của góc xOy , nghĩa là hình chiếu của Oz xuống (Oxy) là phân giác của góc (Oxy) .

b)Tam giác OA'H và tam giác OA'I là nửa tam giác đều (tam giác vuông có một góc bằng 30^o) . Suy ra :

$$OH = \frac{OA'\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow OA' = \frac{2OH}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} .$$

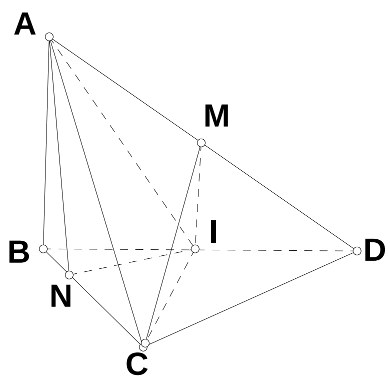
Tam giác vuông OAA'cho : $AA' = \sqrt{OA^2 - OA'^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Dạng tóan 4 : **Tính góc của một đường thẳng d và mặt phẳng (P).**

- ❖ Ta phải xác định đường vuông góc với mặt phẳng (P), hình chiếu d' của d xuông (P) .

> **Ví dụ 1 :** Cho tứ diện ABCD có : BCD là tam giác đều cạnh bằng a , AB vuông góc với (BCD) và AB = 2a .
> a) Tính góc của CM với mặt phẳng (BCD) , M là trung diểm của AD .
> b) Tính góc của AI với mặt phẳng (ABC) , I là trung điểm của BD .

Giải :



a)Ta có : MI song song với AB , do đó :

$MI \perp (BCD); MI = \dfrac{1}{2}AB = a$. Do đó CI là hình chiếu của CM xuống mặt phẳng (BCD) . Vậy : $\widehat{MCI}$ là góc của đường thẳng CM với mặt phẳng (BCD) . Tam giác vuông MCI có:

$$CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; tg\widehat{MCI} = \frac{MI}{CI} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} . \text{ Vậy } \widehat{MCI} = 49^o 6'$$

b) Vẽ IN $\perp BC\,(N \in BC)$ mà $IN \perp AB\,(do\ AB \perp (BCD))$ nên : IN vuông góc với (ABC) .

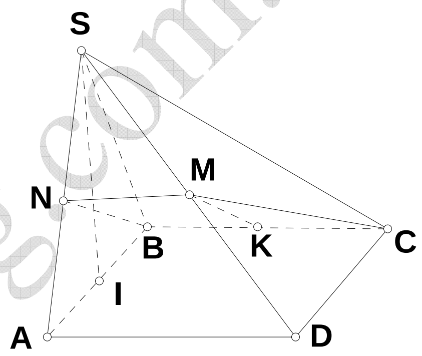
Suy ra AN là hình chiếu của AI xuống mặt phẳng (ABC) và góc IAN là góc của đường thẳng AI với mặt phẳng (ABC) .

Tam giác IBN là nửa tam giác đều : $IN = \dfrac{BI\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}; BN = \dfrac{1}{2}BI = \dfrac{a}{4}$.

Tam giác vuông AIN cho : tg $\widehat{IAN} = \dfrac{IN}{AN} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{AB^2+BN^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$. Vậy góc IAN bằng $22^o46'$.

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình vuông cạnh bằng a , SI vuông góc với (ABCD) và SAB là tam giác đều (I là trung điểm của AB) .
a) Chứng minh rằng SC và SD tạo với mặt phẳng (SAB) hai góc bằng nhau .
b) Tính góc của đường thẳng CM với mặt phẳng (SAB) (M là trung điểm của SD) .

Giải :



a) Ta có : AD $\perp$ AB (1) (ABCD là hình vuông)
AD $\perp$ SI (2) (do SI vuông góc với (ABCD).
(1) và (2) cho : AD $\perp (SAB)$.
Suy ra : SA là hình chiếu của SD xuống mặt phẳng (SAB) và góc DSA là góc của đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB)
Ta lại có : tam giác SAD vuông cân nên góc DSA bằng 45^{o} .
Tương tự : góc của đường thẳng SC với mặt phẳng (SAB) là góc CSB cũng bằng 45^o .
Vậy SC và SD tạo với mặt phẳng (SAB) hai góc bằng nhau (cùng bằng 45^o) .

b) Hình chiếu của điểm C xuống mặt phẳng (SAB) là điểm B .
Hình chiếu của điểm M xuống mặt phẳng (SAB) là điểm N , trung điểm của SA (vì MN song song với AD nên cũng vuông góc với (SAB)) .
Vậy góc của CM với (SAB) là góc của hai đường thẳng CM và BN .
Gọi K là trung điểm của BC , ta có MN song song và bằng BK nên MK song song với BN .
Do đó : góc (CM , BN) = góc CMK .

Tam giác vuông CMK có : $MK = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; CK = \dfrac{a}{2}$ nên là nửa tam giác đều . Vậy : $\widehat{CMK} = 30^o$.

Tóm lại , góc của dường thẳng CM với mặt phẳng (SAB) bằng 30^o .

Dạng tóan 5 : Xác định thiết diện của mặt phẳng (P) với một hình chóp (hay một hình lăng trụ) trong đó (P) vuông góc với một đường thẳng d .

❖ Ta thường tìm một đường thẳng a thuộc một mặt của hình chóp và a vuông góc với d : khi đó a song song với (P) và giao tuyến của (P) với mặt này là một đường song song với a .

Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD có : BCD là tam giác đều cạnh bằng a , AB vuông góc với (BCD) và AB = b . G và O lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD . (P) là mặr phẳng qua G và vuông góc với BO .

Xác định thiết diện của (P) và tứ diện và tính diện tích của thiết diện này .

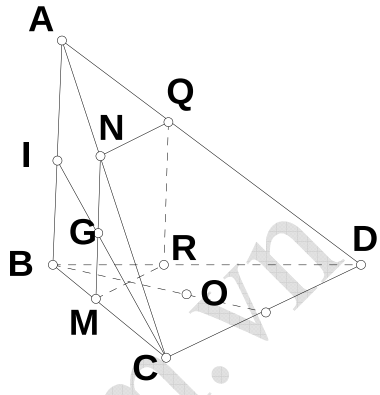
Giải :

- Ta có AB vuông góc với BO nên AB song song với (P) , Suy ra : giao tuyến của (P) với mặt (ABC) là đọan MN qua G và song song với AB .

Tương tự , CD vuông góc với BO nên song song với (P) : giao tuyến của (P) với mặt (BCD) là đọan MR song song với CD ; giao tuyến của (P) với mặt (ACD) là đọan NQ song song với CD ; giao tuyến của (P) với mặt (ABD) là đọan QR song song với AB .

Vậy thiết diện MNQR là hình bình hành .

Mà AB vuông góc với CD (vì AB vuông góc với (BCD) nên MN vuông góc với MR . Vậy thiết diện là một hình chữ nhật .



- Ta lại có : $\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{CG}{CI}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MN=\dfrac{2}{3}AB=\dfrac{2b}{3}$ (I là trung điểm của AB) .

Tương tự : $\dfrac{MR}{CD}=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{IG}{IC}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MR=\dfrac{1}{3}CD=\dfrac{a}{3}$.

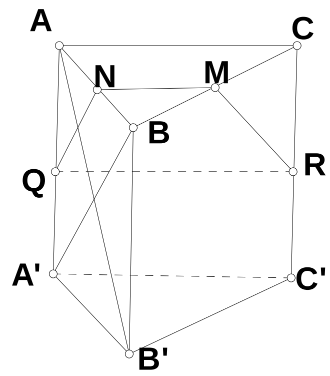
Suy ra : $S_{MNQR}=MN.MR=\dfrac{2b}{3}.\dfrac{a}{3}=\dfrac{2ab}{9}$.

Ví dụ 2 : Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có ABC là tam giác vuông cân (AB = AC = a) ; AA' vuông góc với (ABC) và AA' = a . (P) là mặt phẳng qua trung điểm M của BC và vuông góc với AB' . Xác định thiết diện của (P) và hình lăng trụ . Tính diện tích của thiết diện này .

Giải :

Ta có :

- $\begin{cases} AC\perp AB \\ AC\perp AA' \end{cases}\Rightarrow AC\perp(ABB'A')\Rightarrow AC\perp AB'$.



Suy ra AC song song với (P) .Do đó : giao tuyến của (P) và mặt (ABC) là đọan MN song song với AC (N là trung điểm của AB) .

Tương tự , BA' song song với (P) (vì BA' vuông góc với AB') nên giao tuyến của (P) với mặt (ABB'A') là đọan NQ song song với BA' (Q là trung điểm của AA') . Giao tuyến của (P) với mặt (ACC'A') là đọan QR song song với AC . Giao tuyến của (P) với mặt (BCC'B') là đọan MR .

Vậy MNQR là hình thang .

Mà MN vuông góc với (ABB'A') nên MN vuông góc với NQ (Vì MN song song với AC và AC vuông góc với(ABB'A')) .

Do đó : thiết diện của (P) với hình lăng trụ ABC,A'B'C' là một hình thang vuông .

- Ta cũng có :

$$MN=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2};NQ=\frac{1}{2}BA'=\frac{a\sqrt{2}}{2};QR=AC=a.$$

$$S_{MNQR}=\frac{MN+NQ}{2}.NQ=\frac{a+2a}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{8}$$

Dạng tóan 6 : Định tâm và bán kính mặt cầu qua các đỉnh của hình chóp .

Cách 1 : Ta chứng minh các đỉnh của hình chóp nhìn một đọan thẳng dưới một góc vuông khi đó tâm của mặt cầu là trung điểm của đọan thẳng và bán kính bằng nửa đọan thẳng đó .

Cách 2 : Gọi O là tâm mặt cầu qua các đỉnh của hình chóp S.ABCD , ta có :

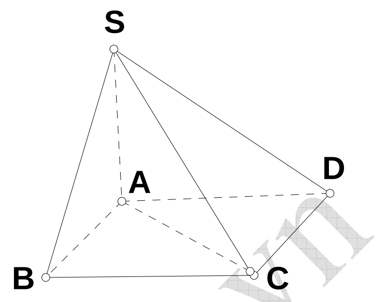
- OA = OB = OC = OD $\Leftrightarrow$ O thuộc trục d của đường tròn (ABCD) .
- OA = OS $\Leftrightarrow$ O thuộc mặt phẳng trung trực (P) của đọan SA .

Vậy O là giao điểm của d và (P) .

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình chữ nhật (AB = a ; AD = 2a) SA vuông góc với (ABCD) và SA = b . Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD .

Giải :

- Ta có : AB là hình chiếu của SB xuống (ABCD) mà AB vuông góc với BC nên SB vuông góc với BC . Tương tự : SD vuông góc với CD .



Vậy : $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^o$. Mặt cầu đường kính SC là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD .

- Ta có :

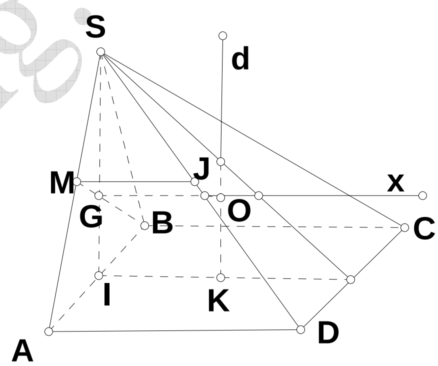
$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{SA^2 + AB^2 + AD^2} = \sqrt{b^2 + 5a^2}\ .$$

Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là trung điểm của SC và bán kính mặt cầu bằng nửa SC .

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình vuông cạnh bằng a , SI vuông góc với (ABCD) và SAB là tam giác đều (I là trung điểm của AB) . Định tâm và tính bán kính của mặt cầu qua năm đỉnh S , A , B , C , D .

Giải :

Gọi K là tâm hình vuông ABCD và d qua K và vuông góc với (ABCD) (d song song với SI) : d chính là trục của đường tròn (ABCD) .



Gọi M là trung điểm của SA và vẽ MJ song song với AD , ta có :

$AD \perp (SAB)\ (do\ AD \perp AB; AD \perp SI) \Rightarrow$

$MJ \perp (SAB)\ (do\ MJ \parallel AD) \Rightarrow MJ \perp SA\,(1)$

$$BM \perp SA\,(2)$$

$(1),(2)\, cho: SA \perp (BMJ)$

Vậy (BMJ) là mặt phẳng trung trực của SA . Gọi O là tâm mặt cầu qua S , A , B , C , D , ta có :

- OA = OB = OC = OD $\Leftrightarrow O \in d$
- OA = OS $\Leftrightarrow O \in (BMJ)$.

Vậy O là giao điểm của d và (BMJ) .

* Xác định O : Mặt phẳng (BMJ) cắt SI tại G là tâm cũng là trọng tâm) của tam giác SAB . Mà MJ song song với IK (cùng song song với AD) nên mặt phẳng (BMJ) cắt mặt phẳng (SI , d) theo giao tuyến Gx song song với IK . Giao diểm của Gx với d chính là tâm O .

* Tính bán kính R = OA : Tam giác vuông OAK cho : $OA^2 = OK^2 + KA^2$.

$$OK = GI = \frac{1}{3}SI = \frac{a\sqrt{3}}{6}; KA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$OA^2 = \frac{3a^2}{36} + \frac{2a^2}{4} = \frac{21a^2}{36} \Rightarrow R = OA = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

Cách khác : Sau khi đã xác định O thuộc d , ta còn có thể xác định O và tính bán kính theo cách sau :
Đặt KO = x (O và S nằm cùng bên đối với (ABCD)) , ta có :

$$OA^2 = OK^2 + KA^2 = x^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2; OS^2 = OG'^2 + SG'^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{2} - x)^2$$

$$OA^2 = OS^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + x^2 - ax\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

(OG' song song với IK)
Ta định được tâm O và tính được bán kính R .

C . Bài tập rèn luyện .

3.10 . Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình thang vuông tại A và B (AB =BC = a ; AD = 2a) ; SA vuông góc với (ABCD) . Chứng minh : CD vuông góc với (SAC) .

3.11 . Cho tứ diện ABCD có : AB = AC ; DB = DC . I là trung điểm của BC .
a) Chứng minh rằng : $BC \perp (AID)$.
b) AH là đường cao của tam giác AID , chứng minh rằng AH vuông góc với BD .

3.12 . Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình chữ nhật ; tam giác SBC vuông tại Bvà tam giác SCD vuông tại D . Chứng minh rằng SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) .

3.13 . Cho tứ diện ABCD có : AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) ; BCD là tam giác vuông tại C và BC = a ; CD = 2a . H là điểm trên cạnh BD với BH = x . Định x để AD vuông góc với CH .

3.14 . Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình vuông cạnh bằng a ; SA vuông góc với (ABCD) và SA = a .
a) Tính góc của SB với mặt phẳng (SAC) .
b) Tính góc của CA với mặt phẳng (SCD) và góc của DB với mặt phẳng (SDC) .

3.15 . Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình thang vuông tại A và D (AB = AD = a ; BC = 2a) ; SD vuông góc với (ABCD) . Từ trung diểm E của CD , vẽ EK vuông góc với SC (K thuộc SC)
a) Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (EBK) .
b) Chứng minh rằng 6 điểm S , A , B , D , E , K nằm trên một mặt cầu .

3.16* . Cho hai hình chữ nhật ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng(AB = a ; AD = AF = $a\sqrt{2}$) và hai đường chéo AC , BF vuông góc với nhau .
a) Tính đọan CE .
b) M là trung điểm của BE và (P) là mặt phẳng qua M , vuông góc với AC . Xác định thiết diện của (P) với hình lăng trụ ADF.BCE .

3.17. Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình chữ nhật ; SA vuông góc với (ABCD) ; BC = a ; SC tạo với (SAB) một góc α và SC tạo với (ABCD) một góc β . Chứng minh rằng :

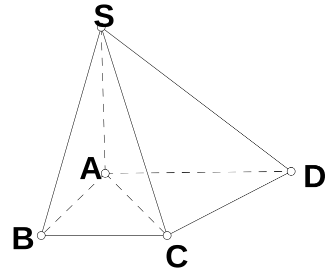
$$AB = \frac{a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha}$$

3.18 . Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn (C) đường kính AC = a . B là một điểm thuộc (C) và BC = x . Trên tia Ax vu6ng góc với (P) lấy điểm S sao cho : AS = a .
Gọi H , K lần lượt là chân đường vuông góc vẽ từ A xuống SB , SC .
a) Chưng minh rằng các tam giác SBC và AHK là tam giác vuông
b) Chứng minh rằng tứ giác BCKH nội tiếp được . Tính độ dài HK theo a và x .

3.19 . Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình vuông cạnh bằng a ; SA vuông góc với (ABCD) và SA = a . I thuộc SC và 4SI = SC . (P) là mặt phẳng qua I và vuông góc với AC . Định thiết diện của (P) và hình chóp . Tính diện tích của thiết diện này .

D . Hướng dẫn – Đáp số .

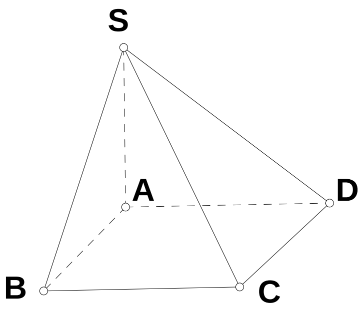
3.10 . CD vuông góc với SA ; CD vuông góc với AC .

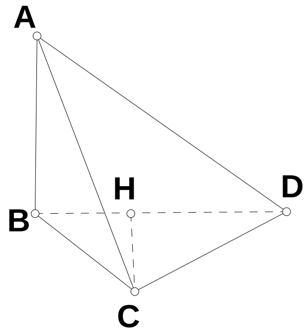


3.11 . a) BC vuông góc với AI ; BC vuông góc với DI .
b) AH vuông góc với BC ; AH vuông góc với DI .

Suy ra : AH vuông góc với (BCD) . D o đó AH vuông góc với BD .

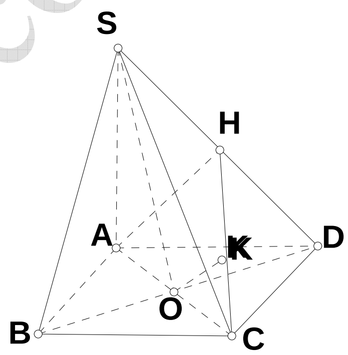
3.12 . BC vuông góc với (SAB) . Suy ra : BC vuông goć với SA . Tương tự CD vuông góc với SA . Vậy SA vuông góc với (ABCD) .





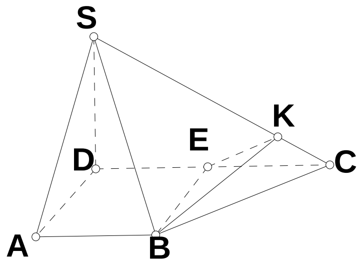
3.13 . BD là hình chiếu của AD xuống mặt phẳng (BCD) . Do đó : CH vuông góc với AD khi và chỉ khi CH vuông góc với BD . Tam giác vuông CBD có đường cao là CH cho :

BH.BD = BC^2 hay $x = BH = \dfrac{BC^2}{BD} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

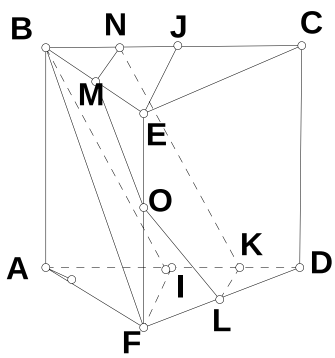


3.14 . a) BD vuông góc với (SAC) . SO là hình chiếu của SB xuống (SAC) . Góc BSO là góc của SB với (SAC) . $\widehat{BSO} = 30^o$

b) CD vuông góc với (SAD) . Vẽ AH vuông góc với SD (H là trung điểm của SD) , AH vuông góc với (SCD) và CH là hình chiếu của AC xuống (SCD) . Góc ACH là góc của AC với (SCD) . $\widehat{ACH} = 30^o$
Vẽ OK vuông góc với (SCD) (OK song song và bằng nửa AH) . DK là hình chiếu của BD xuống (SCD) . Góc ODK là góc của BD với (SCD) . $\widehat{ODK} = 30^o$



3.15 . a) ABED là hình vuông . BE vuông góc với (SDC) . SC vuông góc với EB và EK .
b) Các góc : SAB , SDB , SEB , SKB là góc vuông nên 6 điểm S , B , A , D , E , K nằm trên mặt cầu đường kính SB .



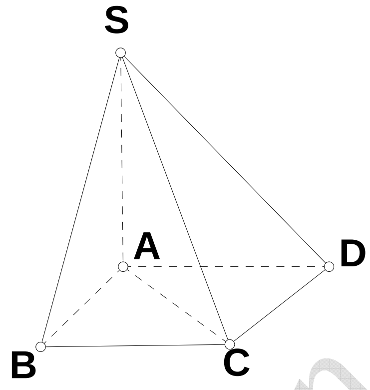
3.16 .a) AB vuông góc (ADF) (do AD vuông góc với AD , AF) . Vẽ FI vuông góc với AD (I thuộc AD) , FI vuông góc với (ABCD) . BI là hình chiếu của BF xuống (ABCD) nên BI vuông góc với AC .
Hai tam giác vuông ABI và BCA đồng dạng :

$\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AB}{BC} \Leftrightarrow AI = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy I là trung điểm của AD . Tam giác AFD cân đỉnh F . Do đó : FD = AF = a . Do đó : CE = FD = a .

b) (P) song song với (BFI) (vì cùng vuông góc với AC) . Do đó : (P) cắt (BEC) theo MN (N là trung điểm của BJ với J là trung điểm của BC) ; (P) cắt (ABCD) theo NK (K là trung điểm của ID) .(P) cắt (ADF) theo KL (L là trung điểm của DF) . (P) cắt (CDFE) theo LO (O là trung điểm của EF) . (P) cắt (ABEF) theo MO . Thiết diện là hình ngũ giác MNKLO .

3.17. $\widehat{BSC} = \alpha ; \widehat{ASC} = \beta$



$$SC = \frac{a}{\sin\alpha}; AC = \frac{a\cos\beta}{\sin\alpha}$$

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = \frac{a^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{a^2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)}{2\sin^2\alpha}$$

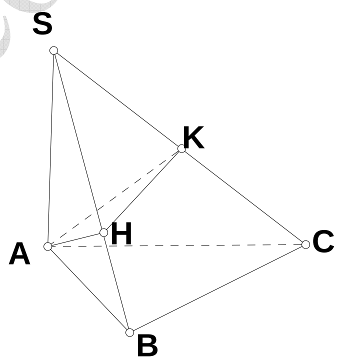
$$AB = \frac{a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha}$$

3.18 . a) AB là hình chiếu của SB xuống (P) , AB vuông góc với BC nên BC vuông góc với SB . Tam giác SBC vuông tại B

AH vuông góc với (SBC) (vì AH vuông góc với SB và BC) . Suy ra : tam giác AHK vuông tại H .

b) SC vuông góc với (AHK) (vì SC vuông góc với AH , AK) . suy ra SC vuông góc với HK . Tứ giác BCKH nội tiếp được vì có hai góc CKH , CBH vuông .

Tam giác vuông AHK có : $HK^2 = AK^2 - AH^2$ mà :



$$AK = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; AH.SB = AS.AB$$

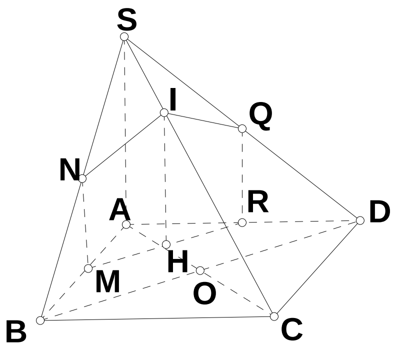
$$\Leftrightarrow AH^2 = \frac{AS^2.AB^2}{SB^2} = \frac{a^2(a^2-x^2)}{a^2+a^2-x^2} \Rightarrow$$

$$HK^2 = \frac{2a^2}{4} - \frac{a^2(a^2-x^2)}{2a^2-x^2} = \frac{a^2x^2}{2(2a^2-x^2)}$$

$$HK = \frac{ax}{\sqrt{2(2a^2-x^2)}}$$

3.19 . SA song song với (P) nên (P) cắt (SAC) theo IH song song với SA (H là trung điểm của AO , O là tâm hình vuông) ; (P) cắt (ABCD) theo MR song song với BD ; (P) cắt (SAB) theo MNsong song với SA ; (P) cắt (SAD) theo RQ song song với SA .

Thiết diện là hình ngũ giác MNIQR gồm hai hình thang vuông bằng nhau .



$$S_{MNIH} = \frac{MN + IH}{2}.MH$$

$$= \frac{\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16};$$

$$S_{MNIQR} = 2S_{MNIH} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{8}$$

§4. Mặt phẳng vuông góc .

A . Tóm tăt giáo khoa .

1 . **Góc giữa hai mặt phẳng** : Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Như thế góc giữa hai mặt phẳng song song sẽ bằng 0 .

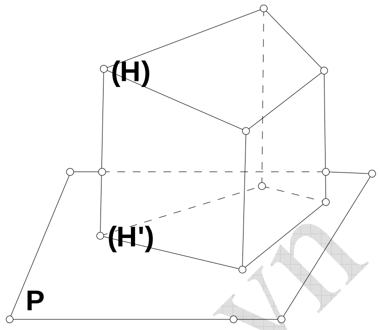
Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng : Từ một điểm trên giao tuyến của hai mặt phẳng , ta vẽ hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến này . Góc của hai đường thẳng này chính là góc của hai mặt phẳng .

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} a \subset (P); a \perp d = (P) \cap (Q) \\ b \subset (Q); b \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{(a,b)} = \widehat{(P,Q)}}$$

2. Định lý về diện tích hình chiếu :

$\boxed{\text{S'} = \text{S} \cos \alpha}$

- S là diện tích đa giác (H)
- S' là diện tích đa giác (H') , hình chiếu của đa giác (H) xuống mặt phẳng (P) .
- α là góc giữa mặt phẳng chứa đa giác (H) và mặt phẳng (P)

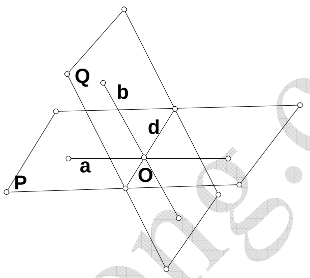


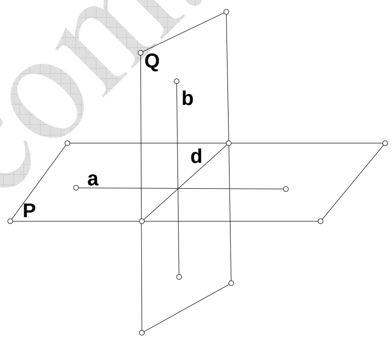
2 . Mặt phẳng vuông góc .

a) **Định nghĩa** : Hai mặt phẳng gọi là **vuông góc** khi góc của chúng bằng 90^o .

b) **Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc .**

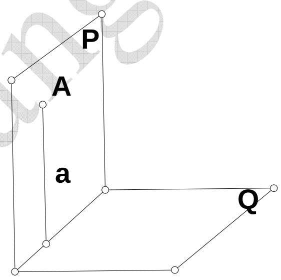
Định lý : Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia .

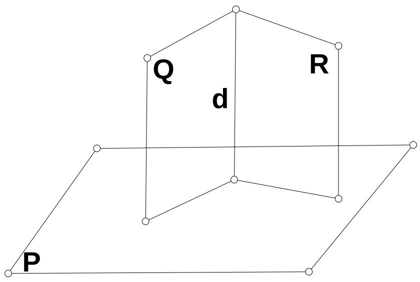




Hệ quả 1 : Có hai mặt phẳng vuông góc . Nếu từ một điểm trong mặt phẳng thứ nhất ta vẽ một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thứ hai thì đường thẳng này sẽ hòan tòan nằm trong mặt phẳng thứ nhất .

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} (P) \perp (Q) \\ A \in (P); A \in a \\ a \perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow a \subset (P)}$$





Hệ quả 2 : Có hai mặt phẳng vuông góc . Nếu một đường thẳng nằm trong mặt này và vuông góc với giao tuyến thì nó sẽ vuông góc với mặt phẳng kia .

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ a \perp d = (P) \cap (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (Q)}$$

Hệ quả 3 : Nếu hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng này .

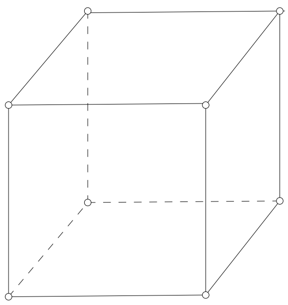
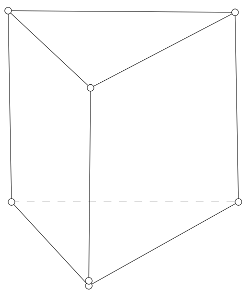
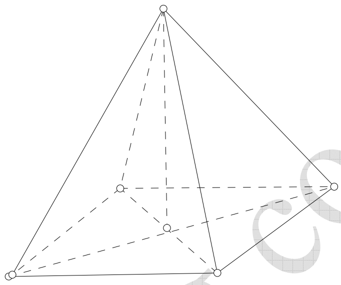
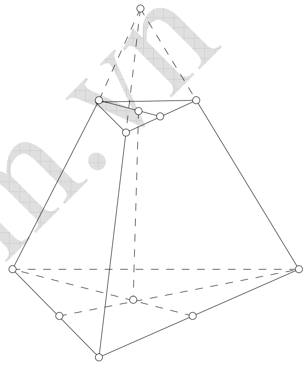
$$\boxed{\left.\begin{array}{c} (Q) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \\ (Q) \cap (R) = d \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (P)}$$

Hệ quả 4 : Qua một đường thẳng a không vuông góc với (P) , có và chỉ có một mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) .

3 Hình lăng trụ đứng . Hình hộp chữ nhật . Hình lập phương .

a) **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy .
Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều . (ví dụ : hình lăng trụ tam giác đều là hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều)

b) **Hình hộp đứng** là hình lăng trụ đứng có đáy là một hình bình hành .
Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật : tất cả các mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật .
Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông : tất cả các mặt của hình lập phương đều là hình vuông .

4 . Hình chóp đều . Hình chóp cụt đều .

a) **Hình chóp đều** là hình chóp có đáy là đa giác đều và tất cả cạnh bên bằng nhau : chân đường cao của hình chóp đều là tâm của đa giác đáy .

b) **Hình chóp cụt đều** là phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên .

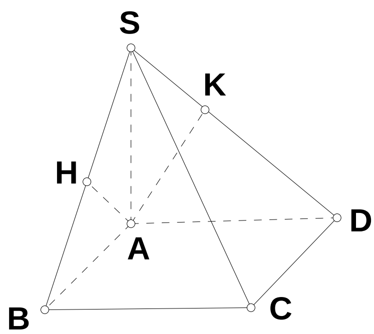
B . Giải tóan :

Dạng tóan 1 : **Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc .**

❖ Ta chỉ cần chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia .

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình chữ nhật ; SA vuông góc với (ABCD) .
a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc .
b) Vẽ AH , AK lần lượt là đường cao của các tam giác SAB , SAD . Chứng minh rằng hai mặt phẳng (AHK) và (SAC) vuông góc .

Giải :



a) Ta có :
$BC \perp (SAB)\,(do\; BC \perp AB\,;\, BC \perp SA)$
$Suy\, ra\!:(SBC) \perp (SAB).$

b) Ta cũng có :
$AH \perp (SBC)\,(do\; AH \perp BC\,;\, AH \perp SB)$
$Suy\, ra\!: AH \perp SC\,(1)$

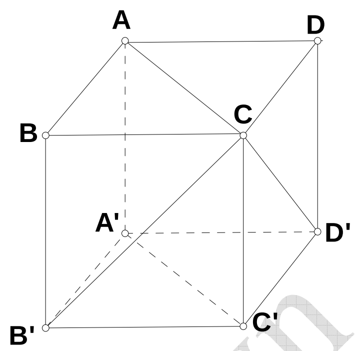
Tương tự : $AK \perp SC\,(2)$

(1) và (2) cho : SC vuông góc với (AHK) . Vậy hai mặt phẳng (AHK) và (SAC) vuông góc .

Ví dụ 2 : Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh bằng a . Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ACC’A’) và (CB’D’) vuông góc .

Giải :

Ta có : AC = AB' = AD' = $a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông
C'C = C'B' = C'D' = a
Vậy AC' là trục của đường tròn (CB'D') nghĩa là AC' vuông góc với (CB'D') .
Vậy hai mặt phẳng (ACC'A') và (CB'D') vuông góc với nhau (vì mặt phẳng (ACC'A') chứa AC' vuông góc với (CB'D')



Dạng tóan 2 : **Chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng (trường hợp đã có 2 mặt phẳng vuông góc) .**

❖ Ta chỉ cần chứng minh đường thẳng này nằm trong một mặt và vuông góc với giao tuyến .

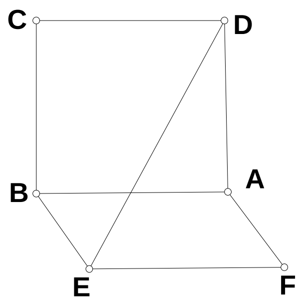
Ví dụ 1 : Cho hai hình vuông ABCD và ABEF cạnh bằng a , nằm trong hai mặt phẳng vuông góc . Tính DE và chứng minh rằng DE vuông góc với AC và BF .

Giải :

Ta có : AD vuông góc với AB (là giao tuyến của 2 mặt phẳng vuông góc (ABCD) và (ABEF)) ;
AD hiển nhiên nằm (ABCD) nên AD vuông góc với (ABEF) .
Tam giác ADE vuông tại A cho :

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2$$

$$DE = a\sqrt{3}$$



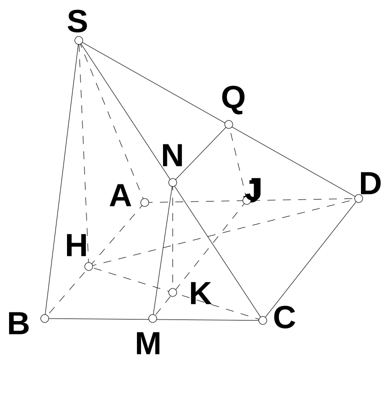
Ta cũng có : AE là hình chiếu của DE xuống (ABEF), mà AE vuông góc với BF nên DE vuông góc với BF.
Tương tự , EB vuông góc với (ABCD) ; BD là hình chiếu của DE xuống (ABCD) : BD vuông góc với AC nên DE vuông góc với AC.

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình vuông cạnh bằng a ; SAB là tam giác đều và hai mặt này nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc .
a) Xác định và tính đường cao SH của hình chóp này.
b) (P) là mặt phẳng qua trung điểm M của BC và vuông góc với BC . Xác định và tính diện tích của thiết diện này.

Giải :

a) Trong tam giác SAB , vẽ đường cao SH , ta có : SH vuông góc với (ABCD) (vì (SAB) vuông góc với (ABCD)) . Vậy SH là đường cao của hình chóp S.ABCD và

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



b) (SAB) vuông góc với BC (vì BC vuông góc với AB và 2 mặt phẳng (SAB) và (ABCD) vuông góc
(P) song song với (SAB) (vì cùng vuông góc với BC)
Do đó : (P) cắt (ABCD) theo MJ song song với AB .
(P) cắt (SBC) theo MN song song với SB .
(P) cắt (SCD) theo NQ song song với CD .
(P) cắt (SAD) theo QJ song song với SA .
Vậy thiết diện của (P) với hình chóp là hình thang MNQJ
* Tính diện tích :

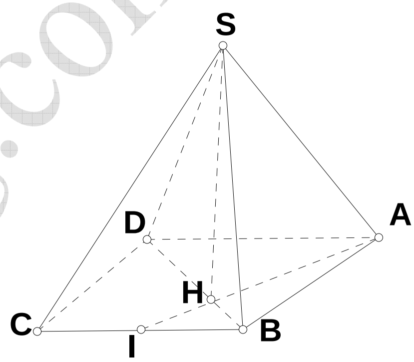
(NK là giao tuyến của (P) và (SHC) nên NK song song với SH . Suy ra : NK vuông góc với (ABCD)
=> NK vuông góc với MJ nên là đường cao của hình thang MNQJ .

$$S_{MNQJ} = \frac{NQ+MJ}{2}.NK = \frac{a+2a}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

❖ *Chú ý : Ta còn có thể sử dụng hệ quả 3 để chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng .*

Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình vuông cạnh bằng a , đường cao của hình chóp bằng $a\sqrt{2}$; hai mặt (SBD) và (SAI) cùng vuông góc với (ABCD) (I là trung điểm của BC) . Gọi α, β lần lượt là góc của SB , SD với (ABCD) . Chứng minh rằng : $\cot\alpha + \cot\beta = 1$.

Giải :
Gọi H là giao điểm của AI và BD , ta có :

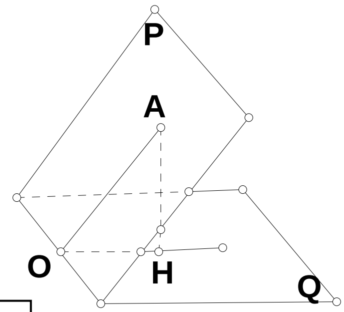


$$\left.\begin{matrix}(SAI) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD)\end{matrix}\right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD) (do\, SH = (SAI) \cap (SBD)) .$$

Vậy SH là đường cao của hình chóp .
Ta cũng có : HB , HD là hình chiếu của SB , SD xuông (ABCD) nên :
$\widehat{SBH} = \alpha$; $\widehat{SDH} = \beta$ lần lượt là góc của SB , SD với (ABCD) và :

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{BH}{SH} + \frac{DH}{SH} = \frac{BD}{SH} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$$

Dạng tóan 3 : Xác định góc của 2 mặt phẳng (P) và (Q)

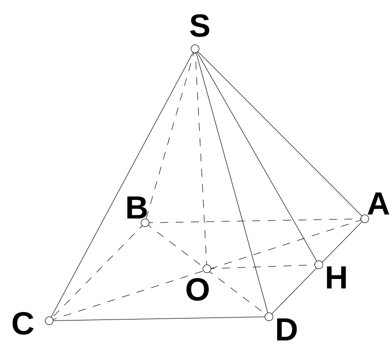


❖ Ngòai việc sử dụng định nghĩa góc của 2 mặt phẳng , ta thường sử dụng cách sau :

Bước 1: Lấy A thuộc (P) , vẽ AH vuông góc với (Q) (H thuộc (Q)) .
Bước 2: Vẽ HO vuông góc với giao tuyến d của (P) và (Q) (O thuộc d) , suy ra : AO vuông góc với d .
Vậy AOH là góc của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Ví dụ 1 : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có : góc giữa mặt bên và đáy bằng α ; góc giữa cạnh bên và đáy bằng β . Tìm một hệ thức giữa hai góc này .

Giải :
Vẽ SO vuông góc với (ABCD) . Suy ra : OA = OB = OC = OD (vì các tam giác vuông SOA , SOB , SOC , SOD bằng nhau) . Vậy O là tâm hình vuông .
Vẽ OH vuông góc với AD (H thuộc AD) thì H là trung điểm của AD . Suy ra : SH cũng vuông góc với AD (vì OH là hình chiếu của SI xuống (ABCD)) .



Do đó : $\widehat{SHO} = \alpha$ là góc giữa mặt bên và đáy .
Ta cũng có : OA là hình chiếu của cạnh bên SA xuống (ABCD) . Vậy : $\widehat{SAO} = \beta$ là góc của cạnh bên và đáy .

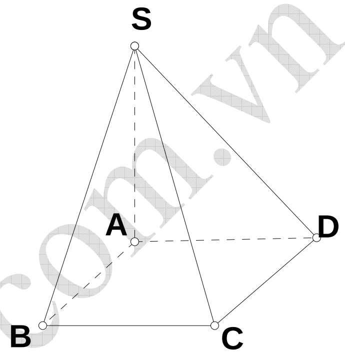
Tam giác vuông SOH cho : $\cot\alpha = \frac{OH}{SO} = \frac{a}{2SO}$

Tam giác vuông SAO cho : $\cot\beta = \dfrac{OA}{SO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2SO}$

Suy ra : $\sqrt{2}\cot\alpha = \cot\beta$

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình chữ nhật ; hai mặt bên (SAB) , (SAD) cùng vuông góc với đáy ; (SBC) tạo với đáy một góc α và SC = a tạo với mặt (SAB) một góc β . Tính đường cao của hình chóp .

Giải :



Ta có :

$$\left.\begin{array}{r}(SAB)\perp(ABCD)\\ (SAB)\cap(ABCD)=AB\\ BC\perp AB\,(BC\subset(ABCD))\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)$$

Suy ra : SB là hình chiếu của SC xuống (SAB) .

Vậy $\widehat{BSC}=\beta$ là góc của SC với (SAB) .

Ta cũng có :

$$\left.\begin{array}{r}(SAB)\perp(ABCD)\\ (SAD)\perp(ABCD)\\ SA=(SAB)\cap(SAD)\end{array}\right\}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$$

Mà AB vuông góc với BC nên SB vuông góc với BC (định lý 3 đường vuông góc) .

Vậy $\widehat{SBA}=\alpha$ là góc của (SBC) tạo với đáy .

Tam giác vuông SBC cho : $\cos\beta = \dfrac{SB}{SC} \Leftrightarrow SB = SC\cos\beta = a\cos\beta$

Tam giác vuông SAB cho : $\sin\alpha = \dfrac{SA}{SB} \Leftrightarrow SA = SB\sin\alpha = a\cos\beta\sin\alpha$.

Vậy đường cao của hình chóp bằng : $SA = a\sin\alpha\cos\beta$.

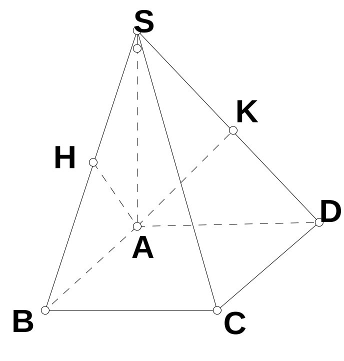
Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD có : SA vuông góc với (ABCD) và SA = a ; ABCD là hình vuông cạnh bằng a . Tính góc của hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

Giải :

Ta có : BC vuông góc với (SAB) (vì BC vuông góc với AB và SA) . Vẽ AH vuông góc với SB (H là trung điểm của SB Vì tam giác SAB cân) thì AH vuông góc với (SBC)
(vì AH vuông góc với SB và BC) .
Tương tự , AK vuông góc với (SCD) .
Vậy góc của 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc của 2 đường thẳng AH và AK .

Tam giác AHK là tam giác đều(vì các cạnh đều bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$) .

Vậy góc của 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60^o .

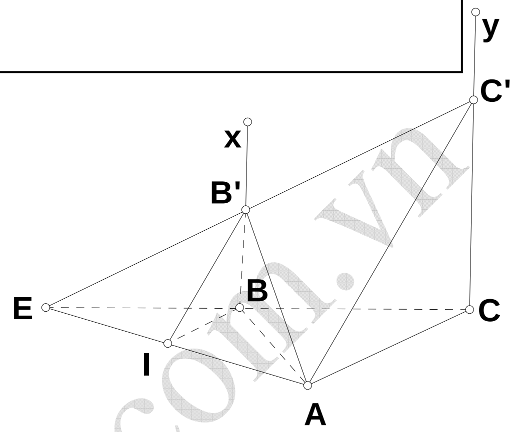


Dạng tóan 4 : Tính diện tích của một đa giác hay góc của 2 mặt phẳng .

❖ Trong một số trường hợp , ta có thể dùng định lý về diện tích hình chiếu để tính diện tích một đa giác hay tính góc của 2 mặt phẳng .

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 2a . Trên CB kéo dài , lấy điểm E sao cho BE = 2a . Các tia Bx , Cy cùng vuông góc với (ABC) ; lấy điểm B' trên Bx sao cho : BB' = a . EB' cắt Cy tai C' .
a) Tính góc của 2 mặt phẳng (ABC) và (A'B'C')
b) Tính diện tích của tam giác AB'C' .

Giải :



a) Ta có : BA = BC = BE = 2a nên tam giác ACE vuông tại A .
Vẽ BI vuông góc với AE (BI song song với AC) thì:
BI = a (BI là đường trung bình của tam giác ACE) và
B'I cũng vuông góc với AE (định lý 3 đường vuông góc) .
Vậy góc B'IB là góc của 2 mặt phẳng (ABC) và (A'B'C')
và : $\widehat{B'IB} = 45^0$ (vì tam giác BB'I vuông cân)

b) Tam giác AB'C' có hình chiếu xuống (ABC) là tam giác ABC nên :

$$S_{AB'C'} = S_{ABC}\cos 45^0 \Leftrightarrow S_{AB'C'}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$$

Ví dụ 2 : Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' , cạnh đáy bằng a . Trên các cạnh AA' , BB' , CC' lần lượt lấy các điểm M , N , P sao cho diên tích tam giác MNP bằng $2a^2$. Tính góc của 2 mặt phẳng (ABC) và (MNP) .

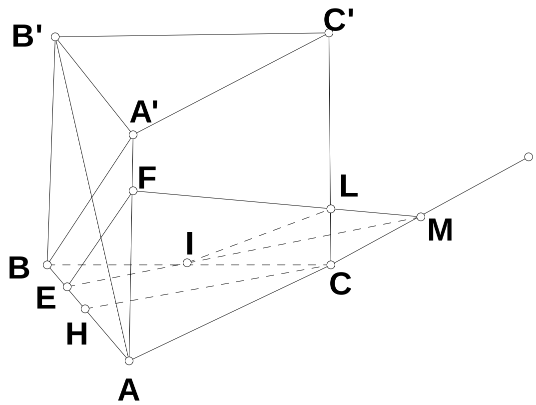
Giải :
Tam giác MNP có hình chiếu xuống mặt phẳng (ABC) là tam giác ABC nên :

$$S_{ABC} = S_{MNP}\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4.2a^2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \alpha = 77^0 29'$$

Vây góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (MNP) bằng $77^0 29'$.

Ví dụ 3* : Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' có : cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a . (P) là mặt phẳng qua trung điểm I của BC và vuông góc với AB' .
a) Xác định thiết diện của (P) và hình lăng trụ .
b) Tính diện tích của thiết diện này .

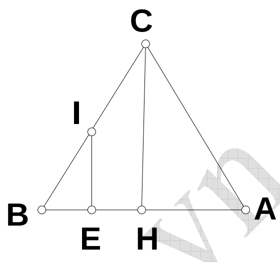
Giải :



a) Gọi CH là đường cao của tam giác đều ABC , ta có :
CH vuông góc với (ABB'A') (vì CH vuông góc với AB và BB') .
Suy ra : CH vuông góc với AB' . Do đó : CH song song với (P) .
Tương tự , A'B vuông góc với AB' (vì ABB'A' là hình vuông) nên A'B song song với (P) .
Vậy : (P) cắt (ABC) theo IE song song với CH ; (P) cắt (ABB'A') theo EF song song với A'B ;
EI cắt AC tại M và FM cắt CC' tại L nên:

(P) cắt mặt (ACC’A’) theo đọan FL ; (P) cắt mặt (BCC’B’) theo đọan IL .
Thiết diện của (P) và hình lăng trụ là tứ giác EFLI .

b) F và L có hình chiếu xuống (ABC) lần lượt là A và C nên tứ giác EFLI có hình chiếu xuống (ABC) là tứ giác EACI .
Ta lại có : AA’và AB’ lần lượt vuông góc với (ABC) và (P) nên :
Góc ((P) , (ABC)) = góc (AB’ , AA’) = 45^0 (vì ABB’A’ là hình vuông) .
Suy ra:



$$S_{EACI} = S_{EFLI}\cos 45^0 \Leftrightarrow S_{EFLI} = \frac{S_{EACI}}{\cos 45^0} = \frac{2S_{EACI}}{\sqrt{2}}$$

$$S_{EACI} = S_{ABC} - S_{BIE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{32} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{32} \Rightarrow$$

$$S_{EFLI} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} = \frac{7a^2\sqrt{6}}{32}$$

C .Bài tập rèn luyện .

3.20 . Cho hình vuông ABCD . M là một điểm không nằmtrong mặt phẳng (ABCD) sao cho các góc AMB và AMD vuông . Chứng minh rằng hai mặt phẳng (MAC) và (ABCD) vuông góc .

3.21 . Cho hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình chữ nhật ; SH , SK là đường cao của các tam giác SAB và SCD (H thuộc AB ; K thuộc CD) , Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SHK) và (ABCD) vu6ng góc .

3.22 . Cho hình chóp đều S.ABCD , cạnh đáy bằng a ; đường cao của hình chóp bằng x .
a) O là tâm của đáy , vẽ OH vuông góc với SC (H thuộc SC) . Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAC) và (HBD) vuông góc .
b) Định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc bằng 120^o .

3.23 . Cho hình chóp S.ABC có : SA vuông góc với (ABC) ; hai mặt phẳng (SBC) và (SAB) vuông góc với nhau . Chưng minh hai tam giác ABC và SBC là tam giác vuông .

3.24 . Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh bằng a . Trên các đọan AB’ và A’C’ lần lượt lấy các điểm M và N sao cho : AM = C’N = $x\sqrt{2}$ ($0 < x < a$) .
a) Tính đọan MN theo a và x . Định x để đọan MN nhỏ nhất .
b) Khi đọan MN nhỏ nhất , chứng minh rằng MN vuông góc với AB’ và A’C’.

3.25. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh bằng a .
a) Sử dụng định lý ba đường vuông góc , chứng minh rằng AC’ vuông góc với BA’ và BD .
b) (P) là mặt phẳng qua trung điểm M của BC và vuông góc với AC’ . Xác định thiết diện của (P) với hình lập phương . Chứng minh rằng thiết diện này qua tâm O của hình lập phương và tính diện tích của thiết diện .

3.26 . Cho hình lăng trụ đều ABC.A’B’C’ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng 2a . M , N , P lần lượt nằm trên AA’ , BB’ , CC’ . Tính diện tích của tam giác MNP biết rằng
a) Mặt phẳng (MNP) tạo với (ABC) một góc bằng 60^0.
b) Mặt phẳng (MNP) vuông góc với AB’ .

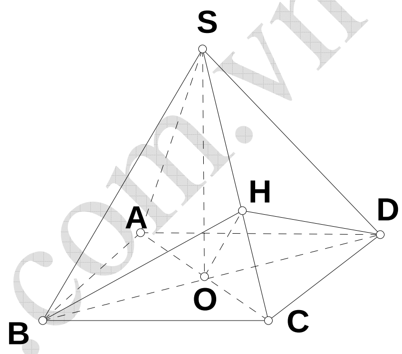
3.27 . Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh bằng a . Lấy M , N , P lần lượt trên các cạnh AB , CC’ , A’D’ sao cho : AM = CN = D’P = $\frac{3a}{4}$.
a) Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều .
b) Tính góc của 2 mặt phẳng (ABCD) và (MNP) .

D . Hướng dẫn – Đáp số .

3.20 . Gọi I , J là trung điểm của AB , AD , ta có : MI = MJ : AI = AJ ; CI = CJ . Vậy (MAC) là mặt phẳng trung trực của IJ . Do đó (MAC) vuông góc với (ABCD) .

3.21 . SH vuông góc với CD (vì SH vuông góc với AB và CD song song vớiAB). Do đó CD vuông góc với (SHK) (vì CD vuông góc vớiSH và SK) . Vậy hai mặt phẳng (AHK) và (SAC) vuông góc .

3.22 . a) BD vuông góc với AC ; BD vuông góc với SO nên BD vuông góc với (SAC) .
SC vuông góc với BD ; OH vuông góc với SC nên SC vuông góc với (HBD) . Vậy hai mặt phẳng (SAC) và (HBD) vuông góc .



b) HB vuông góc với SC (HB trong (SBC))
HD vuông góc với SC (HD trong (SCD)).
Vậy Góc của HB , HD là góc của 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD)
Tam giác HBD cân nên HO là phân giác góc BHD . Do đó :

$$\widehat{BHD} = 120^o \Leftrightarrow \widehat{BHO} = 60^o \Leftrightarrow \cot g\,\widehat{BHO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

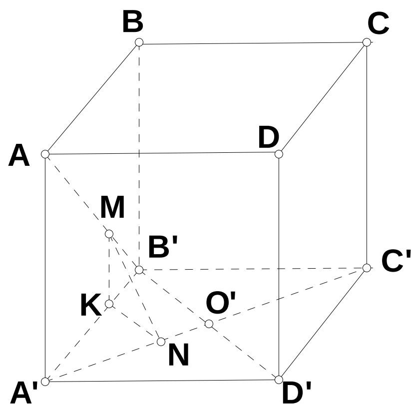
$$\Leftrightarrow \frac{OH}{OB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

Tam giác vuông SOC cho :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{2x^2 + a^2}{a^2x^2} \Leftrightarrow OH^2 = \frac{a^2x^2}{2x^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{6} = \frac{a^2x^2}{2x^2 + a^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

3.23. (ABC) vuông góc với (SAB) ; (SBC) vuông góc với (SAB) . Suy ra : BC vuông góc với (SAB) . Vậy hai tam giác ABC và SBC vuông tại B



3.24 . a) Vẽ MK song song với AA' (K thuộc A'B')
Suy ra : MK vuông góc với (ABCD) , ta có :
A'K = x ; A'N = (a – x) $\sqrt{2}$;
$KN^2 = A'K^2 + A'N^2 - 2A'K.A'N \cos 45^o$.

$$= x^2 + \left[(a-x)\sqrt{2}\right]^2 - 2x.(a-x)\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= x^2 + 2(a-x)^2 + 2x^2 - 2ax$$

$$= 5x^2 - 6ax + 2a^2$$

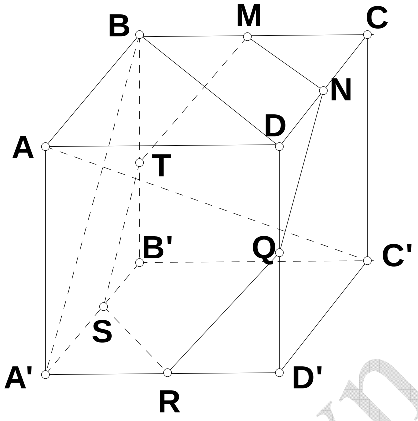
$MN^2 = MK^2 + KN^2 = (a - x)^2 + 5x^2 - 6ax + 2a^2 = 6x^2 - 8ax + 3a^2$.

$$= 6(x - \frac{2a}{3})^2 + \frac{a^2}{3} \geq \frac{a^2}{3}$$ (dấu " = " xảy ra khi x = $\frac{2a}{3}$

$$b)\, x = \frac{2a}{3}; \frac{A'K}{A'B'} = \frac{2}{3}; A'N = (a - \frac{2a}{3})\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{A'N}{A'O'} = \frac{a\sqrt{2}}{3} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3}$$

$$Suy\,ra: \frac{A'K}{A'B'} = \frac{A'N}{A'O'}$$

(O' là tâm hình vuông A'B'C'D') . Do đó : KN song song với B'O nên KN vuông góc với A'C' . Mà KN là hình chiếu của MN xuống (ABCD) nên MNvuông góc với A'B' .



Ta cũng có :

$AN^2 = AA'^2 + A'N^2 = a^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{11a^2}{9}$

$MN^2 + AM^2 = \frac{a^2}{3} + \left(\frac{2a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{11a^2}{9}$

$Suy\,ra: AN^2 = AM^2 + MN^2$

Vậy : MN vuông góc với AB'.

3.25 . a) AC là hình chiếu của AC' xuống (ABCD)
AC vuông góc với BD nên AC' vuông góc với BD .
Tương tự , AC' vuông góc với BA' . Suy ra : AC' vuông góc với (A'BD) .

b) (P) song song với (A'BD) . Tương tự :
(P) song song với (CB'D') .
Suy ra : (P) cắt (ABCD) theo MNsong song với BD ; (P) cắt CC'D'D) theo NQ song song với CD' ; (P) cắt (AA'D'D) theo QR song song với DA'; (P) cắt (A'B'C'D') theo RS song song với B'D' ; (P) cắt (ABB'A') theo ST song song với BA' ; (P) cắt (BCC'B') theo TM song song với CB'.
Thiết diện là lục giác MNQRST .
Tứ giác MCRA' là hình bình hành nên MR cắt A'C tại trung điểm O của A'C (là tâm hình lập phương) .
Tương tự NS , QT qua O và 6 tam giác OMN , ONQ , OQR , ORS , OST . OTM là 6 tam giác đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy thiết diện là hình lục giác đều . qua tâm O của hình lập phương và có diện tích bằng :

$6\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

3.26 . a) Tam giác MNP có hình chiếu xuống mặt phẳng (ABC) là tam giác ABC nên :

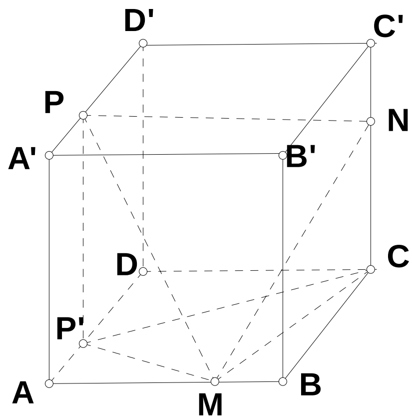
$S_{ABC} = S_{MNP}\cos 60^0 \Leftrightarrow S_{MNP} = \frac{S_{ABC}}{\cos 60^0} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

b) góc (ABC , MNP) = góc (AA' , AB')

$\cos\widehat{A'AB'} = \frac{AA'}{AB'} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+4a^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \widehat{A'AB'} = 26^0 34'$

3.27 . a) $MN^2 = NP^2 = MP^2 = \frac{a^2}{16} + a^2 + \frac{9a^2}{16} = \frac{26a^2}{16}$

b) P có hình chiếu là P' trên AD và AP'= 0,25a .
Tam giác MNP có hình chiếu xuống (ABCD) là tam giác MCP'.



$S_{CMP'} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}\left(S_{AMP'} + S_{BCM} + S_{CDP'}\right)$

$= a^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{4}.\frac{3a}{4} + \frac{a}{4}.a + \frac{3a}{4}.a\right) = \frac{13a^2}{32}$

$S_{MNP} = \frac{MN^2\sqrt{3}}{4} = \frac{26a^2\sqrt{3}}{4.16}$

$\cos x = \frac{S_{CMP'}}{S_{MNP}} = \frac{13a^2}{32}.\frac{64}{26a^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow x = 54^0 45'$

§5. Khỏang cách .

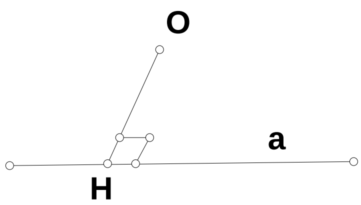
A . Tóm tắt giáo khoa .

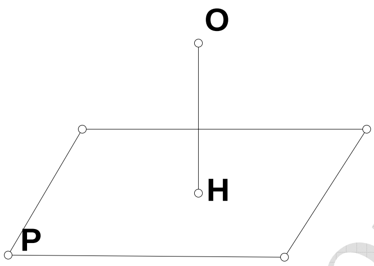
1 . Khỏang cách từ một điểm đến một đường thẳng là đọan vuông góc vẽ từ điểm đó đến đường thẳng .

$\boxed{d\,(O\,,\,a\,) = OH}$

2 . Khỏang cách từ một điểm đến một mặt phẳng là đọan vuông góc vẽ từ điểm đó đến mặt phẳng .

$\boxed{d\,(O\,,\,(P)\,) = OH}$



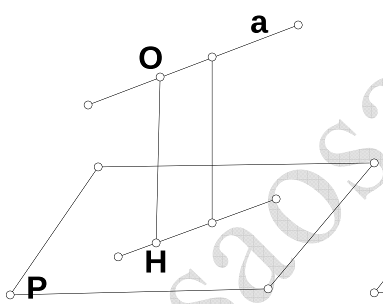


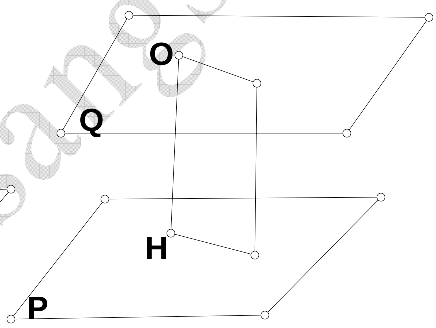
3 . Khỏang cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song là khỏang cách từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng đến mặt phẳng .

$\boxed{d\,(\,a\,,\,(P)\,) = d(\,O\,,\,(P)\,) = OH}$ (a song song với (P) , O thuộc a)

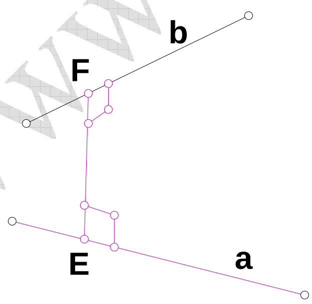
4 . Khỏng cách giữa hai mặt phẳng song song là khỏang cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia .

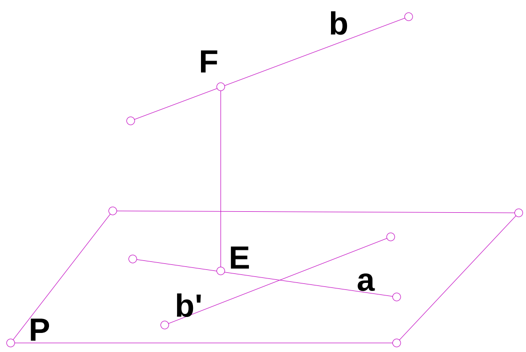
$\boxed{d\,((P)\,,\,(Q)\,) = d(\,O\,,\,(P)\,) = OH}$ ((P) song song với (Q) . O thuộc (Q)) .





5 . Khỏang cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là **đọan vuông góc chung** của hai đường thẳng đó .





$\boxed{d\,(\,a\,,\,b\,) = EF\ = d\,(\,b\,,\,(P)\,)\,}$ ((P) chứa a và song song với b)

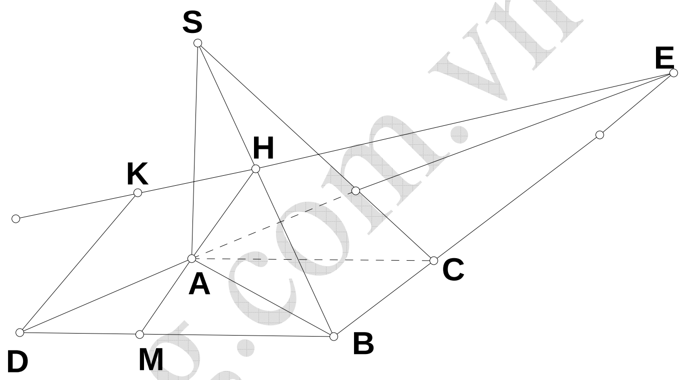
EF là đọan vuông góc chung của a và b .

- Đọan vuông góc chung của 2 đường thẳng là duy nhất và là đọan ngắn nhất nối 2 điểm lần lượt nằm trên 2 đường thẳng đó .

B . Giải tóan .

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABC có : tam giác ABC vuông tại B và BC = a ; AC = 2a ; SA vuông góc với (ABC) và SA = a .
a) Tính khoảng cách từ A đến (SBC) .
b) D là điểm sao cho ACBD là hình thang (AC song song với BD và BD = 3a) . Tính khoảng cách từ D đến (SBC) và khỏang cách từ C đến (SBD) .

Giải :



a) Ta có : BC vuông góc với (SAB) (vì BC vuông góc với AB và SA) .
Suy ra : BC vuông góc với AH là đường cao của tam giác SAB (H thuộc SB).
Do đố: AH vuông góc với (SBC) (vì AH vuông góc với BC và SB) .
Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SBC) .
Tam giác vuông SAB cho :

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + (4a^2 - a^2)} = 2a$$

$$AH.SB = AS.AB \Leftrightarrow AH = \frac{AS.AB}{SB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

b) AD cắt BC tại E . Vẽ DK vuông góc với (SBC) thì DK song song với AH và E , K , H thẳng hàng (là hình chiếu của EDA xuông (SBC)) . Ta có :

$$\frac{DK}{AH} = \frac{ED}{EA} = \frac{BD}{AC} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow DK = \frac{3}{2}AH = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

Vậy khoảng cách từ D đến (SBC) là DK = $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$

❖ Xác định và tính khoảng cách từ C đến (SBD) :

Vẽ AM vuông góc BD (M thuộc BD) rồi vẽ AL vuông góc SM (L thuộc SM) .
Chứng minh tương tự , AL là khỏang cách từ A đến (SBD) .
Mà AC song song với (SBD) (vì AC song song với BD) nên khỏang cách từ C đến (SBD) bằng AL .
Tam giác vuông SAM cho :

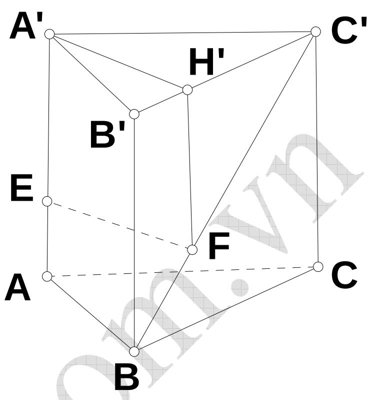
$$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2} (do\ \widehat{BAM} = 60^o)$$

$$AL.SM = AS.AM \Leftrightarrow AL = \frac{AS.AM}{SM} = \frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Ví dụ 2 : Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có tam giác ABC vuông tại A ; AB = a ; AC = 2a ; cạnh bên AA' = 2a .
a) Tính khỏang cách giữa BC' và AA'.
b) * Gọi EF là đọan vuông góc chung của AA'và BC', chỉ rõ cách vẽ E , F .

Giải :

a) Ta có : AA’ song song với (BB’C’C) (vì AA’ song song với BB’)
Suy ra : d (AA’, BC’) = d (AA’, (BB’C’C)) = d (A’, (BB’C’C) .
Vẽ A’H’ vuông góc với B’C’ (H’ thuôc B’C’) thì A’H’vuông góc với (BB’C’C) (vì A’H’ vuông góc với BB’và B’C’) .
Vậy A’H’ là khỏang cách từ A’ đến (BB’C’C) .
Tam giác vuông A’B’C’ cho :



$$B'C' = \sqrt{A'B'^2 + A'C'^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}.$$

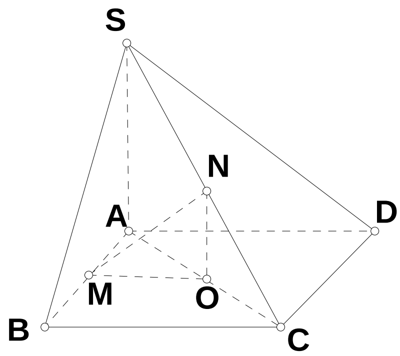
$$A'H'.B'C' = A'B'.A'C' \Leftrightarrow A'H' = \frac{A'B'.A'C'}{B'C'} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Vậy : d(AA’, BC’) = $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

b) Ta có : EF vuông góc với BB’ (vì EF vuông góc với AA’ và AA’ song song với BB’) .
Suy ra EF vuông góc với (BB’C’C) (vì EF vuông góc BB’ và BC’)
Ta cũng có : EF song song với (A’B’C’) (vì EF và (A’B’C’) cùng vuông góc với AA’)
Gọi F’ là hình chiếu của F xuông (A’B’C’) thì hình chiêu A’F’ của EF sẽ song song với EF .
Suy ra : A’F’vuông góc với (BB’C’C) nên trùng với A’H’ hay F’ trùng với H’ .
* Suy ra cách xác định E và F : Vẽ đường cao A’H’ của tam giác A’B’C’ . Vẽ đường thẳng d qua H’ vuông góc với (A’B’C’) (d song song với BB’) ; d cắt BC’ tại F ; vẽ FE song với A’H’ ta được vị trí của E

Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD có : đáy là hình vuông cạnh bằng a ; SA vuông góc với đáy và SA = a ; MN lần lượt là trung điểm của AB và SC . Chứng minh rằng MN là đọan vuông góc chung của AB và SC . Tính khỏang cách giữa AB và SC .

Giải :
Gọi O là tâm hình vuông , ta có : NO song song với SA (NO là đường trung bình của tam giác SAC) .
Suy ra : NO vuông góc với (ABCD) .
Do đó : MO là hình chiếu của MN xuống (ABCD) .
Mà MO vuông góc với AB (MO song song với BC) nên MN vuông góc với AB (định lý 3 đường vuông góc) .
Tam giác vuông MON cho :



$$MN^2 = MO^2 + ON^2 = (\frac{a}{2})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$$

Tam giác vuông SAM cho :

$$SM^2 = SA^2 + AM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

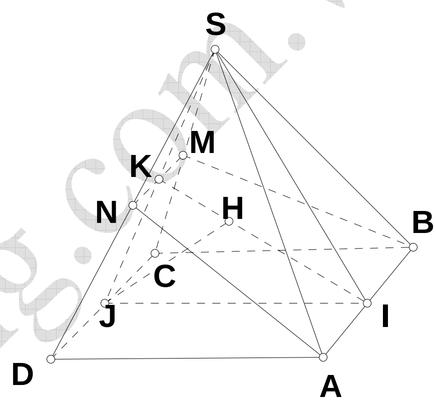
$$SN^2 = \left(\frac{SC}{2}\right)^2 = \frac{SA^2 + AC^2}{4} = \frac{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{3a^2}{4} .$$

Suy ra : $SM^2 = SN^2 + MN^2$. Vậy tam giác SMN vuông tại N . Do đó : MN là đọan vuông góc chung của AB và SC .

Khỏang cách giữa AB và SC chính là đọan MN và MN = $\sqrt{\dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 4* : Cho hình chóp đều S.ABCD có : cạnh đáy bằng 2a ; cạnh bên bằng $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. (P) là mặt phẳng chứa AB và khỏang cách giữa CD và (P) bằng a .
a) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (ABCD) .
b) Xác định thiết diện của (P) và hình chóp . Tính diện tích của thiết diện này .

Giải :
a) Xác định khỏang cách giữa CD và (P) :
Gọi I , J lần lượt là trung điểm của AB và CD , ta có : AB vuông góc với SI và AB vuông góc với IJ .
Suy ra : AB vuông góc với (SIJ) .
Vẽ JH vuông góc với giao tuyến Ix của (P) và (SIJ) (H thuộc Ix) thì JH vuông góc với (P) (vì (P) vuông góc với (SIJ)) .
Vậy JH = a là khỏang cách từ J đến (P) cũng là khỏang cách giữa CD và (P) .
Ta cũng có : IJ vuông góc với AB ; HI cũng vuông góc với AB (HI trong(P) ; IJ trong (ABCD)) .
Do đó : $\widehat{JIH} = 30^o$ là góc của 2 mặt phẳng (P) và (ABCD)
(tam giác IJH có JH = a ; LJ = AD = 2a nên là nửa tam giác đều)



b) CD song song với (P) (vì CD song song vớiAB) nên (P) cắt (SCD) theo giao tuyến MN song song với CD .
Tam giác vuông SIA cho :
$SI^2 = SA^2 - IA^2 = (a\sqrt{5})^2 - a^2 = 4a^2 \Leftrightarrow SI = 2a$
Mà SI = SJ ; IJ = 2a nên SIJ là tam giác đều .
Suy ra : góc SIJ bằng 60^o nên IH là phân giác của góc SIJ nên IH cũng là trung tuyến , đường cao của tam giác SIJ .
Do đó : IH qua trung điểm K của SJ và MN qua trung điểm này nên là đường trung bình của tam giác SCD . Vậy MN = a .
Để ý rằng đường cao IK của tam giác SIJ cũng là đường cao của hình thang ABMN nên
IK = $\frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Vậy diện tích của thiết diện là :

$$S_{ABMN} = \frac{AB + MN}{2}.IK = \frac{a + 2a}{2}.a\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

C . Bài tập rèn luyện .
3.28 . Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a . Chứng minh rằng AB vuông góc với CD và tính khỏang cách giữa AB và CD .

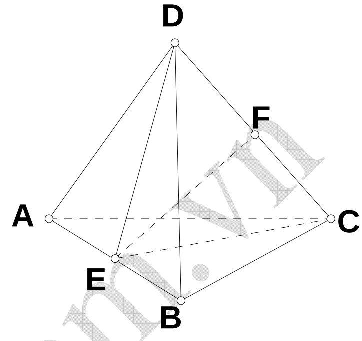
3.29 . Cho hình chóp S.ABCD có : đáy là hình vuông cạnh bàng 2a ; SA vuông góc với đáy và SA = 3a .
a) Tính khỏang cách từ C đến (SBD) .
b) G là trọng tâm tam giác SAB và (P) là mặt phẳng qua G và song song với (SBD) . Tính khỏang giữa 2 mặt phẳng (P) và (SBD) .

3.30 . Cho hình chóp đều S.ABCD có : cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a .
a) Tính khỏang cách giữa AB và SC .
b)* Gọi EF là đọan vuông góc chung của AB và SC , xác định rõ vị trí của E , F .

3.31 . Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc với AD và BC (AB = a ; BC = b ; AD = c) . Góc của AD và BC bằng 60^o .
a) Tính các cạnh chưa biết của tứ diện và tính khỏang cách giữa AB và CD .
b)* Gọi EF là đọan vuông góc chung của AB và CD . Xác định các điểm E , F .

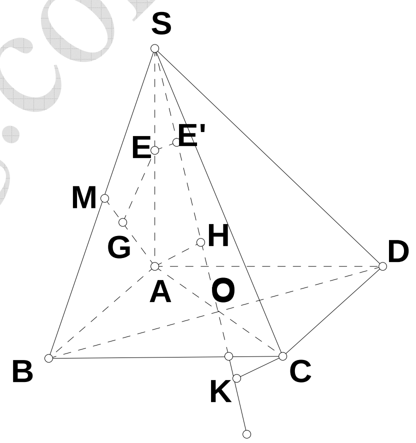
D . Hướng dẫn – Đáp số .
3.28 . Gọi E , F lần lượt là trung điểm của AB và CD , ta có :
AB vuông góc với (DEC) (vì AB vuông góc vói ED, EC) .
Suy ra : AB vuông góc với CD .
Ta lại có: ED = EC nên EF vuông góc với CD . Vậy EF là dọan vuông góc chung của AB và CD .
$EF^2 = DE^2 – DF^2 = (AB^2 – AE^2) – DF^2$

$$= (a^2 - \frac{a^2}{4}) - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} \Leftrightarrow EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



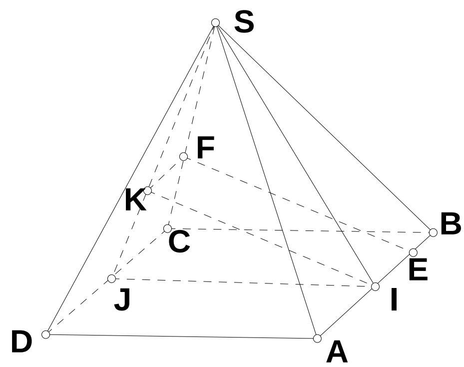
3.29 . a) BD vuông góc với (SAC) .
Vẽ AH , CK vuông góc với SO (H , K thuộc SO) thì AH = CK là khỏang cách từ A , C đến (SBD) .
Tam giác vuông SAO cho :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{2a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{3a\sqrt{22}}{11}$$



b) (P) cắt (SAB) theo GE song song với SB (E thuộc SA) . Vẽ EE’ vuông góc với SO (E’ thuộc SO) thì EE’ là khỏang cách từ E đến (SBD) cũng là khỏang cách giữa 2 mặt phẳng (P) và (SBD) .

$$\frac{EE'}{AH} = \frac{SE}{SA} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow EE' = \frac{1}{3}AH = \frac{a\sqrt{22}}{11}$$

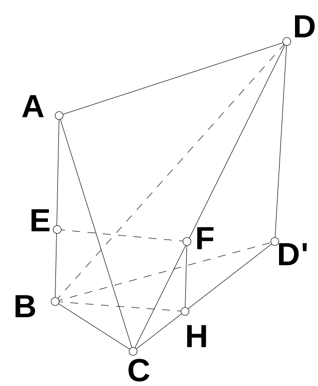


3.30 . a) Gọi I , J lần lượt là trung điểm của AB và CD , ta có : AB vuông góc với (SIJ) . Vẽ IK vuông góc với SJ thì IK vuông góc với (SCD) (K thuộc SJ) .
IK = d (I , (SCD)) = d (AB , SC) . Ta cũng có :

$$SI = SJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$IK.SJ = SO.IJ \Leftrightarrow IK = \frac{SO.IJ}{SJ} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

b) EF vuông góc với (SCD)
EF song song với (SIJ) nên hình chiếu của EF xuống (SIJ) sẽ song song với EF . Mà hình chiếu của E xuống (SIJ) là I nên hình chiếu của F xuông (SIJ) sẽ là K . Suy ra cách xác định E , F :
Qua K vẽ d song song với CD (d vuông góc với (SIJ)) ;
d cắt SC tại F .
Vẽ FE song song với IK (E thuộc AB) thì EF là đường vuông góc chung của AB và SC .



3.31 . Vẽ BD’ song song và bằng AD thì : góc CBD’ bằng 60^0 ; DD’ vuông góc với (BCD')

$$a)\ AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$CD'^2 = BC^2 + BD'^2 - 2BC.BD'\cos 60^o$$

$$= b^2 + c^2 - bc$$

$CD^2 = CD'^2 + DD'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - bc$.

d (AB , CD) = d (AB , (CDD')) = d (B , (CDD')) = BH với BH vuông góc với CD' và H thuộc CD' .

BH . CD' = BC . BD' sin60^o (= $2S_{BCD'}$) => BH = $\dfrac{bc\sqrt{3}}{2\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}$

b) Lý luận tương tự bài 3 , ta xác định được E , F : vẽ HF song song AB (F thuộc CD) ; vẽ FE song song BH (E thuộc AB) . EF là đọan vuông góc chung của AB và CD .

TRẮC NGHIỆM CUỐI CHƯƠNG 3

A. Câu hỏi .

1 . Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' ; O là tâm của mặt bên BCC'B' . Nếu ta có :
$\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AA'}$ thì x bằng :
a) 0,5 b) – 1 c) 1 d) một đáp số khác .

2 . Cho tứ diện ABCD , G là trọng tâm của tam giác BCD và I là trung điểm của BG . Nếu ta có :
$\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$ thì (x + y + z) bằng :
a) 1 b) 2 c) 3 d) một đáp số khác .

3 . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' , cạnh bằng a . G là trọng tâm tam giác A'BC . Thế thì ($3AG^2$) bằng :
a) a^2 b) $2a^2$ c) $4a^2$ d) một đáp số khác .

4 . Cho tứ diện ABCD và điểm M định bởi : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$. Điểm M thuộc mặt phẳng (BCD) khi và chỉ khi x bằng :
a) 1 b) 4 c) – 4 d) một đáp số khác .

5 . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'cạnh bằng a ; I là trung điểm BC và M là điểm định bởi : $\overrightarrow{A'M} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'D}$. Nếu 2 đường thẳng AI và A'M vuông góc thì x , y thỏa hệ thức nào dưới đây ?
a) 2x + y = 0 b) x + 2y = 0 c) 2x – y = 0 d) x – 2y = 0

6 . Cho tứ diện ABCD có : AB = AC = BD = a ; tam giác BCD vuông tại B . Nếu góc của AC và BD bằng 60^o thì góc của AB và BD bằng bao nhiêu độ ?
a) 30^o b) 60^o c) 90^o d) một đáp số khác .

7 . Cho hình chóp S.ABC có : SA vuông góc với (ABC) ; AB = x ; AC = x + 1 ; BC = x+2
(cùng một đơn vị chiều dài) . AB vuông góc với (SAC) khi và chỉ khi x bằng :
a) 2 b) 3 c) 4 d) một đáp số khác .

8 . Cho tứ diện ABCD có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} \neq 0$. Câu nào dưới đây đúng ?
a) AC và BD vuông góc
b) AD và BC vuông góc
c) AB và CD vuông góc
d) không có cặp cạnh tứ diện nào vuông góc

9 . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Trong các đường thẳng dưới đây , đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (A'BD) ?
a) AD b) AD' c) AB' d) AC'

10 . Cho hình chóp S.ABC có : Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc . Chân đường cao của hình chóp nằm ở đâu ?
a) trên đường thẳng BC
b) trên đường thẳng AC
c) trên đường thẳng AB
d) miền trong tam giác ABC

11 . Cho tứ diện ABCD có : hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (BCD) . Hệ thức nào dưới đây luôn luôn đúng ?
a) $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$
b) $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2$
c) $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$
d) $BC^2 + BD^2 = CD^2$.

12 . Một hình chóp tứ giác đều có : cạnh đáy bằng a ; cạnh bên bằng b ; đường cao của hình chóp bằng h . Hệ thức nào giữa a , b , h dưới đây đúng ?
a) $b^2 = 2h^2 + a^2$ b) $2b^2 = 2h^2 + a^2$ c) $b^2 = h^2 + 2a^2$ d) $b^2 = h^2 + a^2$

13 .Cho hình chóp S.ABC có : ABC là tam giác vuông tại A ; SA = SB = SC = 3a ; đường cao hình chóp bằng a . Cạnh lớn nhất của tam giác ABC gần bằng giá trị nào dưới đây nhất ?
a) 2,8a b) 5,2a c) 5,4a d) 5,6a

14 . Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có : ABCD là hình vuông ; đường chéo AC'= 20cm ; AC' tạo với đáy (ABCD) một góc bằng 30^o . Diện tích hình vuông ABCD bằng :
a) $75cm^2$ b) $100cm^2$ c) $125cm^2$ d) một đáp số khác .

15 . Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có mặt bên tạo với đáy một góc bằng 30^0. Nếu diện tích của một mặt bên hình chóp bằng $30cm^2$ thì diện tích đáy gần bằng giá trị nào dưới đây nhất ?
a) $26cm^2$ b) $72cm^2$ c) $75cm^2$ d) $78cm^2$

16 . Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có : ABC là tam giác đều cạnh bằng a ; tam giác A'AB cũng là tam giác đều ; 2 mặt phẳng (ABC) và (AA'B'B) vu6ng góc . Khỏang cách giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') gần bằng giá trị nào dưới đây nhất ?
a) 0,5a b) 0,75a c) 0,85a d) 0,90a

17 . Hình chóp S.ABCD có : ABCD là hình vuông cạnh bằng 2a ; SA vuông góc với (ABCD) và SA = x ; M , N lần lượt là trung điểm của AB và SC . Nếu MN là đọan vuông góc chung của AB và SC thì x bằng :
a) 0,5a b) a c) 1,5a d) một đáp số khác

18 . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' . Trong 4 mặt phẳng dưới đây , mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng (A'BD) ?
a) (A'B'CD) b) (C'BD) c) (A'C'B) d) (A'C'CA)

19 . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' và M là trung điểm của AA' . Góc giữa 2 mặt phẳng (ABCD) và (MBD) gần bằng góc nào dưới đây nhất ?

a) 35^o b) 42^o c) 50^o d) 60^o

20 . Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C'. M, N , P lần lượt là trung điểm của AA' , BB' , CC'. Nếu diện tích của các tam giác ABC , A'B'C' lần lượt bằng $36cm^2$, $16cm^2$ thì diện tích của tam giác MNP bằng :
a) $25cm^2$ b) $26cm^2$ c) $27cm^2$ d) một đáp số khác

21 . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' , cạnh bằng a . Khỏang cách giữa 2 đường thẳng AD' và A'B' gần bằng gía trị nào dưới đây nhất ?
a) 0,68a b) 0,70a c) 0,72a d) 0,73a

22 . Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD , cạnh đáy bằng a , diện tích một mặt bên bằng $0,75a^2$. Góc của mặt bên tạo với đáy gần bằng góc nào dưới đây nhất ?
a) $70^0 30'$ b) 71^0 c) $71^0 30'$ d) 72^0

23 . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D', cạnh bằng a , M, N , P lần lượt là trung điểm của BC , CC' , A'D'. Biết rằng diện tích tam giác MNP bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ thì góc giữa 2 mặt phẳng (MNP) và (ABCD) gần bằng góc nào dưới đây nhất ?
a) 50^0 b) 52^0 c) 54^0 d) 56^0

24 . Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a . M , N lần lượt là trung điểm của AC và CC'. Hình chiếu của tam giác BMN xuống mặt phẳng (BCC'B') có diện tích bằng bao nhiêu ?
a) $\frac{a^2}{8}$ $b)\frac{3a^2}{16}$ $c)\frac{3a^2}{8}$ d) một đáp số khác

25 . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' , cạnh bằng a . M , N , P lần lượt là trung điểm của AB , AD , DD' . Biết rằng góc giữa 2 mặt phẳng (MNP) và (ABCD) có cosin bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$, diện tích của tam giác MNP bằng bao nhiêu ?
$a)\frac{a^2}{4}$ $b)\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $c)\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ d) một đáp số khác .

B . Đáp án .

1a	2b	3b	4c	5a	6b	7b	8c	9d	10c
11a	12b	13d	14d	15d	16c	17b	18d	19a	20a
21b	22a	23c	24b	25d					

C . Hướng dẫn .

1(a) . $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}\right)\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

2(b) . $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right);\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Vậy :(x + y + z) = 2

$$3(b).\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$AG^2 = \overrightarrow{AG}^2 = \frac{1}{9}\left(AA'^2 + 4AB^2 + AD^2\right)(do\ \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0)$$

$$= \frac{1}{9}\left(a^2 + 4a^2 + a^2\right) = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow 3AG^2 = 2a^2$$

4(c) . Điểm M thuộc (BCD) khi 3 vectơ $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ đồng phẳng hay :

$\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC} + n\overrightarrow{BD}$. Theo hệ thức xác định M , ta có :

$$\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = x\overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) + 3\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}\right) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BD} + (-x-4)\overrightarrow{BA}$$

Vậy M thuộc (BCD) khi – x – 4 = 0 hay x = -- 4 .

$$5(a).\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{A'M} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'D} = x\overrightarrow{AB} + y(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'D'})$$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{A'M} = xa^2 + \frac{1}{2}ya^2\ (do\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{A'D'} = 0; \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{A'D'} = AB^2 = a^2)$$

$$AI \perp A'M \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{A'M} = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

6(b) Gọi x là góc của 2 vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$

Ta lại có :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}\,(do\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 0)$$

$$\cos x = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{AC.BD} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}}{AC.BD} = \frac{a.a\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})}{a.a} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(hay - \frac{1}{2})$$

Vậy góc của 2 đường thẳng AB và BD bằng 60^o .(vì x = 60^0 hay x = 120^0)

7(b) . AB vuông góc với SA nên AB vuông góc với (SAC) khi và chỉ khi AB vuông góc với AC hay $AC^2 + AB^2 = BC^2$ hay $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$. Suy ra :
$x^2 - 2x - 3 = 0$. Vậy x = 3 (vì x = AB > 0)

8(c) . $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

Vậy : AB vuông góc với CD .

9(d) .AD’ là hình chiếu của AC’ xuống (ADD’A’) , AD’ vuông góc với A’D nên AC’ vuông góc với A’D . Tương tự AC’ vuông góc với A’B . Vậy AC’ vuông góc với (A’BD).

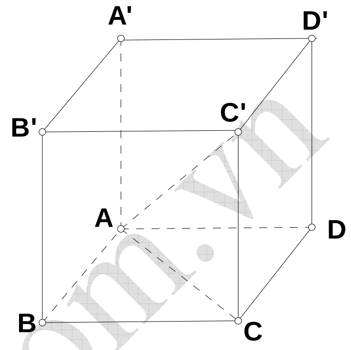
10(c) . Vẽ SH vuông góc với AB (H thuộc AB) thì SH vuông góc với (ABC) (vì (SAB) vuông góc với (ABC)) . Vậy SH là đương cao của hình chóp . Do đó chân đường cao cúa hình chóp thuộc đường thẳng AB .

11(a) . AB vuông góc với (BCD) (giao tuyến của 2 mặt phẳng cùng vuông góc với (BCD) Do đó : $AC^2 - BC^2 = AB^2 = AD^2 - BD^2$ hay : $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

12(b) . Gọi O là tâm hình vuông đáy ABCD và S là đỉnh hình chóp , Tam giác vuông SOA cho : $SO^2 = SA^2 - OA^2 \Leftrightarrow h^2 = b^2 - (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 \Leftrightarrow 2b^2 = 2h^2 + a^2$

13(d) . Vẽ đường cao SH của hình chóp : SH vuông góc với (ABC) . Ta có : HA = HB = HC (các tam giác vuông SHA , SHB , SHC bằng nhau) nên H là tâm đường tròn ngọai tiếp tam giác ABC , nghĩa là H là trung điểm của BC . Mà BC là cạnh lớn nhất và

$BC = 2HB = 2\sqrt{SB^2 - SH^2} = 2\sqrt{9a^2 - a^2} = 4a\sqrt{2} \simeq 5,65a$



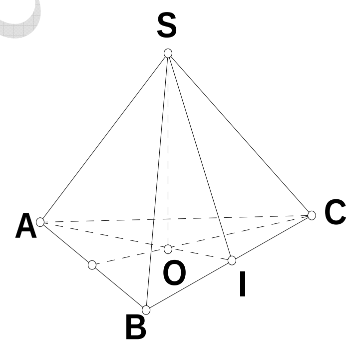
14(d) . AC là hình chiếu của AC' xuống mặt phẳng đáy (ABCD) nên góc C'AC là góc tạo bởi AC' và đáy (ABCD) :

$\widehat{C'AC} = 30^o$

$AC = AC'\cos 30^o = 20.\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

$AB = AC.\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{6}$

$S_{ABCD} = AB^2 = 150cm^2$

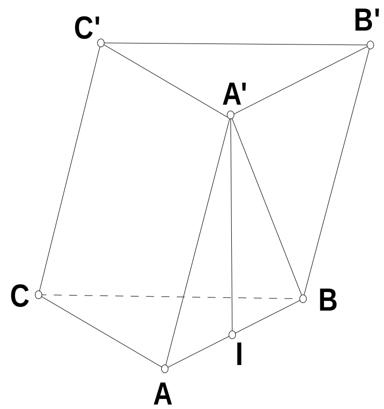


15(d) . Gọi I là trung điểm của BC , ta có :
SI vuông góc với BC ; AI vuông góc với BC (O thuộc AI) . Góc SIO là góc của mặt bên tạo với đáy .

$\widehat{SIO} = 30^o$

$S_{OBC} = S_{SBC}\cos 30^0 = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

$S_{ABC} = 3S_{OBC} = 45\sqrt{3}cm^2 \simeq 77,9cm^2$



16(c). VẽA'I vuông góc vớiAB (I thuộc AB) thì A'I vuông góc với (ABC) . Suy ra A'I là khỏang cách từ A' đến (ABC) , cũng là khỏang cách giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') .
A'I là đường cao của tam giác đều A'AB nên :

$A'I = \frac{a\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866a$ gần nhất với 0,85a .

17(b) . (xem hình ví dụ 3 , phần khỏang cách)
$MN^2 = MO^2 + ON^2 = a^2 + x^2$.
$SM^2 = SA^2 + AM^2 = 4x^2 + a^2$

$SN^2 = \left(\frac{SC}{2}\right)^2 = \frac{4x^2 + \left(2a\sqrt{2}\right)^2}{4} = x^2 + 2a^2$

$SM^2 = SN^2 + MN^2 \Leftrightarrow 4x^2 + a^2 = a^2 + x^2 + x^2 + 2a^2 \Leftrightarrow x = a$

18(d) Ta có: AC' vuông góc (A'BD) nên 2 mặt phẳng (A'C'CA) và (A'BD) vuông góc.

19(a). Ta có : MO và AO cùng vuông góc với BD (MO trong (MBD) AO trong (ABCD)) nên góc MOA là góc giữa 2 mặt phẳng (MBD) và (ABCD) .

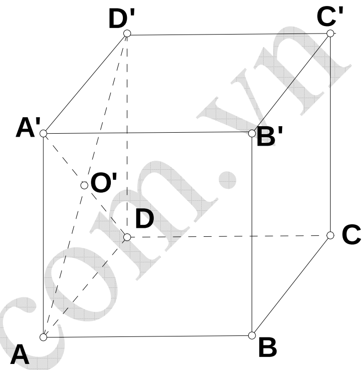
$\tan\widehat{MOA} = \frac{MA}{AO} = \frac{a}{a\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \widehat{MOA} = 35^o15'$ (gần bằng góc 35^o nhất)

20(a) . Gọi a , b , x lần lượt là diện tích của các tam giác ABC , A'B'C' , MNP và S là đỉnh hình chóp chứa hình chóp cụt ABC.A'B'C' , ta có:

$$\frac{x}{b}=\left(\frac{SM}{SA'}\right)^2=\left(\frac{SA+SA'}{2SA'}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{SA}{SA'}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{x}{b}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{36}+\sqrt{16}\right)=5\Leftrightarrow x=25cm^2$$

(do tỉ số diện tích của 2 tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng) .



21(b) .Ta có : A'O'vừa vuông góc với AD' và A'B' nên là đọan vuông góc chung của AD' và A'B'.

$$A'O'=\frac{a\sqrt{2}}{2}\simeq 0,707a$$

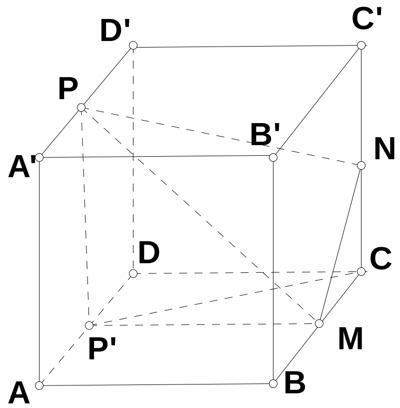
Ta còn có thể nhận định rằng :

d (AD', A'B') = d(A'B', (ABC'D')) = A'O'

22(a) . Hình chiếu của một mặt bên xuống mặt đáy là một tam giác bằng một phần tư hình vuông . Gọi x là góc hợp bởi mặt bên và đáy , ta có :

$$\cos x=\frac{\frac{1}{4}S_D}{S_{MB}}=\frac{0,25a^2}{0,75a^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow x\simeq 70^0 31'$$ (theo định lý về diện tích chiếu) .

23(c) . Tam giác MNP có hình chiếu xuống mặt phẳng (ABCD) là tam giác MCP'.



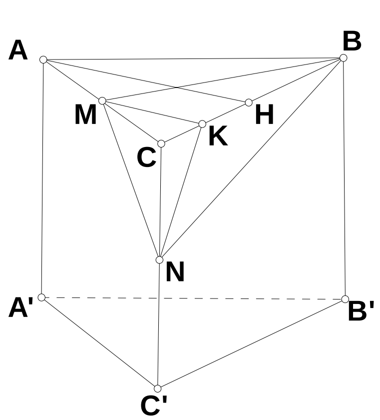
$$S_{MCP'}=\frac{1}{2}MP'.MC=\frac{1}{2}a.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}$$

$$\cos x=\frac{S_{MCP'}}{S_{MNP}}=\frac{a^2}{4}:\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x\simeq 54^0 45'$$

(x là góc tạo bởi (MNP) và (ABCD))

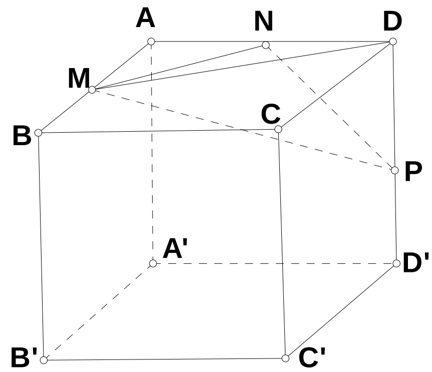
24 (b) . Vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC) thì AH vuông góc với (BCC'B') (vì AH vuông góc với BC và BB') . Vè MK vuông góc với BC (K thuộc BC) thì MK vuông góc với (BCC'B') : K là hình chiếu của M xuống (BCC'B')

.Vậy hình chiếu của tam giác BMN xuống mặt phẳng (BCC'B') là tam giác BNK .



$$S_{BNK}=\frac{1}{2}NC.BK=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{3a}{4}=\frac{3a^2}{16}$$

25(d) .Tam giác MNP có hình chiếu xuống mặt phẳng (ABCD) là tam giác DMN .



$$S_{DMN} = \frac{1}{2}.MA.DN = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$$

$$S_{MNP}.\frac{\sqrt{3}}{3} = S_{DMN} \Rightarrow S_{MNP} = S_{DMN}.\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$