

ÔN THI ĐẠI HỌC

NHỊ THỨC NEWTON

I. Phương trình và bất phương trình chứa hệ số tổ hợp và chỉnh hợp

Bài 1. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện :

- | | |
|-------------------------|--|
| 1) $A_n^3 = 20n$ | 5) $3A_n^2 + 42 = A_{2n}^2$ |
| 2) $A_n^5 = 18A_n^4$ | 6) $C_n^4 + C_n^5 = 3C_{n+1}^6$ |
| 3) $A_n^2 - A_n^1 = 3$ | 7) $A_n^2 \cdot C_n^{n-1} + P_3 \cdot A_4^2 = 120$ |
| 4) $C_{2n}^3 = 20C_n^2$ | 8) $A_{n+1}^3 + C_{n+1}^{n-1} = 14(n+1)$ |

Bài 2. Giải phương trình :

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4} \cdot P_3} = 210$ | 2) $\frac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^{n-4}} = \frac{24}{23}$ |
|--|--|

Bài 3. Tìm nguyên dương n sao cho : $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$

Bài 4. Tìm nguyên dương n sao cho

- | | |
|--|--|
| 1) $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$ | 3) $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$ |
| 2) $C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + \dots + C_{4n+2}^{2n} = 256$ | 4) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$ (KD08) |

Bài 5. Giải phương trình :

- | | |
|--|--|
| 1) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$ | 2) $A_x^3 + 2C_x^2 = 16x$ |
| 3) $A_x^3 + 5A_x^2 = 2(x+15)$ | 4) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$ |
| 5) $6C_x^2 + 6C_x^3 = 7x^2 - 7x$ | 6) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$ |
| 7) $A_x^3 + 3A_x^2 = \frac{1}{2}P_{x+1}$ | 8) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$ |
| 9) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$ | 10) $C_{14}^x + C_{14}^{x+2} = 2C_{14}^{x+1}$ |
| 11) $P_x \cdot A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$ | 12) $A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159$ |

Bài 6. Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 7$). Tìm n , biết rằng số tập con gồm 7 phần tử của A bằng hai lần số tập con gồm 3 phần tử của A .

Bài 7. Tìm $n, k \in N$ sao cho $P_{n+5} = 15 \cdot A_{n+4}^k \cdot P_{n+4-k}$

Bài 8. Giải phương trình :

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$ | 2) $C_4^x + C_5^x = C_6^x + \frac{2}{P_x}$ |
|--|--|

Bài 9. Tìm k sao cho các số $C_7^k, C_7^{k+1}, C_7^{k+2}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Bài 10. Tìm n sao cho

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{P_{n-1}}$ | 2) $C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > \frac{5}{2}A_n^2$ |
|--|---|

Bài 11. Giải bất phương trình :

- | | |
|---|---|
| 1) $A_x^3 + 5A_x^2 \leq 21x$ | 2) $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 < A_{x-1}^2$ |
| 3) $A_x^3 + 2C_x^{x-2} \leq 9$ | 4) $C_{x+1}^{x-2} - C_{x+1}^{x-1} \leq 100$ |
| 5) $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4}A_{x-2}^2 < 0$ | 6) $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10$ |

Bài 12. Giải bất phương trình : $(n!) \cdot C_n^n \cdot C_{2n}^n \cdot C_{3n}^n \leq 720$ ($n \in Z^+$)

Bài 13. Giải bất phương trình : $C_{2x}^2 + C_{2x}^4 + \dots + C_{2x}^{2x} \geq 2^{2003} - 1$.

Bài 14. Giải bất phương trình : $\frac{P_{n+5}}{(n-k)!} \leq 60 A_{n+3}^{k+2}$ (với hai ẩn là $k, n \in N$)

Bài 15. Giải hệ phương trình :

$$1) \begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90 \\ A_x^y + 2C_x^y = 40 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 \end{cases}$$

Bài 16. Giải hệ phương trình :

$$1) C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2$$

$$2) A_x^{y-1} : A_{x-1}^y : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-1}) = 21 : 60 : 10$$

Bài 17. Tìm x và y sao cho $(A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10 : 2 : 1$

II. Tìm hệ số của một lũy thừa trong khai triển nhị thức

Bài 18. Tìm số hạng trong khai triển

$$1) \left(x + \frac{1}{2x}\right)^{10} \text{ chứa } x^4$$

$$2) \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12} \text{ chứa } x^4$$

$$3) \left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6 \text{ chứa } x^3$$

$$4) \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} \text{ chứa } x^{31}$$

$$5) \left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5 \text{ chứa } x^{10}$$

$$6) \left(\frac{1}{x^3} + x^6\right)^{10} \text{ chứa } x^{24}$$

$$7) \left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} \text{ chứa } x^{26}$$

$$8) \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{20} \text{ chứa } x^{10}$$

Bài 19. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

$$1) \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{10} \text{ chứa } x^5$$

$$2) \left(\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{14} \text{ chứa } x^6$$

Bài 20. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển

$$1) \left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$$

$$2) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{20}$$

$$3) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{10}$$

$$4) \left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18} \text{ (CĐ_KA08)}$$

$$5) \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 \text{ (ĐH_KD04)}$$

$$6) \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{16}$$

$$7) \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$$

$$8) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$$

Bài 21. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $P(x) = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

Bài 22. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^{21}$ chứa a và b có số mũ bằng nhau.

Bài 23. Tìm n biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31.

Bài 24. Tính A_n^2 , biết rằng số hạng số thứ 5 trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ không phụ thuộc vào x .

Bài 25. Tìm n và x trong khai triển $\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{x}{3}}\right)^n$ biết số hạng thứ tư bằng $20n$ và $C_n^3 = 5C_n^1$.

Bài 26. Tìm n biết rằng ba hệ số của ba số hạng đầu trong khai triển $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Bài 27. Cho biết ba số hạng đầu của khai triển $(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})^n$ có các hệ số là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Tìm số hạng thứ 5 của khai triển đó.

Bài 28. Trong khai triển $(x + \frac{1}{x})^n$, biết hiệu hệ số của số hạng thứ 3 và thứ 2 là 35. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển trên.

Bài 29. Trong khai triển $(x^2 + \frac{1}{x^3})^n$, biết hệ số của số hạng thứ ba lớn hơn hệ số của số hạng thứ hai là 35 đơn vị. Tìm n và số hạng không chứa x trong khai triển trên.

Bài 30. Tổng các hệ số trong khai triển của $(\frac{1}{x} + x^3)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) bằng 1024. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 .

Bài 31. Số hạng thứ 3 trong khai triển $(2x + \frac{1}{x^2})^n$ không chứa x . Với giá trị nào của x thì số hạng đó bằng số hạng thứ 2 trong khai triển $(1 + x^3)^{30}$.

Bài 32. Trong khai triển $\left(\sqrt{\frac{1}{x^{\lg x+1}}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, biết số hạng thứ tư bằng 200. Tìm x ?

Bài 33. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

- 1) $(x^3 - \frac{1}{x^2})^n$ chứa x^{10} , biết $C_n^4 = 13C_n^2$.
- 2) $(x^3 + \frac{1}{x^2})^n$ chứa x^2 , biết $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$.
- 3) $(x^2 + 2)^n$ chứa x^8 , biết $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$.
- 4) $(\frac{1}{x^3} + \sqrt{5})^n$ không chứa x , biết $C_{n+5}^3 - C_{n+4}^3 = 8(n+3)$.
- 5) $(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5})^n$ chứa x^8 , biết $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$. (ĐH_A_03)
- 6) $(2-3x)^{2n}$ chứa x^7 , biết $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$
- 7) $(x^2 + \frac{2}{x})^n$ chứa x^3 , biết $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{23}$
- 8) $(\frac{1}{x^4} + x^7)^n$ chứa x^{26} , biết $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$. (ĐH_A_06)

Bài 34. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển

- 1) $(x^2 + \frac{1}{x^3})^n$ biết $C_n^1 + C_n^3 = 13n$
- 2) $(x\sqrt[3]{x} + x^{\frac{28}{15}})^n$ biết $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.
- 3) $(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})^n$ biết $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$.

Bài 35. Khai triển $P(x) = (x+2)(x+1)^{10}$ thành dạng $P(x) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \dots + a_{10}x + a_{11}$. Hãy tìm hệ số a_5 trong khai triển.

Bài 36. Biết n là số tập con khác rỗng của tập A có 4 phần tử và biết :

$$(x+1)^n(x-2) = a_0x^{n+1} + a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_nx + a_{n+1}. \text{ Hãy tính } a_9.$$

Bài 37. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển sau thành đa thức :

$$f(x) = (2x+1)^4 + (2x+1)^5 + (2x+1)^6 + (2x+1)^7$$

Bài 38. Cho $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \dots + 15(1+x)^{15}$.

Khai triển và rút gọn, ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$. Tính hệ số a_9 .

Bài 39. Khai triển $P(x) = (1-2x)^n$ thành dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Tìm hệ số của x^5 , biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$

Bài 40. Giả sử n là số nguyên dương và $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots + a_nx^n$. Biết rằng tồn tại k nguyên ($1 \leq k \leq n-1$) sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$. Hãy tính n .

Bài 41. Cho $A = (x - \frac{1}{x^2})^{20} + (x^3 - \frac{1}{x})^{10}$.

Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm bao nhiêu số hạng.

Bài 42. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

III. Tính tổng và chứng minh đẳng thức bằng khai triển Newton

Bài 43. Cho n là số nguyên dương. Hãy tính :

1) $S_1 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \dots + 2^5C_5^5$

5) $S_6 = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n$

2) $S_2 = C_5^0 - 2C_5^1 + 2^2C_5^2 - \dots - 2^5C_5^5$

6) $S_9 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^nC_n^n$

3) $S_4 = C_{20}^1 - C_{20}^2 + C_{20}^3 - \dots + C_{20}^{19}$

7) $S_8 = 3C_n^1 + 3^3C_n^3 + \dots + 3^{n-1}C_n^{n-1}$ (n chẵn)

4) $S_5 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n$

8) $S_{10} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n}$

Bài 44. Khai triển $(1+x)^7$, từ đó tính :

1) $T = C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + \dots + C_7^6 + C_7^7$

2) $S = C_7^0 + C_7^2 + C_7^4 + C_7^6$

Bài 45. Tính các tổng sau :

1) $S_1 = C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$

2) $S_2 = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$

Bài 46. Cho $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{100}x^{100}$.

1) Tính hệ số a_{97}

2) Tính $T = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$

Bài 47. Tính tổng các hệ số của các số hạng trong khai triển :

1) $P(x) = (x + \frac{2}{\sqrt{x}})^{12}$

2) $P(x) = (1-x + \frac{1}{x^2})^{10}$

Bài 48. Biết khai triển $P(x) = (1-2x)^{18} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{18}x^{18}$.

Tính tổng $S = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{18}|$

Bài 49. Khai triển $(3x-1)^{16}$, từ đó chứng minh : $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - \dots - 3C_{16}^{15} + C_{16}^{16} = 2^{16}$

Bài 50. Khai triển $(1+x)^{2n}$, từ đó :

1) Chứng minh : $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$

2) Tính : $S = C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \dots + C_{2n}^{2n}$

Bài 51. Rút gọn : $A = 3^n [C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{3^n}C_n^n]$

Bài 52. Chứng minh : $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + C_{2n}^4 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1} (2^{2n} + 1)$ (ĐH_HHải_00)

Bài 53. Chứng minh : $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n = 4^n C_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - \dots + (-1)^nC_n^n$

Bài 54. Chứng minh : $C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^m C_n^{k-m} = C_{m+n}^k$ với $m \leq k \leq n$.

Bài 55. Tính tổng $S = \frac{A_n^0}{0!} + \frac{A_n^1}{1!} + \frac{A_n^2}{2!} + \dots + \frac{A_n^n}{n!}$

Bài 56. Tính tổng $S = \frac{1C_n^0}{A_1^1} + \frac{2C_n^1}{A_2^1} + \frac{3C_n^2}{A_3^1} + \dots + \frac{(n+1)C_n^n}{A_{n+1}^1}$. Biết rằng $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 221$.

Bài 57. Tính tổng :

- 1) $S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + kC_n^k + nC_n^n$ 2) $S = 2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + 6C_{2n}^6 + \dots + 2nC_{2n}^{2n}$
 3) $S = C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 + \dots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$ 4) $S = \frac{1}{1.2}C_n^0 + \frac{1}{2.3}C_n^1 + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}C_n^n$

Bài 58. Cho số nguyên dương $n > 4$ và $S = \frac{C_{2n}^0}{1} + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1}$. Biết rằng $S = \frac{4096}{13}$, hãy tính các giá trị của n .

Bài 59. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn : $2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \frac{2}{5}C_{2n}^4 + \dots + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{8192}{13}$.

Bài 60. Xét $(2-x)^{12} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$. Tính tổng $S = a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + 13a_{12}$.

IV. Tính tổng và chứng minh đẳng thức bằng công thức tổ hợp và chỉnh hợp

Bài 61. Chứng minh :

- 1) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ 3) $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+2}^k$
 2) $C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = C_{n+2}^k$ 4) $C_5^0C_n^k + C_5^1C_n^{k-1} + C_5^2C_n^{k-2} + \dots + C_n^{k-5} = C_{n+5}^k$

Bài 62. Rút gọn biểu thức : $S = C_{50}^0 - C_{50}^1 + C_{50}^2 - C_{50}^3 + \dots - C_{50}^{35}$.

Bài 63. Rút gọn biểu thức : $S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k$ với $k \leq n, n > 1$.

Bài 64. Chứng minh : $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}$

Bài 65. Cho $k, n \in N$ thỏa $n \geq k \geq 2$. Chứng minh : $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

Bài 66. Cho $k, n \in N$ thỏa $n \geq k > 0$. Chứng minh : $\frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{1}{C_n^k}$.

Bài 67. Cho hai số nguyên dương n và m thỏa mãn $0 < n < m$. Chứng minh :

- 1) $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$ 2) $C_n^m = C_{n-m}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \dots + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$

Bài 68. Tính giá trị của $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng : $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$.

Bài 69. Chứng minh :

- 1) $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n+1}$ (ĐH_KA07)
 2) $C_n^0 - \frac{2^3}{4}C_n^1 + \frac{2^5}{6}C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+2}C_n^n = \frac{1 - (-3)^{n+1}}{4(n+1)}$

V. Dùng Số Phức

Bài 70. Khai triển và viết dạng lượng giác của số phức $(1+i)^{19}$ từ đó tính tổng :

- 1) $S_1 = C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - \dots + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$
 2) $S_2 = C_{19}^1 - C_{19}^3 + C_{19}^5 - \dots + C_{19}^{17} - C_{19}^{19}$

Bài 71. Viết dạng lượng giác của số phức $(1+i)^{2009}$, từ đó tính tổng :

$$S = C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - \dots + C_{2009}^{2008}$$

Bài 72. Chứng minh :

- 1) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots + C_n^n = 2^{\frac{n}{2}}$ với n là bội của 8.
 2) $C_{2n}^0 - 3C_{2n}^2 + 9C_{2n}^4 - 27C_{2n}^6 + \dots + (-3)^n C_{2n}^{2n} = 2^{2n} \cos \frac{2n\pi}{3}$

VI. Dừng Đạo Hàm, Tích Phân**Bài 73.** Chứng minh :

1) $nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} = n.2^{n-1}$

2) $C_n^1 - 2.C_n^2 + 3.C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} n.C_n^n = 0$

3) $C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + \dots + n.C_n^{n-1} = (n+2).2^{n-1}$

4) $2^{n-1}.C_n^1 + 2.2^{n-2}.C_n^2 + 3.2^{n-3}.C_n^3 + \dots + n.C_n^n = n.3^{n-1}$ (ĐH_KTQuốcDân_HN_01)

5) $C_n^1.3^{n-1} + 2C_n^2.3^{n-2} + 3C_n^3.3^{n-3} + \dots + n.C_n^n = n.4^{n-1}$ (ĐH_SP_TPHCM_01)

6) $n.2^{n-1}.C_n^0 + (n-1)2^{n-2}.3C_n^1 + \dots + 3^{n-1}.C_n^{n-1} = n.5^{n-1}$

7) $1.3^0.5^{n-1}.C_n^{n-1} + 2.3^1.5^{n-2}.C_n^{n-2} + \dots + n.3^{n-1}.C_n^0 = n.8^{n-1}$

Bài 74. Chứng minh :

1) $C_{2000}^0 + 2C_{2000}^1 + 3C_{2000}^2 + \dots + 2001C_{2000}^{2000} = 2002.2^{1999}$

2) $C_{2005}^0 + 2C_{2005}^1 + 3C_{2005}^2 + \dots + 2006C_{2005}^{2005} = 2^{2004}.2007$

Bài 75. Tính tích phân $I = \int_0^1 (1+x)^{2000} dx$.

Từ đó chứng minh : $\frac{1}{2}C_{2000}^1 + \frac{1}{3}C_{2000}^2 + \frac{1}{4}C_{2000}^3 + \dots + \frac{1}{2001}C_{2000}^{2000} = \frac{2^{2001} - 2002}{2001}$

Bài 76. Tính tích phân $I = \int_0^1 (1+x)^n dx$.

Từ đó tính tổng : $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$

Bài 77. Tính tích phân $I = \int_0^2 (1-x)^n dx$.

Từ đó chứng minh : $2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$

Bài 78. Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1-x)^{19} dx$.

Từ đó tính tổng : $S = \frac{1}{2}C_{19}^0 - \frac{1}{3}C_{19}^1 + \frac{1}{4}C_{19}^2 - \dots + \frac{1}{20}C_{19}^{18} - \frac{1}{21}C_{19}^{19}$

Bài 79. Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$.

Từ đó chứng minh : $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$

Bài 80. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx$.

Từ đó chứng minh : $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{3(n+1)}$

VII. Luyện Tập**Bài 81.** Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

1) $[1 + x^2(1+x)]^7$ chứa x^6

2) $[1 + x^2(1-x)]^8$ chứa x^8 (ĐH_KA04)

3) $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$ chứa x^3

4) $(1 + x)(2 + x)^8$ chứa x^3

5) $(1 + \frac{1}{x} + x^3)^{10}$ chứa x^2

6) $(1 + x^2 + \frac{1}{x^3})^8$ không chứa x

Bài 82. Biết khai triển $(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$. Hãy tính a_{10} .

Bài 83. Tổng các hệ số trong khai triển của $(1 + x)^{3n}$ bằng 64. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $(2nx + \frac{1}{2nx^2})^{3n}$.

Bài 84. Cho tập hợp A có 4n phần tử. Tính số tập con của A, mà mỗi tập con đó gồm một số lẻ phần tử và có không quá một nửa số phần tử của A.

Bài 85. Khai triển và rút gọn biểu thức $1 - x + 2(1 - x)^2 + 3(1 - x)^3 + \dots + n(1 - x)^n$, thu được đa thức : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Tính hệ số a_8 .

Biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn: $\frac{1}{C_n^2} + \frac{7}{C_n^3} = \frac{1}{n}$.

Bài 86. Khai triển $P(x) = (x + 2)^{15}$ thành dạng $P(x) = a_0x^{15} + a_1x^{14} + a_2x^{13} + \dots + a_{15}$.
 Tìm $\max \{a_0, a_1, \dots, a_{15}\}$

Bài 87. Khai triển $P(x) = (1 + 2x)^{12}$ thành dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$.
 Tìm $\max \{a_0, a_1, \dots, a_{12}\}$

Bài 88. Khai triển $P(x) = (\frac{x}{2} + \frac{2}{3})^{14}$ thành dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$.
 Tìm $\max \{a_0, a_1, \dots, a_{10}\}$

Bài 89. Khai triển $P(x) = (\frac{1}{3} + \frac{2x}{3})^{10}$ thành dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$.
 Tìm $\max \{a_0, a_1, \dots, a_{10}\}$

Bài 90. Khai triển $P(x) = (1 + 2x)^n$ thành dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ với a_0, a_1, \dots, a_n thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm $\max \{a_0, a_1, \dots, a_{10}\}$ (A_08)

Bài 91. Tìm số hạng nguyên trong khai triển $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$.

Bài 92. Trong khai triển $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5})^{124}$ có bao nhiêu số hạng nguyên.

Bài 93. Trong khai triển $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{60}$ có bao nhiêu số hạng hữu tỉ.

Bài 94. Tìm số hạng chứa x và y với số mũ nguyên dương trong $(\sqrt[3]{xy^2} + \sqrt{xy})^{12}$

Bài 95. Tìm ba số liên tiếp lập thành một cấp số cộng trong dãy số $C_{23}^0, C_{23}^1, \dots, C_{23}^{23}$.

Bài 96. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $(x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}})^n$, biết n thỏa mãn hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 4C_n^3 \geq 5C_{n-1}^3 \\ 3C_{n-1}^4 - 18.C_{n-1}^3 + 22A_{n-2}^2 = 0 \end{cases}$$

Bài 97. Chứng minh :

1) $C_{2002}^0 C_{2002}^{2001} + C_{2002}^1 C_{2001}^{2000} + \dots + C_{2002}^k C_{2002-k}^{2001-k} + \dots + C_{2002}^{2001} C_1^0 = 1001.2^{2002}$

2) $C_{2006}^0 C_{2006}^{2005} + C_{2006}^1 C_{2005}^{2004} + \dots + C_{2006}^k C_{2006-k}^{2005-k} + \dots + C_{2006}^{2005} C_1^0 = 1003.2^{2006}$

Bài 98. Chứng minh : $1^2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + 3^2.C_n^3 + \dots + n^2.C_n^n = n(n+1).2^{n-2}$

Bài 99. Chứng minh : $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

Bài 100. Xét khai triển $(1+x)^{2009}$, từ đó hãy tính tổng sau : $S = C_{2009}^0 + \frac{1}{3} C_{2009}^4 + \dots + \frac{1}{2009} C_{2009}^{2008}$.

Bài 101. Tìm n nguyên dương biết : $\frac{C_n^1}{2} - \frac{2C_n^2}{2^2} + \frac{3C_n^3}{2^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{nC_n^n}{2^n} = \frac{1}{32}$.

Bài 102. Chứng minh :

- 1) $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + \dots + n.(n-1)nC_n^n = n(n-1)2^{n-2}$
- 2) $n(n-1)2^{n-2} = n(n-1)C_n^0 + (n-1)(n-2)C_n^1 + \dots + 2C_n^{n-2}$
- 3) $1^2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + 3^2.C_n^3 + \dots + n^2.C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$
- 4) $n.4^{n-1}C_n^0 - (n-1).4^{n-2}C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + n.2^{n-1}C_n^n$

Bài 103. Chứng minh :

- 1) $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$
- 2) $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$
- 3) $\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \frac{1}{5}C_n^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$
- 4) $2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$

Bài 104. Tính tổng

- 1) $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 6C_n^2 + \dots + (n^2 - n + 2^n)C_n^n$
- 2) $S = \frac{3^2}{2}C_{100}^1 + \frac{3^4}{4}C_{100}^3 + \frac{3^6}{6}C_{100}^5 + \dots + \frac{3^{100}}{100}C_{100}^{99}$
- 3) $S = C_{2009}^1 + 2^2C_{2009}^2 + 3^2C_{2009}^3 + \dots + 2009^2C_{2009}^{2009}$

Bài 105. Cho n nguyên dương cố định và $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$. Chứng minh rằng :

Nếu C_n^k đạt giá trị lớn nhất tại k_0 thì k_0 thỏa $\frac{n-1}{2} \leq k_0 \leq \frac{n+1}{2}$.

Bài 106. Chứng minh :

- 1) $C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n \leq (C_{2n}^n)^2$ với $0 \leq k \leq n$
- 2) $C_{2001}^k + C_{2001}^{k+1} \leq C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001}$ với $0 \leq k \leq 2000$

Bài 107. Cho $n \geq 1, n \in N$. Chứng minh rằng : $\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} + \dots + \sqrt{C_n^n} \leq \sqrt{n(2^n - 1)}$.

Bài 108. Cho $n \geq 2, n \in N$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_{n+1}^2} + \dots + \frac{1}{C_{n+k}^{k+1}} < \frac{1}{n-2}$.

Bài 109. Cho $n \geq 2, n \in N$. Chứng minh rằng : $C_n^0 C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$.