Trần Thành Minh – Phan Lưu Biên - Trần Quang Nghĩa

Phương Pháp Tọa Độ

Trong Mặt Phẳng

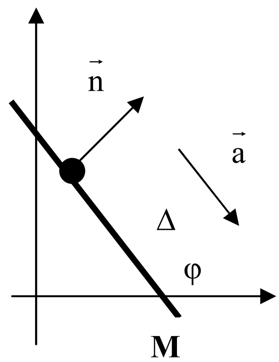
www. saosangsong.com.vn

§ 1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

A. Tóm tắt giáo khoa .

1. Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ vuông góc đường thẳng Δ gọi là *vectơ pháp tuyến* (VTPT) của Δ .

- Phương trình của đường thẳng qua $M_0(x_0 ; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (a ; b)$ là : $a(x - x_0) + b(y - y_0)$
- *Phương trình tổng quát* của đường thẳng có dạng : $ax + by + c = 0$ trong đó $\vec{n} = (a ; b)$ là một VTPT .



- Δ vuông góc Ox ⇔ $\Delta : ax + c = 0$
  Δ vuông góc Oy ⇔ $\Delta : by + c = 0$
  Δ qua gốc O ⇔ $\Delta : ax + by = 0$
  Δ qua A(a ; 0) và B(0 ; b) ⇔ $\Delta : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (*Phương trình theo đọan chắn)*
- Phương trình đường thẳng có hệ số góc là k : $y = kx + m$ với $k = \tan\varphi$, φ là góc hợp bởi tia Mt của Δ ở phía trên Ox và tia Mx

2. Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$
   Tính $D = a_1 b_2 - a_2 b_1$, $D_x = b_1 c_2 - b_2 c_1$, $D_y = c_1 a_2 - c_2 a_1$

- Δ_1 , Δ_2 cắt nhau ⇔ $D \neq 0$. Khi đó tọa độ giao điểm là :

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$$

- $\Delta_1 // \Delta_2$ ⇔ $\begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases}$
- Δ_1 , Δ_2 trùng nhau ⇔ $D = D_x = D_y = 0$

Ghi chú : Nếu $a_2, b_2 , c_2 \neq 0$ thì :

- Δ_1 , Δ_2 cắt nhau ⇔ ⇔ $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$
- Δ_1 , Δ_2 trùng nhau $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

B. Giải tóan .

Dạng tóan 1 : Lập phương trình tổng quát của đường thẳng : Cần nhớ :

- Phương trình đường thẳng qua điểm M(x_0 ; y_0) và vuông góc $\vec{n} = (a; b)$ là : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$
- Phương trình đường thẳng qua điểm M(x_0 ; y_0) và cùng phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ là : $\dfrac{x - x_o}{a_1} = \dfrac{y - y_o}{a_2}$
- Phương trình đường thẳng song song đường thẳng : ax + by + c = 0 có dạng : ax + by + m = 0 với $m \neq c$.
- Phương trình đường thẳng qua M(x_0 ; y_0) :
  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)
- Phương trình đường thẳng qua A(a ; 0) và B(0 ; b) là : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC có A(3 ; 2) , B(1 ; 1) và C(- 1; 4) . Viết phương trình tổng quát của :

a) đường cao AH và đường thẳng BC .
b) trung trực của AB
c) đường trung bình ứng với AC
d) đường phân giác trong của góc A .

Giải a) Đường cao AH qua A(3 ; 2) và vuông góc $\overrightarrow{BC}$ = (- 2 ; 3) có phương trình là : - 2(x – 3) + 3(y – 2) = 0 ⇔ - 2x + 3y = 0

Đường thẳng BC là tập hợp những điểm M(x ; y) sao cho $\overrightarrow{BM} = (x - 1; y - 1)$ cùng phương $\overrightarrow{BC} = (-2;3)$ nên có phương trình là : $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{3}$ (điều kiện cùng phương của hai vectơ) ⇔ 3(x – 1) + 2(y – 1) = 0 ⇔ 3x + 2y – 5 = 0

b) Trung trực AB qua trung điểm I(2 ; 3/2) của AB và vuông góc $\overrightarrow{AB}$ = (- 2 ; - 1) nên có phương trình tổng quát là : 2(x – 2) + 1.(y – 3/2) = 0 ⇔ 4x + 2y – 11 = 0

c) Đường trung bình ứng với AB qua trung điểm K(0 ; 5/2) và cùng phương $\overrightarrow{AB}$ = (- 2 ; - 1) . Đường này là tập hợp những điểm M(x ; y) sao cho
$\overrightarrow{KM} = (x - 0; y - \frac{5}{2})$ cùng phương $\overrightarrow{AB} = (-2;-1)$ nên có phương trình là :

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y - 5/2}{1}$$ (điều kiện cùng phương của hai vectơ)

$\Leftrightarrow$ $x - 2y + 5 = 0$

d) Gọi D(x ; y) là tọa độ của chân đường phân giác trong . Theo tính chất của phân giác : $\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC}$

Mà AB = $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, do đó :

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{2DC} = -\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x) = x + 1 \\ 2(1-y) = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 2 \end{cases}$$

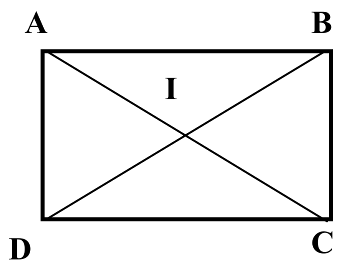
Vậy D = (1/3 ; 2) . Vì $y_A = y_D = 2$ nên phương trình AD là y = 2 .

Ví dụ 2 : Cho hình chữ nhật ABCD **,** phương trình của AB : 2x – y + 5 = 0 **,** đường thẳng AD qua gốc tọa độ O , và tâm hình chữ nhật là I(4 ; 5) . Viết phương trình các cạnh còn lại

Giải Vì AD vuông góc với AB nên VTPT $\vec{n}$ = (2 ; - 1) của AB là VTCP của AD

Phương trình AD qua O là : $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} \Leftrightarrow x + 2y = 0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$



Giải hệ này ta được : x = - 2 ; y = 1 => A(- 2 ; 1)
I là trung điểm của AC , suy ra :

$$\begin{cases} x_A + x_C = 2x_I = 8 \\ y_A + y_C = 2y_I = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 10 \\ y_C = 9 \end{cases} : C(10 ; 9)$$

Đường thẳng CD song song với AB nên $\vec{n}$ = (2 ; - 1)

cũng là VTPT của CD . CD qua C(10 ; 9) , do đó phương trình CD là :

$$2(x - 10) - (y - 9) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 11 = 0$$

Đường thẳng BC qua C và song song AD , do đó phương trình BC là :

$\Leftrightarrow (x - 10) + 2(y - 9) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 28 = 0$

Ví dụ 3 : Cho đường thẳng d : $3x - 4y - 12 = 0$.

a) Tính diện tích của tam giác mà d hợp với hai trục tọa độ .

b) Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng của d qua trục Ox .

c) Viết phương trình đường thẳng d" đối xứng của d qua điểm I(- 1 ; 1) .

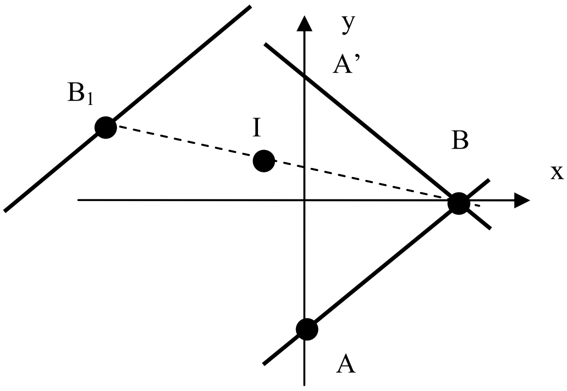
Giải : a) Cho x = 0 : $-4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = -3$ => d cắt Oy tai A(0 ; - 3)

Cho y = 0 : $3x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ => d cắt Ox tai B(4 ; 0)

Diện tích tam giác vuông OAB là : ½ .OA.OB = ½ . 3. 4 = 6 đvdt

b) Gọi A'(0 ; 3) là đối xứng của A qua Ox . Ta có d' qua A' và B , cùng phương $\overrightarrow{A'B} = (4;-3)$ có phương trình là : $\frac{x-0}{4} = \frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow$

$3x + 4y - 12 = 0$



c) Gọi B_1 là đối xứng của B qua I => B_1 (- 6 ; 2) . Đường thẳng d" qua B_1 và song song với d , có phương trình :

$$3(x + 6) - 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 26 = 0$$

***Ví dụ 4 :** Viết phương trình đường thẳng qua M(3 ; 2) , cắt tia Ox tại A, tia Oy tại B sao cho :

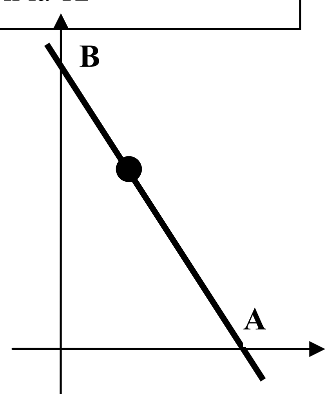
a) OA + OB = 12

b) hợp với hai trục một tam giác có diện tích là 12

Giải : Gọi A(a ; 0) và B(0 ; b) với a > 0 , b > 0 , phương trình đường thẳng cần tìm có dạng :

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Vì đường thẳng qua M(3 ; 2) nên :

$\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1$ (1)



a) OA + OB = 12 ⇔ a + b = 12 ⇔ a = 12 – b (2)

Thế (2) vào (1) : $\frac{3}{12-b}+\frac{2}{b}=1$

⇔ 3b + 2(12 – b) = (12 – b)b

⇔ b^2 – 11b + 24 = 0

⇔ b = 3 hay b = 8

- b = 3 : a = 9 , phương trình cần tìm : $\frac{x}{9}+\frac{y}{3}=1 <=> x+3y-9=0$
- b = 8 : a = 4 , phương trình cần tìm : $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1 <=> 2x+y-8=0$

b) Diện tích tam giác OAB là ½ OA.OB = ½ ab = 12 ⇔ a = 24/b (3)

Thế (3) vào (1) : $\frac{3b}{24}+\frac{2}{b}=1$ ⇔ b^2 + 16 = 8b

⇔ $(b – 4)^2$ = 0 ⇔ b = 4

Suy ra : a = 6 , phương trình cần tìm là : $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$ ⇔ 2x + 3y – 12 = 0

Dạng 3 : Tìm vị trí tương đối của hai đường thẳng .

Ví dụ 1 : Tìm vị trí tương đối của cac đường thẳng sau :

a) 9x – 6y – 1 = 0 , 6x + 4y – 5 = 0
b) 10x – 8y + 2/3 =0 ; 25x – 20y + 5/3 = 0

Giải a) Ta có : $\frac{9}{6}\neq\frac{-6}{4}$ nên hai đường thẳng cắt nhau .

b) Ta có : $\frac{10}{25}=\frac{-8}{-20}=\frac{2/3}{5/3}=\frac{2}{5}$ nên hai đường thẳng trùng nhau .

* **Ví dụ 2 :** Cho d : (m + 1)x – 2y + m + 1 = 0

d’ **:** mx - 3y + 1 = 0

a) Định m để hai đường thẳng cắt nhau . Tìm tọa độ giao điểm M.
b) Tìm m ∈ **Z** để tọa độ giao điểm là số nguyên .

Giải a) Tọa độ giao điểm M là nghiệm của hệ : $\begin{cases}(m+1)x-2y+m+1=0 & (1)\\ mx-3y+1=0 & (2)\end{cases}$

Hai đường thẳng cắt nhau ⇔ D = $\begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m & -3 \end{vmatrix} = -3(m+1)+2m=-m-3 \neq 0$

⇔ m ≠ - 3

Ta có : $D_x = \begin{vmatrix} -2 & m+1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2.1 + 3(m+1) = 3m + 1$

$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & m+1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m(m+1) - 1.(m+1) = m^2 - 1$

Tọa độ giao điểm M : $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-3m-1}{m+3} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-m^2+1}{m+3} \end{cases}$

b) Ta có : $x = \dfrac{-3(m+3)+8}{m+3} = -3 + \dfrac{8}{m+3}$

$y = -m + 3 - \dfrac{8}{m+3}$

Để x và y $\in$ **Z** thì 8 chia hết cho (m + 3)

⇔ $(m+3) \in \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4 ; \pm 8\}$

⇔ $m \in \{-2 ; -4 ; -1 ; -5 ; 1 ; -7 ; 5 ; -11\}$

Ví dụ 3 : Cho đường thẳng d : 2x + y - 13 = 0 và điểm A (1 ; 1)

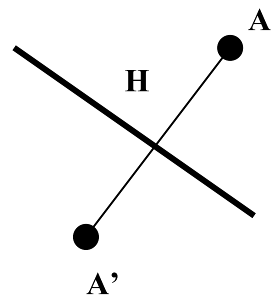
a) Viết phương trình đường thẳng d' qua A và vuông góc d .
b) Tìm tọa độ hình chiếu của A lên d và tọa độ điểm A' , đối xứng của A qua A .

Giải a) Đường thẳng d' vuông góc d nên VTPT $\vec{n} = (2 ; 1)$ của d là VTCP của d' . Suy ra phương trình của d' là :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$$

b) Tọa độ giao điểm H của d và d ' thỏa hệ :

$\begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$: H(5 ; 3) , là hình chiếu của A lên d..



H là trung điểm của AA' , suy ra :

$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 9 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 5 \end{cases}$: A'(9 ; 5)

.

C. Bài tập rèn luyện

3.1. Cho đường thẳng d : y = 2x – 4

a) Vẽ đường thẳng d . Xác định giao điểm A và B của d với Ox và Oy.Suy ra diện tích tam giác OAB và khoảng cách từ O tới d.

b) Viết phương trình đường thẳng d' song song với d , cắt Ox tại M , Oy tại N sao cho MN = 3 $\sqrt{5}$

3.2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d :

a) qua điểm A(1 ; - 2) và có hệ số góc là 3 .

b) qua B (- 5; 2) và cùng phương $\vec{a}$ = (2 ; - 5)

c) qua gốc O và vuông góc với đường thẳng : y = $\dfrac{2-3x}{4}$

d) qua I(4 ; 5) và hợp với 2 trục tọa độ một tam giác cân .

e) qua A(3 ; 5) và cách xa điểm H(1 ; 2) nhất.

3.3 . Chứng minh các tập hợp sau là các đường thẳng :

a) Tập hợp những điểm M mà khoảng cách đến trục hoành gấp đôi khoảng cách đến trục tung .

b) Tập hợp những điểm M thỏa $MA^2 + MB^2 = 2MO^2$ với A(2 ; 1) và B(1 ; - 2)

3. 4 . Cho tam giác ABC có A(4 ; 1) , B(1 ; 7) và C(- 1; 0) . Viết phương trình tổng quát của

a) Đường cao AH , đường thẳng BC .

b) Trung tuyến AM và trung trực của AB

c) Đường thẳng qua C và chia tam giác thành hai phần , phần chứa điểm A có diện tích gấp đối phần chứa điểm B .

3. 5. Cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, BC và CA là :

AB : x – 3 = 0

BC : 4x – 7y + 23 = 0

AC : 3x + 7y + 5 = 0

a) Tìm tọa độ A, B, C và diện tích tam giác .

b) Viết phương trình đường cao vẽ từ A và C . Suy ra tọa độ của trực tâm H

3. 6. Cho hai đường thẳng d : mx – y + m + 1 = 0 và d' : x – my + 2 = 0

a) Định m để hai đường thẳng cắt nhau . Tìm tọa độ giao điểm M , suy ra M di động trên một đường thẳng cố định **.**

b) Định m để d và d' và đường thẳng Δ : x + 2y – 2 = 0 đồng quy.

3. 7. Cho hai điểm A(5 ; - 2) và B(3 ; 4) . Viết phương trình của đường thẳng d qua điểm C(1 ; 1) sao cho A và B cách đều đường thẳng d .

3.8. Cho hình bình hành hai cạnh có phương trình 3x – y – 2 = 0 và x + y – 2 = 0 . Viết phương trình hai cạnh còn lại biết tâm hình bình hành là I(3 ; 1) .

*** 3. 9 .** Cho tam giác ABC có trung điểm của AB là I(1 ; 3) , trung điểm AC là J(- 3; 1) . Điểm A thuộc Oy và đường BC qua gốc tọa độ O . Tìm tọa độ điểm A , phương trình BC và đường cao vẽ từ B .

*** 3.10.** Cho điểm M(9 ; 4) . Viết phương trình đường thẳng qua M , cắt hai tia Ox và tia Oy tại A và B sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất .

* 3.**11.** Cho điểm M(3 ; 3) . Viết phương trình đường thẳng qua M , cắt Ox và Oy tại A và B sao cho tam giác MAB vuông tại M và AB qua điểm I(2 ; 1) .

D. Hướng dẫn hay đáp số :

3.1. a) A(2 ; 0) , B(0 ; - 4) ; S = 4 đvdt .

Ta có : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ => $OH = \frac{4}{\sqrt{5}}$

b) Phương trình d' có dạng : y = 2x + m , cắt Ox tại M(- m/2 ; 0) , cắt Oy tại N(0 ; m) . Ta có MN = $\sqrt{OM^2 + ON^2} = \frac{|m|\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$

Suy ra : m = ± 6 .

3.2 . a) y + 2 = 3(x – 1) ⇔ y = 3x – 5

b) $\frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{-5}$ <=> $5x + 2y + 21 = 0$

c) y = $\frac{4}{3}$x (hai đường thẳng vuông góc ⇔ tích hai hệ số góc là – 1)

d) Vì d hợp với Ox một góc 45^0 hay 135^0 nên đường thẳng có hệ số góc là tan 45^0 = 1 hay tạn^0 = - 1 , suy ra phương trình là : y = x + 1 ; y = - x + 9

e) Đường thẳng cần tìm qua A và vuông góc $\overrightarrow{AH} = (-2;-3)$.

3.3 . a) Gọi (x ; y) là tọa độ của M : |y| = 2|x| ⇔ y = 2x hay y = - 2x

b) $MO^2 = x^2 + y^2$, $MA^2 = (x – 2)^2 + (y – 1)^2$, $MB^2 = (x – 1)^2 + (y + 2)^2$.

Suy ra : 3x – y – 5 = 0

3. 4 . c) Đường thẳng cần tìm qua điểm D sao cho : $\overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{DB}$ ⇔ D = (2 ; 5)

3. 5. a) A(3 ; - 2) ; B(3 ; 5) ; C(- 4 ; 1) , S = ½ .AB . CH = 47/ 2 đvdt
b) AH : y = 1 , AK : 7x + 4y – 13 = 0 , H(9/7 ; 1)

3. 6 . a) D = 1 – $m^2 \neq 0$ ⇔ m ≠ ± 1 , tọa độ giao điểm : 3

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = -\dfrac{m+2}{m+1} = -1 - \dfrac{1}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$$ => x + y + 1 = 0 => M di động trên đường thẳng : x + y + 1 = 0

b) Thế tọa độ của M vào đường thẳng x + 2y – 2 = 0 , ta được : m = - 2/3

3. 7. d là đường thẳng qua C :

- và qua trung điểm I(4 ; 1) của AB
- hay cùng phương $\overrightarrow{AB} = (-2;6)$

3.8. Gọi AB : 3x – y – 2 = 0 và AD : x + y – 2 = 0 .

Giải hệ , ta được A = (1 ; 1) . Suy ra C = (5 ; 1) .

CD : 3x – y – 14 = 0 ; BC : x + y – 6 = 0

*** 3. 9 .** A = (0 ; a) => B(2 ; 6 – a) và C(- 6 ; 2 – a)

BC qua gốc O nên $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$ cùng phương ⇔ 2(2 – a) = (6 – a) (- 6)

⇔ a = 5 .

3. 10. Đặt A(a ; 0) và B(0 ; b) ,với a , b > 0 .Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Đường này qua I ⇔ $\frac{9}{a} + \frac{4}{b} = 1$

Áp dụng bđt Côsi cho hai số : $1 = \frac{9}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{9}{a}.\frac{4}{b}} = \frac{12}{\sqrt{ab}}$

=> $\sqrt{ab} \geq 12$ => $S_{OAB} = \frac{1}{2}ab \geq 72$

Vậy tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất là 72 khi $\frac{9}{a}=\frac{4}{b}=\frac{1}{2} <=> a=18\ ;b=8$

và PT đường thẳng cần tìm là : $\frac{x}{18}+\frac{y}{8}=1 <=> 4x+9y-72=0$

3.11. Đặt A(a ; 0) , B(0 ; b) , ta có : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(a-3)(-3)+(-3)(b-3)=0$

⇔ a + b = 6 (1)

Mặt khác phương trình đường thẳng AB : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

(AB) qua I(2 ; 1) ⇔ $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ ⇔ 2b + a = ab (2)

Thế (1) vào (2) : 2b + (6 – b) = (6 – b)b ⇔ $b^2 - 5b + 6 = 0$

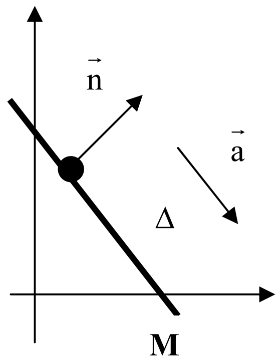
⇔ b = 2 hay b = 3 .

Suy ra : (a = 4 ; b = 2) hay (a = 3 ; b = 3)

§ 2. Phương trình tham số của đường thẳng

A. Tóm tắt giáo khoa

1. $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cùng phương với đường thẳng Δ gọi là *vecto chỉ phương* (VTCP) của Δ .



- *Phương trình tham số* của đường thẳng qua M_0 (x_0 ; y_0) và có VTCP $\vec{a}$ = (a_1 ; a_2) là : $\begin{cases} x = x_o + ta_1 \\ y = y_o + ta_2 \end{cases}$
- Phương trình chính tắc của đường thẳng qua M_0 (x_0 ; y_0) và có VTCP $\vec{a}$ = (a_1 ; a_2) là : $\frac{x-x_o}{a_1}=\frac{y-y_o}{a_2}$ ($a_1 \neq 0$ và $a_2 \neq 0$)

2. Nếu $\vec{n}$ = (a; b) là VTPT của Δ thì $\vec{a}$ = (b ; - a) hay (- b ; a) là một VTCP của Δ .

B. Giải toán.

Dạng toán 1 : Lập PT tham số . . . của đường thẳng

- Tìm một điểm M(x_0 ; y_0) và một VTCP (a_1 ; a_2) :
  - phương trình tham số là : $\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \end{cases}$
  - phương trình chính tắc là : $\dfrac{x - x_o}{a_1} = -\dfrac{y - y_0}{a_2}$ ($a_{1,2} \neq 0$)
  - phương trình tổng quát là : $a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0$
- Tìm một điểm M(x_0 ; y_0) và một VTPT (a ; b) => VTCP (b ; - a) . Áp dụng như trên .

Ví dụ : Cho A(1 ; 2) , B(3 ; - 4) , C(0 ; 6) . Viết PT tham số , chính tặc và tổng quát của :

a) đường thẳng BC .
b) đường cao BH
c) đường thẳng qua trọng tâm G của tam giác ABC và song song với d : 3x -7y = 0

Giải a) BC qua B(3 ; - 4) và có VTCP $\overrightarrow{BC} = (-3;10)$ nên có PTTS là :

$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -4 + 10t \end{cases}$ => PTCT là : $\dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y+4}{10}$

và PTTQ là : $10(x-3) + 3(y+4) = 0$ ⇔ 10x + 3y -18 = 0

b) Đường cao BH qua B(3 ; - 4) và vuông góc $\overrightarrow{AC}(-1;\ 4)$ nên có VTCP là (4 ; 1) .
Suy ra PTTS :

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -4 + t \end{cases}$$

PTCT : $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+4}{1}$

PTTQ : 1(x – 3) – 4(y + 4) = 0 ⇔ x – 4y – 19 = 0

c) Đường thẳng song song với d : 3x – 7y = 0 nên vuông góc VTPT $\overrightarrow{n_d}$ (3 ; - 7)

, suy ra VTCP là (7 ; 3) . Tọa độ trọng tâm G là : (4/3 ; 4/3) .

PTTS của đường thẳng cần tìm : $\begin{cases} x = 4/3 + 7t \\ y = 4/3 - 3t \end{cases}$

PTCT : $\dfrac{x-\frac{4}{3}}{7}=\dfrac{y-\frac{4}{3}}{3}$

PTTQ : 3(x – 4/3) – 7(y – 4/3) = 0 ⇔ $3x - 7y + \dfrac{16}{3} = 0$

Dạng toán 2 : Tìm điểm của đường thẳng

Tọa độ điểm M của đường thẳng cho bởi PTTS . Ứng với mỗi t , ta được một điểm của đường thẳng.
Bài toán thường đưa về việc giải một phương trình hay hệ phương trình mô tả tính chất của điểm ấy.

Ví dụ : Cho đường thẳng d : $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a) Tìm trên d điểm M cách điểm A(4 ; 0) một khoảng là 5 .
b) Biện luận theo m vị trí tương đối của d và d': (m + 1)x + my – 3m – 5 = 0

Giải : a) Tọa độ điểm M thuộc d cho bởi phương trình tham số của d : M = (3 – 2t ; 1 + 3t) . Ta có : $\overrightarrow{AM}$ = (-1 – 2t ; 1 + 3t) => $AM^2 = (1 + 2t)^2 + (1 + 3t)^2 = 13t^2 + 10t + 2$.
Ta có : $AM^2 = 25$ ⇔ $13t^2 + 10t + 2 = 25$
⇔ $13t^2 + 10t - 23 = 0$ ⇔ t = 1 hay t = - 23/13
⇔ M = (1 ; 4) hay M = (85/13; - 56/13)

b) Thế phương trình tham số của d vào phương trình của d' , ta được phương trình tính tham số t của giao điểm , nếu có :
(m + 1)(3 – 2t) + m(1 + 3t) – 3m – 5 = 0
⇔ (m – 2)t + m – 2 = 0 (1)

- m – 2 = 0 ⇔ m = 2 : (1) thỏa với mọi m ⇔ d và d' có vô số điểm chung ⇔ d , d' trùng nhau.
- m – 2 ≠ 0 ⇔ m ≠ 2 : (1) có ngh duy nhất ⇔ d và d' cắt nhau .

Ghi chú : Có thể biến đổi d về dạng tổng quát : 3x + 2y – 11 = 0 và biện luận theo hệ phương trình 2 ẩn .

C. Bài tập rèn luyện .

3.12 : Cho đường thẳng d có hương trình tham số : $x = 3 + \dfrac{2t}{3}$; $y = 2 - \dfrac{5t}{6}$ (1)

a) Tìm một VTCP của d có tọa độ nguyên và một điểm của d . Viết một phương trình tham số khác của d

b) Tìm trên d một điểm A có hoành độ gấp đôi tung độ .
c) Tìm trên d một điểm B cách gốc O một khoảng là $\sqrt{58}$.

3. 13 . Cho tam giác ABC có A(1 ; - 2) , B(0 ; 4) và C(6; 3) **.** Tìm một VTCP, suy ra phương trình tham số và chính tắc của các đường thẳng sau :

a) Đường thẳng d qua A và có một VTCP là (3 ; - 2)
b) Đường trung trực của BC .
c) Đường thẳng AB
d) Đường trung bình của tam giác ABC ứng với cạnh BC .
e) Đường phân giác ngoài của của góc B

3.14 . Cho tam giác ABC với BC : 2x – y – 4 = 0 , đường cao BH : x + y - 2 = 0 , đường cao CK : x + 3 y + 5 = 0 . Viết phương trình các cạnh tam giác .

3.15. Cho hình chữ nhật ABCD có AB : 2x – y – 1 = 0 , AD qua M(3 ; 1) và tâm I có tọa độ là (- 1 ; ½) . Viết phương trình các cạnh AD , BC và CD .

***3. 16.** Cho tam giác ABC có trung điểm M của AB có tọa độ (- ½ ; 0) , đường cao CH với H(- 1; 1) , đường cao BK với K(1 ; 3) và biết B có hoành độ dương .

a) Viết phương trình AB .

b) Tìm tọa độ B, A và C

3.17 . Chọn câu đúng : Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường trung trực của AB với A(3 ; - 5) và B(5 ; 9) :

$a)\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + 7t \end{cases}$ $\quad$ $b)\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 7 + 7t \end{cases}$

$c)\begin{cases} x = 4 + 7t \\ y = 2 + t \end{cases}$ $\quad$ $d)\begin{cases} x = 4 + 7t \\ y = 2 - t \end{cases}$

3.18 . Chọn câu đúng : Phương trình nào dưới đây là phương trình tổng quát của đường thẳng qua A(4 ; - 5) và vuông góc với đường thẳng d : $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ là :

a) 3x + 2y – 2 = 0 $\quad$ b) 3x - 2y – 12 = 0

c) 2x – 3y – 23 = 0 $\quad$ d) 4x + 5y – 22 = 0

3.19 . Chọn câu đúng : Đường thẳng d : $\frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{2}$ xác định với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích là :

a) 64/5 b) 128/5 c) 16/ 5 d) đáp số khác

3.20 . Chọn câu đúng : Gọi d là đường thẳng qua M(4 ; - 3) và song song với đường thẳng y = 2x – 4 .

a) d qua điểm (10 ; 10) b) trên d không có điểm nào có tọa độ là số nguyên chẵn .

c) Cả (a) và (b) đều sai d) Cả (a) và (b) đều đúng .

3.21 . Chọn câu đúng : Cho tam giác ABC cân tại A(1 ; - 2) , trọng tâm là G(5 ; 6) . Phương trình đường thẳng BC là :

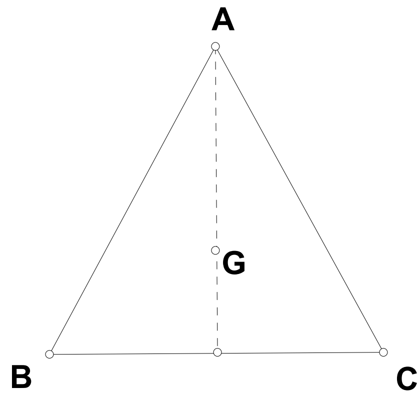
a) x + 2y + 27 = 0 b) x + 2y – 27 = 0

c) x – 2y – 27 = 0 d) 2x – y – 4 = 0

C. Hướng dẫn hay đáp Số.

3.12. a) $\vec{a}$ = (4 ; - 5) , x = 3 + 4t , y = 2 – 5t b) Giải $x_A = 2y_A$ ⇔ t = 1/14

c) Dùng phương trình tham số của d : $(3 + 4t)^2 + (2 - 5t)^2 = 58$



3.13. a) x = 1 + 3t , y = - 2 – 2t b) x = 3 + 8t , y = 7/2 + 3t

c) Trung trực vuông góc $\overrightarrow{BC} = (6;-1)$ nên cùng phương vectơ (1 ; 6) . Suy ra phương trình tham số là : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 + 6t \end{cases}$

3.14 . BC và BH cắt nhau tại B(2 ; 0) . BC và CK cắt nhau tại C(1 ; - 2) . Phương trình AB qua B và vuông góc CK là : 3(x – 2) – 1(y – 0) = 0 . . .

3.15. AD qua M và vuông góc AB có phương trình : 1.(x – 3) + 2(y – 1) = 0 ⇔ x + 2y – 5 = 0 .

Suy ra tọa độ A = AB ∩ AD = (7/5 ; 9/5) . Suy ra tọa độ C , đối xứng của A qua I

. . .

***3. 16.** a) Phương trình AB qua H và M : 2x + y + 1 = 0
b) B thuộc AB ⇔ B = (b ; - 2b – 1)
A đối xứng của B qua M ⇔ A = (- 1 – b ; 2b + 1) .
Mặt khác $\overrightarrow{AK}\overrightarrow{BK} = 0$ ⇔ $5b^2 + 5b - 10 = 0$ ⇔ b = 1 .
Vậy B = (1 ; - 3) , A = (- 2 ; 3) , C = (3 ; 3)

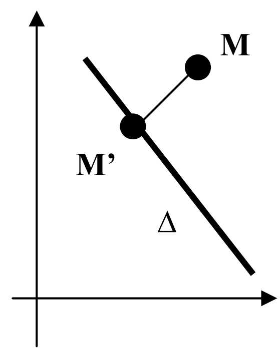
3.17 . (d) 3.18. (a) 3.19. (a) 3.20. (b) 3.21. (b)

§ 3. Khoảng cách và góc

A. Tóm tắt giáo khoa .

I. 1. Khỏang cách từ M (x_0 ; y_0) đến đường thẳng Δ : ax + by + c = 0 là :

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



*2. Gọi M' là hình chiếu của M lên Δ , thế thì :

$$\overrightarrow{M'M} = k.\vec{n} = \frac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2}$$. Suy ra :

- M, N nằm cùng phía đối với Δ
  ⇔ $(ax_M + by_M + c)((ax_N + by_N + c) > 0$
- M, N nằm khác phía đối với Δ
  ⇔ $(ax_M + by_M + c)((ax_N + by_N + c) < 0$

* 3. Phương trình hai đường phân giác của góc hợp bởi hai đường thẳng :
$a_1x + b_1 y + c_1 = 0$ và $a_2x + b_2 y + c_2 = 0$ là :

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$$

II. Góc (không tù) tạo Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2 : $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ là :

$$\cos(\Delta_1 ; \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$\Delta_1 \perp \Delta_2$ ⇔ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

B. Giải toán .

Dạng 1 : Tính khỏang cách và lập phương trình đường thẳng liên quan đến khỏang cách

Ví dụ 1 :

a) Tính khoảng cách từ điểm A(1 ; 3) đến đường thẳng d : 3x – 4y + 4 = 0

b) Tình bán kính đường tròn tâm O tiếp xúc đường thẳng d : 2x +y + 8 = 0

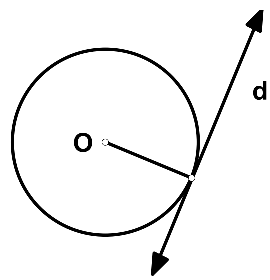
c) Tính khoảng cách từ điểm P(3 ; 12) đến đường thẳng : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song : d : 5x + 3y – 5 = 0 và d' : 5x + 3y + 8 = 0

Giải a) d(A, d) = $\dfrac{|3x_A - 4y_A + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|3.1 - 4.3 + 4|}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$

b) Bán kính đường tròn là khoảng cách từ O đến đường thẳng

d :R = d(O **,** d) **=** $\dfrac{|2.0 + 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

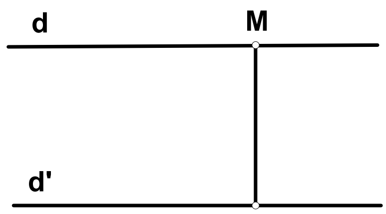


c) Ta viết phương trình dưới dạng tổng quát :

$\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-5}{-3} <=> -3(x-2) = y - 5$

⇔ 3x + y - 11 = 0

d(P, Δ) = $\dfrac{|3.3 + 12 - 11|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$



d) Chọn trên d : 5x + 3y - 5 = 0 điểm M (1; 0) , thế thì :

$$d(d\ ,\ d') = d(M, d) = \frac{|5.1 + .0 + 8|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

Ví dụ 2 :

a) Tìm trên trục hoành điểm cách đường thẳng : 2x + y – 7 = 0 một khoảng là $2\sqrt{5}$

b) Tìm trên đường thẳng d : x + y + 5 = 0 điểm cách đường thẳng d ' : 3x – 4y + 4 = 0 một khoảng là 2 .

c) Cho điểm M (m – 2 ; 2m + 5) di động và điểm A (2 ; 1) cố định . Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách AM khi m thay đổi .

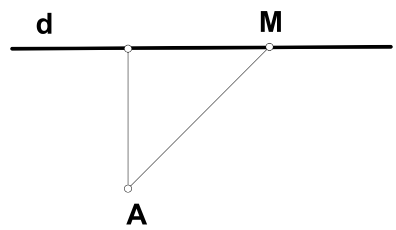
Giải **a)** Gọi M(x , 0) là điểm cần tìm , ta có :

d(M , d) = 2 $\sqrt{2}$ ⇔ $\frac{|2x-7|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = |2x-7| = 10$

⇔ 2x – 7 = 10 hay 2x – 7 = - 10 ⇔ x = 17/2 hay x = - 3/2

Vậy ta tìm được hai điểm M(17/2 ; 0) và M(- 3/2 ; 0)

b) Gọi x là hoành độ của điểm M cần tìm , tung đô của M là : y = - x – 5 . Ta có phương trình : d(M, d') = 1



⇔ $\frac{|3x_M - 4y_M + 6|}{5} = 2$

⇔ $|3x - 4(-x-5) + 4| = 10$

⇔ | 7x +24 | = 10 ⇔ 7x + 24 = 10 hay 7x + 24 = -10

⇔ x = - 2 hay x = - 34/ 7

Vậy ta tìm được hai điểm M(- 2; 0) và M(- 34/7 ; 0)

c) Ta có : $\begin{cases} x = m-2 \\ y = 2m+5 \end{cases}$ ⇔ $\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{2}$ <=> $2x - y + 9 = 0$

Vậy M di động trên đường thẳng d : 2x – y + 9 = 0 . Suy ra khoảng cách nhỏ nhất của AM chính là : d(A, d) = $\frac{|2.2 - 1 + 9|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$

Ví dụ 3 :

a) Viết phương trình đường thẳng song song và cách đều hai đường thẳng song song d : x – 3y – 1 = 0 và d' : x – 3y + 7 = 0

b) Viết phương trình đường thẳng d :song song với đường thẳng d' : 3x + 2y - 1 = 0 và cách d' một khoảng là $\sqrt{13}$ và nằm trong nữa mặt phẳng bờ d' và chứa điểm gốc O.

c) Viết phương trình đường thẳng d qua điểm A(6 ; 4) và cách điểm B(1 ; 2) một khoảng là 5 .

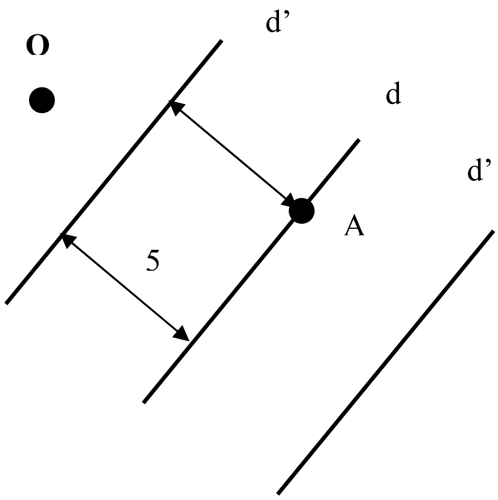
GIẢI a) Đường thẳng cần tìm là tập hợp những điểm M(x ; y) sao cho :

d(M, d) = d(M, d') ⇔ $\frac{|x-3y-1|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|x-3y+7|}{\sqrt{1^2+3^2}}$

⇔ $\left[\begin{array}{l} x-3y-1 = x-3y+7 \ \ \text{(VN)} \\ x-3y-1 = -x+3y-7 \end{array}\right.$

⇔ 2x – 6y + 6 = 0

⇔ x – 3y + 3 = 0



b) Phương trình đường thẳng d song song với d' có dạng : 3x + 2y + m = 0 . Ta định m để d(d , d') = $\sqrt{13}$.

Chọn trên d điểm A(0 ; ½) , ta có : d(d, d') = d(A ,d') = $\sqrt{13}$ ⇔

$\frac{\left|3.0+2.\frac{1}{2}+m\right|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$ <=> $|1+m| = 13$

⇔ m + 1 = 13 hay m + 1 = - 13

⇔ m = 12 hay m = - 14

⇔ d' : 3x + 2y + 12 = 0 hay d' : 3x + 2y – 14 = 0

- Xét d' : 3x + 2y + 12 = 0 . Chọn điểm M' (0 ; - 6) thuộc d'

  Thế tọa độ M' vào d : 0.3 + 2(- 6) – 1 = - 13 > 0

  Thế tọa độ O(0 ; 0) vào d : 0.3 + 0(2) – 1 = - 1 < 0

Vậy O và M' cùng một phía đối với d tức d' : 3x + 2y + 12 = 0 là đường thẳng cần tìm .

Cách khác : Gọi M(x ; y) là điểm bất kì , ta có :

M(x ; y) ∈ d' ⇔ d(M, d) $\sqrt{13}$ *và O và M nằm cùng phía đối với d*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|3x-2y-1|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \\ (3x-2y-1)(3.0-2.0-1) > 0 \end{cases} \quad <=> \dfrac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = -\sqrt{13}$$

$\Leftrightarrow$ *3x – 2y + 12 = 0*

c) Phương trình d là đường thẳng qua A (6 ; 4) có dạng :

a(x – 6) + b(y – 4) = 0 với $a^2 + b^2 \neq 0$.

$\Leftrightarrow$ ax + by – 6a – 4b = 0 (1)

Ta có : d(B, d) = 5 $\Leftrightarrow \dfrac{|1.a+2b-6a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 5 \Leftrightarrow (5a+2b)^2 = 25(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow$ $20ab - 21b^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ b(20a – 21b) = 0

$\Leftrightarrow$ b = 0 hay a = $\dfrac{21b}{20}$

* Với b = 0 : (1) thành ax – 6a = 0 $\Leftrightarrow$ x – 6 = 0 *(chia hai vế choa a $\neq 0$, coi như chọn a = 1)*

* Với a = $\dfrac{21b}{20}$: (1) thành $\dfrac{21}{20}bx + by - \dfrac{41b}{20} = 0$

$\Leftrightarrow$ 21x + 20y – 41 = 0 (*Chia hai vế cho b/20 , coi như chọn b = 20 => a = 21*)

Vậy có hai đường thẳng thỏa đề bài là : 21x + 20y – 41 = 0 và x = 6 .

Cáck khác : Có thể xét

** d : x = 6 (qua A và vuông góc Ox , không có hệ số góc).*

** d : y = k(x – 6) + 4* $\Leftrightarrow$ *kx – y – 6k + 4 = 0*

Giải : d(B , d) = 5 $\Leftrightarrow$ k = - 21/ 20 .

Dạng 2 : Viết phương trình phân giác , phân giác trong , ngoài .

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC với AB : 3x – 4y + 6 = 0

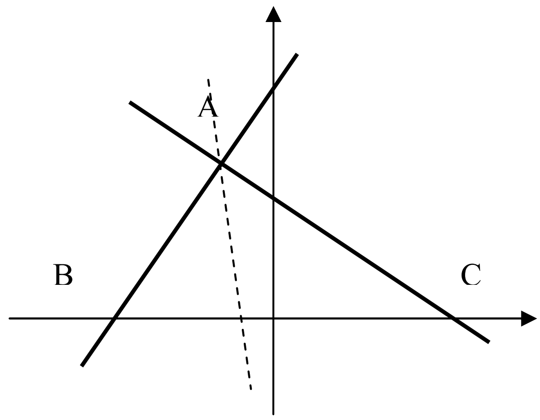
AC : 5x + 12y – 25 = 0 , BC : y = 0

a) Viết phương trình các phân giác của góc B trong tam giác ABC .

b) Viết phương trình phân giác trong của góc A trong tam giác ABC.

Giải : a) AB cắt BC tại B(- 2 ; 0) , AC cắt BC tại C(5 ; 0)

Phương trình các phân giác của góc B trong tam giác ABC là phân giác của góc hợp bởi AB và BC , là :



$$\frac{3x-4y+6}{5} \pm \frac{y}{1} = 0$$

⇔ 3x + y + 6 = 0 hay 3x – 9y + 6 = 0

b) Phương trình các phân giác của góc A , tạo bởi AB và AC là :

$$\text{(t)} : \frac{3x-4y+6}{5} + \frac{5x+12y-25}{13} = 0 \iff 64x + 8y - 47 = 0 \quad (1)$$

$$\text{(t')} : \frac{3x-4y+6}{5} - \frac{5x+12y-25}{13} = 0 \iff 14x - 112y + 203 = 0$$

Thế tọa độ B(- 2 ; 0) vào (1) : 64(-2) – 47 < 0

Thế tọa độ C(5 ; 0) vào (1) : 64.5 – 47 > 0

Vậy B và C nằm khác phía đối với (t) , nên (t) là phân giác trong của góc A .

*** Ví dụ 4 :** Cho d : 3x – 4y + 5 = 0 và d' : 5x + 12y – 1 = 0

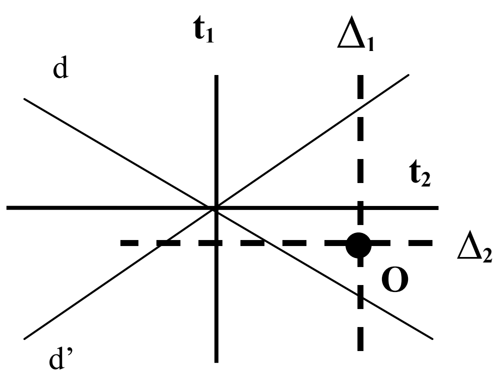
a) Viết phương trình các phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng
b) Viết phương trình đường thẳng Δ qua gốc O và tạo với d, d' một tam giác cân có cạnh đáy là Δ .

Giải a) Phân giác (t) của góc tạo bởi d , d' :

$$\frac{3x-4y+5}{5} \pm \frac{5x+12y-1}{13} = 0$$

⇔ 13(3x – 4y + 5) = 5(5x + 12y – 1)
hay 13(3x – 4y + 5) = - 5(5x + 12y – 1)

⇔ (t_1) : 14x - 112y + 70 = 0 hay
(t_2) : 64x + 8y + 60 = 0



Đó là hai đường phân giác cần tìm .

b) Nhận xét trong tam giác cân , phân giác trong của góc tại đỉnh thì vuông góc với cạnh đáy . Ta được hai đường thẳng Δ :

- Δ_1 qua O và vuông góc t_1 có phương trình 112x + 14y = 0
- Δ_2 qua O và vuông góc t_2 có phương trình 8x – 64y = 0

**Dạng 3 : Tính góc của hai đường thẳng và lập phương trình đường thẳng liên quan đến góc **

Ví dụ 1 : Tính góc hai đường thẳng sau :

a) 2x + y – 3 = 0 ; 3x - y + 7 = 0

b) 3x + 4y - 2 = 0 , $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - t \end{cases}$

Giải a) cos = $\dfrac{|2.3 + 1(-1)|}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ => $= 45^0$

b) VTPT của hai đường thẳng là : $\vec{n} = (3;4)$,$\overrightarrow{n'} = (1;1)$. Suy ra :

$$\cos\alpha = \left|\cos(\vec{n},\overrightarrow{n'})\right| = \frac{|3.1 + 4.1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

Ví dụ 2 : Tìm k biêt đường thẳng y = kx + 1 hợp với đường thẳng : x – y = 0 một góc bằng 60^0

Giải : Ta có kx – y + 1 = 0 . Ta có phương trình :

$$\cos 60^0 = \frac{|k.1 + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(k+1)^2 = k^2 + 1$$

⇔ $k^2 + 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -2 \pm \sqrt{3}$

***Ví du 3 :** Cho hình vuông ABCD có đường chéo BD : x + 2y – 5 = 0 , đỉnh A(2 ; - 1) . Viết phương trình cạnh AB và AD biết AB có hệ số góc dương .

Giải : Gọi k là hệ số góc của AB , AD , phương trình AB , AD có dạng :

$$y = k(x - 2) - 1 \Leftrightarrow kx - y - 2k - 1 = 0$$

Ta có AB và AD đều hợp với BD một góc 45^0

$\Leftrightarrow \cos 45^0 = \dfrac{|k-2|}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(k-2)^2 = 5(k^2+1)$

$\Leftrightarrow 3k^2 + 8k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1/3$ (đường AB) , k = - 3 (đường AD) .

Vậy phương trình AB : - 3x – y + 5 = 0 , AD : x – 3y – 5 = 0 hay ngược lại

C. Bài tập rèn luyện .

3.22. Chọn câu đúng : Gọi là góc của hai đường thẳng : x - y – 3 = 0 và 3x + y – 8 = 0 , thế thì cosα =

a) $1/\sqrt{5}$ b) $2/\sqrt{5}$

c) $2/\sqrt{10}$ d) đáp số khác

3.23. Chọn câu đúng : Khoảng cách từ A(1 ; 3) đến đường thẳng 3x – 4y + 1 = 0 là :

a) 1 b) 2 c) 3 d) đáp số khác

3.24. Chọn câu đúng : Có 2 giá trị m để đường thẳng x + my – 3 = 0 hợp với x + y = 0 một góc 60^0 . Tổng 2 giá trị ấy là :

a) – 1 b) 1 c) – 4 d) 4

3.25. Chọn câu đúng : Cho A(3; 4) , B(1; 1) , C(2 ; - 1) . Đường cao tam giác vẽ từ A có độ dài là :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{13}{\sqrt{5}}$ d) đáp số khác

3.26. Chọn câu đúng : Điểm A (a, b) thuôc đường thẳng : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$ cách đường thẳng d : 2x – y – 3 = 0 một khoảng $2\sqrt{5}$ và **a > 0** , thế thì a + b =

a) 20 b) 21 c) 22 d) 23

3.27 Cho tam giác ABC với B(1 ; 2) và C(4 ; - 2) .

a) Viết phương trình đường thẳng BC và tính độ dài đường cao AH .

b) Tìm tọa độ điểm A biết diện tích tam giác là 10 và A thuộc trục tung .

3.28 Cho tam giác ABC có AB : 2x + y – 3 = 0 ; AC : 3x - y + 7 = 0 và BC : x – y = 0 .

a) Tính sinA , BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

b) Viết phương trình đường thẳng đối xứng của AB qua BC .

3.29. Cho hình vuông ABCD có tâm I (2; – 3) , phương trình AB : 3x + 4y – 4 = 0 .

a) Tính cạnh hình vuông .

b) Tìm phương trình các cạnh CD , AD và BC .

3. 30. Cho hình vuông ABCD có AB : 3x – 2y – 1 = 0 , CD : 3x – 2y + 5 = 0 và tâm I thuộc d : x + y – 1 = 0

a) Tìm tọa độ I .

b) Viết phương trình AD và BC

*** 3.31.** Cho tam giác đều có A(3 ; - 5) và trọng tâm G (1 ; 1) .

a) Viết phương trình cạnh BC .

b) Viết phương trình cạnh AB và AC .

***3.32.** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có A(2 ; - 3) , B(3 ; - 2) , diện tích tam giác bằng 3/2 và trọng tâm G thuộc đường thẳng d : 3x – y – 8 = 0 . Tìm tọa độ đỉnh C .

*** 3.33.** Cho hình thoi ABCD có A(- 2; 3) , B(1 ; - 1) và diện tích 20 .

a) Tính đường cao hình thoi và phương trình cạnh AB .

b) Tìm tọa độ điểm D biết nó có hoành độ dương .

*** 3.34.** Cho hình chữ nhật ABCD có tâm I(2 ; 2) , AB : x – 2y – 3 = 0 và AB = 2AD và $y_A > 0$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu K của I lên AB.

b) Tìm tọa độ A và B.

*** 3.35.** Cho đường thẳng d : x + 2y – 4 = 0 và A(1 ; 4) , B(6 ; 4)

a) Chứng minh A, B nằm một phía đối với d. Tìm tọa độ A' đối xứng của A qua d .

b) Tìm M $\in$ d sao cho tổng MA + MB nhỏ nhất .

c) Tìm M $\in$ d sao cho | MA – MB| lớn nhất .

*** 3.36.** Cho hình thoi có phương trình ba cạnh là : 5x – 12y – 5 = 0 , 5x – 12y + 21 = 0 và 3x + 4y = 0 . Viết phương trình cạnh còn lại .

***3.37.** Viết phương trình 4 cạnh hình vuông biết 4 cạnh lần lượt qua bốn điểm I(0 ; 2) , J(5 ; - 3) , K(- 2 ; - 2) và l(2 ; - 4) .

D. Hướng dẫn hay đáp số

3.22. (a) 3.23. (d) 3.24. (c) 3.25. (b) 3.26. (d)

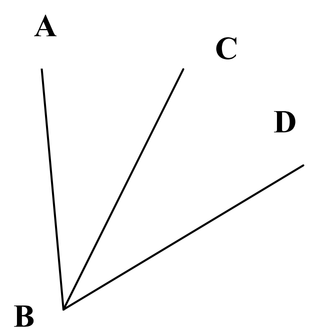
3.27. a) BC : 4x + 3y – 10 = 0 .

Ta có BC = 5 , suy ra $AH = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} = 4$.

b) Gọi A(0 ; a) . Ta có : d(A, BC) = 4 $\Leftrightarrow$

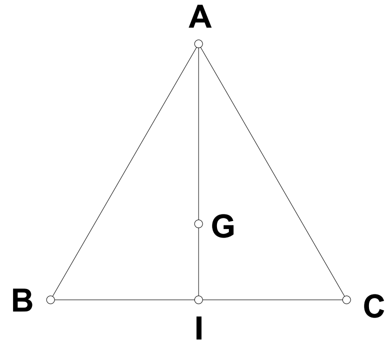
$\dfrac{|3a - 10|}{5} = 4$

$\Leftrightarrow$ a = 10 hay a = - 10/3



3.28. a)Ta có : sinA = sin(AB, AC) = $\sqrt{1 - \cos^2 A}$

$|\cos A| = \dfrac{|2.3 + 1(-1)|}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ => $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



Tọa độ B , giao điểm của AB và BC , là (1 ; 1) .
Tọa độ C , giao điểm của AC và BC , là (- 7/2 ; - 7/2) .

Suy ra : $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4.\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 9/2$

b) Phương trình đường thẳng cần tìm BD qua B có dạng y = k(x – 1) + 1 ⇔ kx – y – k + 1 = 0

Ta có : cos (BA, BC) = cos (BD, BC) ⇔ $\dfrac{|2.1+1(-1)|}{\sqrt{5}.\sqrt{2}} = \dfrac{|k.1+1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}}$

⇔ $k^2 + 1 = 5(k + 1)^2$ ⇔ $4k^2 + 10k + 4 = 0$

⇔ k = - ½ hay k = - 2 . Chú ý k = - 2 là ứng với hệ số góc của BA nên bị lọai , ta nhận k = - ½ . Phương trình đường thẳng BD : x + 2y - 3 = 0

3.29. a) Cạnh hình vuông bằng 2.d(I, AB) = 4

b) * Phương trình CD : 3x + 4y + m = 0 với

$$\frac{3(2)+4(-3)+m}{5} = -\frac{3(2)+4(-3)-4}{5} \Leftrightarrow -6 + m = 2 \Leftrightarrow m = 8$$

=> CD : 3x + 4y + 8 = 0
* Phương trình AD và BC : 4x – 3y + m = 0

Ta có : d(I, AB) = d(I, AD) ⇔ $2 = \dfrac{|17+m|}{5}$

⇔ m = - 7 hay m = - 27
AD : 4x – 3y - 7 = 0 , BC : 4x – 3y – 27 = 0 hay ngược lại .

3.30. **a**) I $\in$ d => I = (x ; 1 – x) . Ta có : d(I, AB) = d(I, CD) ⇔ x = 0 => y = 1 : I(0 ; 1)

b) Như câu b (bài 3. 29)

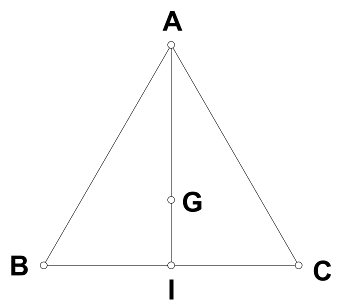
3.31. a) Gọi I là trung điểm BC , ta có :

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + 2x_I = 3x_G \\ y_A + 2y_I = 3y_G \end{cases} \Rightarrow I = (0 ; 4)$$

Phương trình BC qua I và vuông góc $\overrightarrow{AI} = (-3 ; 9)$: - (x – 0) + 3(y – 4) = 0

⇔ - x + 3y – 12 = 0

b) Phương trình AB, AC qua A có dạng : kx - y – 3k - 5 = 0



Ta có : cos(AB, BC) = cos60 = ½ ⇔

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{10}.\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{2}$$

⇔ $3k^2 - 12k - 13 = 0$ ⇔ $k = \dfrac{6 \pm 5\sqrt{3}}{3}$. Phương trình AB và AC :

$$AB : (6 \pm 5\sqrt{3})x - 3y + 3 \pm 15\sqrt{3} = 0$$
$$AC : (6 \mp 5\sqrt{3})x - 3y + 3 \mp 15\sqrt{3} = 0$$

3.32 . G ∈ d => G = (a ; 3a - 8) .

Ta có ; S_{GAB} = 1/3 . S_{ABC} = ½ . Mà AB = $\sqrt{2}$, suy ra : d(G; AB) = 1/ $\sqrt{2}$

Phương trình AB : x – y - 5 = 0 , suy ra :

$$\frac{|a - 3a + 8 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |3 - 2a| = 1$$

⇔ . . . . . .

3.33. a) Ta có : $h = \dfrac{S_{ABCD}}{AB} = 4$. AB : 4x + 3y – 1 = 0

b) Gọi D = (x ; y) với d > 0 . Ta có : $\begin{cases} d(D, AB) = 4 \\ AD = AB = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|4x+3y-1|}{5} = 4 \quad (1) \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow y = \dfrac{-4x+21}{3}$ hay $y = \dfrac{-4x-19}{3}$

Thế vào (2) , giải ta được : x = 3 => y = 3 . Vậy D = (3 ; 3)

3. 34. a) Phương trình IK : 2x + y – 6 = 0 . Suy ra K(3 ; 0)

c) Vì AB = 2AD nên KA = 2KI (1) . Tọa độ K(2y + 3 ; y) $\in$ AB .

Giải (1) , ta được : y = 2 , suy ra A(7 ; 2)

3.35. a) A'(- 1; 0)

b) Ta có : MA + MB = MA' + MB $\geq$ A'B = $\sqrt{65}$

Vậy GTNN là $\sqrt{65}$ $\Leftrightarrow$ M = A'B $\cap$ d . Viết phương trình A'B , suy ra : M = (4/3 ; 4/3)

c) Ta có : |MA – MB| $\geq$ AB = 5 .

Vậy GTNN là 5 $\Leftrightarrow$ M = giao điểm của d và AB kéo dài $\Leftrightarrow$ M = (- 4 ; 4)

3.36. Chú ý trong hình thoi khỏang cách giũa hai cạnh bằng nhau .

AB : 5x – 12y – 5 = 0 , CD : 5x – 12y + 21 = 0 . Chọn M(1 ; 0) $\in$ AB , ta có :

d(AB, CD) = d(M, CD) = 2

AD : 3x + 4y = 0 , BC : 3x + 4y + m = 0 . Chon O(0 ; 0) $\in$ AD , ta có :

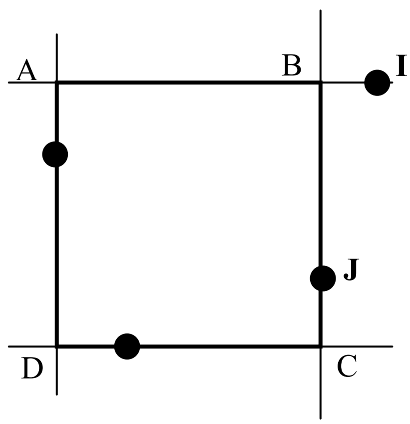
d(AD, BC) = d(O, BC) = 2 $\Leftrightarrow$ m = $\pm$ 10 .

=> BC : 3x + 4y $\pm$ 10 = 0

3.37. Phương trình AB qua I : ax + by – 2 = 0

Phương trình CD qua K : ax + by + 2a + 2b = 0

Phương trình BC qua J : bx – ay – 5b – 3a = 0



Phương trình AD qua L : bx – ay – 2b – 4a = 0

Ta có : d(I, CD) = d(J, AD) ⇔ $\frac{|4b+2a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3b-a|}{\sqrt{b^2+a^2}}$

⇔ b = - 3a hay a = - 7b

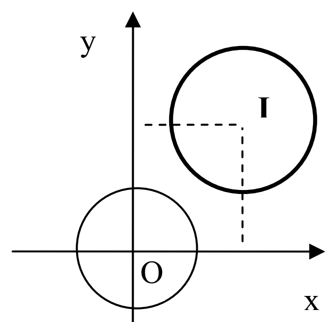
Chọn : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = 7 \\ b = -1 \end{cases}$

§ 4. Đường tròn

A. Tóm tắt giáo khoa .

1.Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình đường tròn tâm I(h ; k) bán kính R là : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$.

- Phương trình đường tròn (O, R) là : $x^2 + y^2 = R^2$



2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , mọi phương trình có dạng :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad \text{với } a^2 + b^2 - c > 0$$

là phương trình đường tròn :

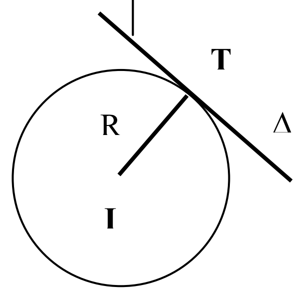
- Tâm I(- a ; - b)
- Bán kính R = $\sqrt{a^2+b^2-c}$

3. Tiếp tuyến với đường tròn $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$ tại tiếp điểm T(x_0 ; y_0) là :

đường thẳng qua T và vuông góc $\overrightarrow{IT} = (x_0 - h; y_0 - k)$ có phương trình : $(x_0 - h)(x - x_0) + (y_0 - k)(y - y_0) = 0$

- Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (I, R)

⇔ d(I, Δ) = R



B . Giải tóan ..

Dạng toán 1 : Xác định tâm và bán kính . Điều kiện để một phương trình là đường tròn .

Ví dụ 1 : Xác định tâm và bán kính các đường tròn sau :

a) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 1$ b) $(x-2)^2 + y^2 = 5$
c) $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$ d) $3x^2 + 3y^2 + 4x + 1 = 0$

Giải :

a) Đường tròn tâm I(- 1 ; 4) , bán kính R = 1

b) Đường tròn tâm I(2 ; 0) , bán kính R = $\sqrt{5}$

c) a = - 4 , b = 2 , c = - 5 => I(- 4 ; 2) , R = $\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{4^2+2^2+5}=5$

d) Viết lại phương trình đường tròn bằng cách chia hai vế cho 3 :

$$x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

Tâm I(- $\frac{2}{3}$;0) , bán kính R = $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 2 : Cho phương trình : $x^2 + y^2 + 2mx - 2my + 3m^2 - 4 = 0$ (1)

a) Định m để (1) là phương trình một đường tròn .

b) Chứng minh tâm các đường tròn này di động trên một đọan thẳng khi m thay đổi .

c) Viết phương trình đường tròn (1) biết nó có bán kính là 1 .

d) Tính bán kính đường tròn (1) biết nó tiếp xúc với Δ : 2x – y = 0

Giải :

a) Ta có : a = m , b = - m , c = $3m^2 - 4$. Để (1) là phương trình đường tròn thì :

$a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + m^2 - (3m^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 > 0$

$\Leftrightarrow -2 < m < 2$.

- Với – 2 < m < 2 , đường tròn có có tâm là I

  $\begin{cases} x_I = -a = -m \\ y_I = -b = m \end{cases}$ (1) => $x_I + y_I = 0$

Lại có : - 2 < m < 2 ⇔ - 2 < x_I < 2 (2)

Từ (1) và (2) suy ra tập hợp của I là đọan AB có phương trình x + y = 0 (- 2 < x < 2)

b) Với – 2 < m < 2 , đường tròn có bán kính là R = $\sqrt{4-m^2}$.

Ta có : R = 1 ⇔ $4 - m^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$

- m = $\sqrt{3}$: phương trình đường tròn là : $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3}\,y + 5 = 0$
- m = - $\sqrt{3}$: phương trình đường tròn là : $x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3}\,y + 5 = 0$

c) Đường tròn tiếp xúc ⇔ d(I, Δ) = R

$\Leftrightarrow \frac{|-2m-m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{4-m^2}$

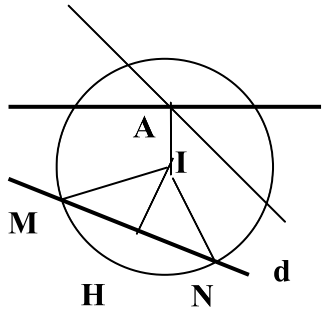
$\Leftrightarrow 9m^2 = 5(4 - m^2)$ (*bìng phương hai vế)*

$\Leftrightarrow 14m^2 = 20 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\dfrac{10}{7}}$

Ví dụ 3 : Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

a) Tìm tâm và bán kính của (C).
b) Cho A(3 ; -1) **,** chứng minh A là điểm ở trong đường tròn .Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt (C) theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất .
c) Cho d : $3x - 4y = 0$, chứng minh d cắt (C) . Tính độ dài dây cung .

Giải : a) a = 1 ; b = - 2 , c = - 4 => tâm I có tọa độ (1 ; - 2) , bán kính R = $\sqrt{a^2 + b^2 - c} = 3$.



b) Ta có : $IA^2 = (3 - 1)^2 + (-1 + 2)^2 = 5$ => IA < R

Vậy A ở bên trong đường tròn .

Đường thẳng qua A cắt (C) theo dây cung nhỏ nhất khi d cách xa tâm I nhất $\Leftrightarrow$ d vuông góc $\overrightarrow{IA} = (2 ; 1)$ tại A(3 ; - 1)

$\Leftrightarrow$ d có phương trình : $2(x - 3) + 1.(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

c) d cắt (C) $\Leftrightarrow$ d(I, d) < R .

Ta có : d(I,d) = $\dfrac{|3.1 - 4.(-2)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{10}} < 3$ => d cắt (C) theo một dây cung MN .

Kẻ IH vuông góc MN , thế thì : IH = $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$, IM = R = 3 , suy ra :

$$MH^2 = IM^2 - IH^2 = 9 - \frac{25}{10} = \frac{65}{10} = \frac{13}{2}$$

Vậy độ dài MN = 2MH = $2.\sqrt{\dfrac{13}{2}} = \sqrt{26}$

Cần nhớ : Cho đường tròn (I , R) và đường thẳng Δ :

- *Δ tiếp xúc (I) $\Leftrightarrow$ d(I, Δ) = R*
- *Δ cắt (I) $\Leftrightarrow$ d(I, Δ) < R*
- *Δ ở ngỏai (I) $\Leftrightarrow$ d(I, Δ) > R*

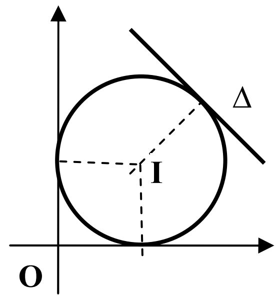
Dạng toán 2 : Thiết lập phương trình đường tròn .

Có 2 cách để thiết lập phương trình đường tròn :

1. Tìm tọa độ (h ; k) của tâm và tính bán kính R , phương trình đường tròn cần tìm là : $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.
2. Tìm a , b, c , phương trình đường tròn cần tìm là : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

Cần nhớ :

- Đường tròn (I, R) qua $M(x_0 ; y_0)$ ⇔ $IM^2 = R^2$
  ⇔ $(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 = R^2$
  ⇔ $x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = 0$
- Đường tròn (I, R) tiếp xúc Δ ⇔ d(I, Δ) = R
- Đường tròn (I, R) tiếp xúc trục Ox ⇔ |h| = R
- Đường tròn (I, R) tiếp xúc trục Oy ⇔ |k| = R



Ví dụ 1 : Viết phương trình đường tròn :

a) đường kính AB với A(3 ; 1) và B(2 ; - 2) .
b) có tâm I(1 ; - 2) và tiếp xúc với đường thẳng d : x + y – 2 = 0
c) có bán kính 5 , tâm thuộc Ox và qua A(2 ; 4) .
d) có tâm I (2 ; - 1) và tiếp xúc ngòai với đường tròn : $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$
e) tiếp xúc hai trục và có tâm trên đường thẳng Δ : 2x – y – 3 = 0

Giải :

a) Tâm đường tròn là trung điểm I của AB, có tọa độ

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Bán kính R = IA = $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Phương trình đường tròn là :

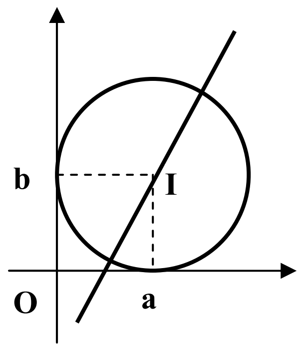
$$(x - \frac{52}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$$

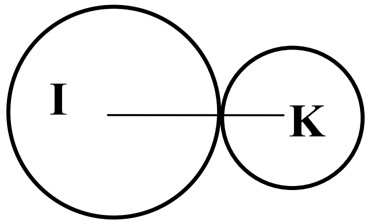
b) Bán kính đường tròn là R = d(I, d) = $\frac{|1-2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Phương trình đường tròn là : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{2}$

c) Vì tâm I ∈ Ox nên I = (h ; 0) .
Ta có : IA = R ⇔ $(h - 2)^2 + (4 - 0)^2 = 25$ ⇔ $(h - 2)^2 = 9$
⇔ h – 2 = 3 hay h – 2 = - 3 ⇔ h = 5 hay h = - 1 .
Phương trình đường tròn cần tìm : $(x - 5)^2 + y^2 = 25$ hay $(x + 1)^2 + y^2 = 25$

d) Đường tròn $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$ có tâm K(5 ; 3) , bán kính r = 3
Đường tròn (I, R) cần tìm tiếp xúc ngòai với (K) ⇔ IK = R + r
Mà IK = $\sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = 5$, suy ra : R = 5 – r = 2 .
Vậy phương trình đường tròn (I) là : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$





e) Gọi (h; k) là tâm và R là bán kính đường tròn . Ta có :

(I) tiếp xúc Ox , Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} d(O,Ox) = |k| = R \\ d(O,Oy) = |h| = R \end{cases}$

Suy ra : |h| = |k| $\Leftrightarrow$ h = k (1) hay h = - k (2)

Mặt khác : I $\in \Delta \Leftrightarrow$ 2h – k – 3 = 0 (3)

- Giải (1) và (3) : h = k = 3 => R = 3
- Giải (2) và (3) : h = 1 , k = - 1 => R = 1 .

Phương trình đường tròn cần tìm :

$(x – 3)^2 + (y – 3)^2 = 9$ hay $(x – 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

Ví dụ 2 : Viết phương trình đường tròn :

a) qua A(- 2 ; - 1) , B(- 1 ; 4) và C(4 ; 3)
b) qua A(0 ; 2) , B(- 1; 1) và có tâm trên đường thẳng 2x + 3y = 0
c) qua A(5 ; 3) và tiếp xúc đường thẳng d : x + 3y + 2 = 0 tại điểm T(1 ; - 1)

Giải

a) Phương trình đường tròn có dạng (C) : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

(C) qua A(- 2 ; - 1) $\Leftrightarrow 2^2 + 1^2 + 2a(-2) + 2b(-1) + c = 0$

$\Leftrightarrow$ 4a + 2b - c = 5 (1)

(C) qua B(- 1 ; 4) $\Leftrightarrow$ 2a – 8b - c = 17 (2)

(C) qua C(4 ; 3) $\Leftrightarrow$ 8a + 6b + c = - 25 (3)

Giải hệ (1), (2), (3) , ta được : a = b = - 1 , c = - 11 Phương trình đường tròn cần tìm là :$x^2 + y^2 – 2x – 2y – 11 = 0$

b) Phương trình đường tròn có dạng (C) : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

(C) qua A(0 ; 2) $\Leftrightarrow$ 4b + c = - 4 (1)

(C) qua B(- 1 ; 1) $\Leftrightarrow$ - 2a + 2b + c = - 2 (2)

Tâm I(a ; b) $\in \Delta \Leftrightarrow$ 2a + 3b = 0 (3)

Giải hệ (1), (2), (3), ta được a = - 3 , b = 2 , c = - 12 . Phương trình đường tròn cần tìm là : $x^2 + y^2 – 6x + 4y – 12 = 0$

c) Phương trình đường tròn có dạng (C) : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

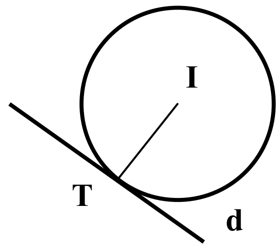
(C) qua A(5 ; 3) ⇔ $10a + 6b + c = - 34$ (1)

(C) qua T(1 ; - 1) ⇔ $2a - 2b + c = - 2$ (2)

Tâm I(a ; b) ∈ đường thẳng vuông góc với d : $x + 3y + 2 = 0$ tại T(1 ; - 1) có phương trình là : $3(x – 1) – (y + 1) = 0$ ⇔ $3x – y – 4 = 0$

Do đó : $- 3a + b = 4$ (3) .

Giải hệ (1), (2), (3), ta được : a = b = - 2 , c = - 2 . Phương trình đường tròn cần tìm là : $x^2 + y^2 – 4x – 4y – 2 = 0$



Ví dụ 3 : Cho A(2 ; 0) và B(0 ; 1) , chúng minh tập hợp những điểm M thỏa $MA^2 – MB^2 = MO^2$ là một đường tròn . Xác định tâm và bán kính đường tròn ấy .

Giải Gọi (x ; y) là tọa độ của M , ta có :

$MA^2 – MB^2 = MO^2$

⇔ $[(x – 2)^2 + y^2] – [(x^2 + (y – 1)^2] = x^2 + y^2$

⇔ $x^2 + y^2 + 4x – 2y – 3 = 0$

Đây là phương trình đường tròn tâm I(- 2 ; 1) , bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Dạng 3: Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn .

Cần nhớ : Cho đường tròn tâm I(a ; b) , bán kính R :

- Nếu biết tiếp điểm là T (x_0 ; y_0) thì phương trình tiếp tuyến là đường thẳng qua (x_0 ; y_0) và vuông góc với $\overrightarrow{IT} = (x_0 – h ; y_0 - k)$
- Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện sau để giải :
  Δ là tiếp tuyến của đường tròn (I, R) ⇔ d(I, Δ) = R

Ví dụ 1 (Tiếp tuyến tại một điểm cho trước)

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x – 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ tại điểm có hoành độ là – 1 .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 4x – 2y – 5 = 0$ tại điểm mà đường tròn cắt trục Ox.

Giải

a) Tâm I(3 ; - 1) , bán kính r = 5

Thế x = - 1 vào phương trình đường tròn , ta có :

$16 + (y + 1)^2 = 25$ ⇔ $(y + 1)^2 = 9$

⇔ $y + 1 = \pm 3$

⇔ y = 2 hay y = - 4 . Vậy tọa độ tiếp điểm là (- 1 ; 2) hay (- 1 ; - 4)

- Với tiếp điểm T (- 1; 2) , tiếp tuyến vuông góc $\overrightarrow{IT} = (- 4 ; 3)$ có phương trình là : $- 4(x + 1) + 3(y – 2) = 0$ ⇔ $- 4x + 3y – 10 = 0$

- Với tiếp điểm (- 1; - 4) , tiếp tuyến vuông góc $\overrightarrow{IT}$ = (- 4 ; - 3) có phương trình là : 4(x + 1) + 3(y + 4) = 0 ⇔ 4x + 3y + 16 = 0

b) Thế y = 0 vào phương trình đường tròn : $x^2 + 4x - 5 = 0$ ⇔ x = 1 hay x = - 5
Vậy tọa độ tiếp điểm là (1 ; 0) hay (- 5 ; 0) .
Đường tròn có tâm là I(- 2 ; 1) .

- Tiếp tuyến tại T(1 ; 0) vuông góc với $\overrightarrow{IT}$ = (3 ; - 1) có phương trình :
  3(x – 1) – 1.(y – 0) = 0 ⇔ 3x – y – 3 = 0
- Tiếp tuyến tại T(- 5 ; 0) vuông góc với $\overrightarrow{IT}$ = (- 3 ; - 1) có phương trình :
  3(x + 5) – 1.(y – 0) = 0 ⇔ 3x – y + 15 = 0

Ví dụ 2 (Tiếp tuyến có phương cho trước)

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ biết tiếp tuyến có hệ số góc là 1 .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) : $x^2 + (y - 1)^2 = 25$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng 3x – 4y = 0

Giải :

a) Đường tròn có tâm O(0 ; 0) , bán kính $\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng d có hệ số góc là 1 có dạng : x – y + m = 0 (m là số chưa biết) . Ta có :

d tiếp xúc (C) ⇔ d(I, d) = R

$$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2} <=> |m| = 2$$

⇔ m = ± 2

Vậy phương trình tiếp tuyến là : x – y ± 2 = 0

b) Đường tròn có tâm I(0 ; 1) , bán kính R = 5 . Phương trình đường thẳng Δ vuông góc với 3x – 4y = 0 có dạng : 4x + 3y + m = 0 .

Δ tiếp xúc (C) ⇔ d(I, Δ) = R

$$\Leftrightarrow \frac{|4.0+3.1+m|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 5 \Leftrightarrow |3 + m| = 25$$

⇔ m = 22 hay m = - 28 .

Vậy phương trình tiếp tuyến là : 4x + 3y = 22 hay 4x + 3y – 28 = 0

Ví dụ 3 (Tiếp tuyến qua một điểm cho trước)
Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ tâm I(2 ; 1) , bán kính R = 3 biết tiếp tuyến qua điểm A(- 1 ; 2) .

Giải

a) Đường tròn có tâm I(2 ; 1) , bán kính R = 3 .

Phương trình đường thẳng Δ qua A(- 1 ; 2) có dạng : y – 2 = k(x + 1)

⇔ kx – y + k + 2 = 0 (*) , k là hệ số góc của Δ .

Δ tiếp xúc (C) ⇔ d(I, Δ) = R

$$\Leftrightarrow \frac{|2.k-1+k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \Leftrightarrow |\,3k + 1\,| = 3.\sqrt{k^2+1}$$

Bình phương hai vế : $9k^2 + 6k + 1 = 9(k^2 + 1) \Leftrightarrow 6k = 8 \Leftrightarrow k = 4/3$

Thế vào (*) , ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm : (4/3) x – y + 4/3 + 2 = 0

⇔ 4x - 3y + 10 = 0 .

Ghi chú : Thường từ một điểm có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với đường tròn , ở đây ta chỉ được một là vì ta đã chưa xet đến đường thẳng qua A vuông góc với Ox, đường này không có hệ số góc

* Xét Δ : x – 2 = 0 (qua A và vuông góc Ox) :

Ta tính d(I, Δ) = $\frac{||-1-2|}{1} = 3$, vậy d(I, Δ) = R , do đó Δ : x – 2 = 0 cũng là một tiếp tuyến cần tìm .

Qua A(2 ; 1) có hai tiếp tuyến là : x – 2 = 0 và 4x - 3y + 10 = 0 .

Ghi chú : Có thể viết phương trình tiếp tuyến qua A(- 1 ; 2) dưới dạng tổng quát : a(x + 1) + b(y – 2)= 0 ⇔ ax + by + a – 2b = 0 .

Điều kiện tiếp xúc : d(I, Δ) = R $\Leftrightarrow \frac{|2.a+b.1+a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3$

⇔ $(3a – b)^2 = 9(a^2 + b^2) \Leftrightarrow b(8b + 6a) = 0$

⇔ b = 0 hay a = - 4b/3

*** Ví dụ 34 :** Cho (C) : $x^2 + y^2 = 1$ và (C’) : $(x – 2)^2 + (y – 3)^2 = 4$. Viết phương trình tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn .

Giải

(C) có tâm O , bán kính 1 và (C’) có tâm I , bán kính 2 .

Phương trình tiếp tuyến chung d có dạng : ax + by + c = 0 ($a^2 + b^2 \neq 0$) thỏa :

$$\begin{cases} d(O,d) = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} 1 \\ d(I,d) = \dfrac{|2a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \\ c(2a+3b+c) < 0 \ \text{(O và I cùng mot phía vói d)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \quad (1) \\ 2a+3b+c = -2c \quad (2) \end{cases}$$

Từ (2) : c = - $\dfrac{2a+3b}{3}$. Thế vào (1) và bình phương :

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{2a+3b}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 12ab = 0 \quad \Leftrightarrow a(5a - 12b) = 0$$

$\Leftrightarrow$ a = 0 hay a = $\dfrac{12b}{5}$. Phương trình hai tiếp tuyến cần tìm :

$y - 1 = 0$ hay $12x + 5y - 13 = 0$

C. Bài tập rèn luyện .

3. 38. Tìm tâm và bán kính các đường tròn sau :

a) $(2x + 5)^2 + (2y - 3)^2 = 4$ b) $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 3x + 1 = 0$ d) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$

3. 39. Tìm điều kiện của tham số để các phương trình sau là phương trình đường tròn và tìm tập hợp tâm các đường tròn khi tham số thay đổi.

a) $x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4(m - 2)y - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2mx - 2my + 2m^2 + m = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m^2 - 1 = 0$

3.40. Cho (C_m) : $x^2 + y^2 + 2mx - 2(m + 1)y - 2m - 4 = 0$

a) Chúng minh (C_m) là đường tròn với mọi m .

b) Viết phương trình (C_m) có bán kính nhỏ nhất .

c) Chúng minh có hai đường tròn (C_m) tiếp xúc với đường thẳng x + y + 5 = 0

3.41. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$

a) Tìm độ dài dây cung mà (C) chắn trên trục Ox.

b) Tìm độ dài tiếp tuyến vẽ từ A (- 2 ; 3) đến đường tròn (C) .

c) Tìm tâm và bán kính đường tròn (C’) : $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 13 = 0$. Chúng minh (C) và (C’) tiếp xúc ngòai tại T . Viết phương trình tiếp tuyến chung tại T.

3.42. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 7 = 0$

a) Điểm M(- 1; 1) ở trong hay ở ngòai đường tròn . Lập phương trình dây cung qua M và có độ dài ngắn nhất .

b) Lâp phương trình đường thẳng qua O và cắt (C) theo một dây cung có độ dài là 2 .

3. 43. Lập phương trình đường tròn :

a) có tâm I(3 ; - 2) , bán kính 2 b) có tâm I(2 ; - 4) và qua gốc tọa độ

c) có tâm I(1 ; - 2) và tiếp xúc đường thẳng x – y 0

*** 3. 44.** Lập phương trình đường tròn :

a) qua A(1 ; 2) và tiếp xúc hai trục tọa độ .

b) tiếp xúc hai đường thẳng song song : $2x - y - 3 = 0$, $2x - y + 5 = 0$ và có tâm trên Oy.

c) tiếp xúc đường thẳng $2x + y - 5 = 0$ tại điểm T(2 ; 1) và có bán kính $2\sqrt{5}$

* d) tiếp xúc với hai đường thẳng .$x - 2y + 5 = 0$ và $x + 2y + 1 = 0$ và qua gốc O.

3.45. Lập phương trình đường tròn :

a) qua A(0 ; 4) , B(- 2; 0) và C(4 ; 3)

b) qua A(2 ; - 1), B(4 ; 1) và có tâm trên Ox .

c) qua A(3 ; 5) và tiếp xúc đường thẳng $x + y - 2 = 0$ tại điểm T(1 ; 1) .

3.46. Cho đường tròn (C) : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

a) Tìm trên Oy điểm từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến của (C) và hai tiếp tuyến vuông góc nhau .

b) Tìm trên (C) điểm ở gần gốc O nhất.

3.47. Chứng minh đường thẳng Δ :$2x - y = 0$ và đường tròn : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ cắt nhau . Tìm độ dài dây cung tạo thành .

3.48. Cho hai đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ và (C’) : $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$.

a) Chứng minh hai đường tròn tiếp xúc ngòai . Tìm tọa độ tiếp điểm T.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung tại T.

*** 3. 49.** Cho đường tròn $(x – 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$ và điểm M(- 3 ; 1)

a) Chứng minh M ở ngòai đường tròn .

b) Tính phương tích của M đối với đường tròn và tính độ dài tiếp tuyến MT.

*** 3.50.** Cho hai đường tròn (C) : $x^2 + y^2 – 2x – 2y + 1 = 0$ và (C') : $x^2 + y^2 – 4x + 6y + 9 = 0$

a) Chứng minh hai đường tròn có 4 tiếp tuyến chung .

b) Chứng minh bốn điểm chia các đọan tiếp tuyến chung theo tỉ số - 2 cùng nằm trên một đường tròn .

3.51. a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 – 2x + 4y – 5 = 0$ tại điểm (2 ; 1) .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$ tại điểm mà đường tròn cắt Oy .

***3.52.**Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 – 2x + 8y – 1 = 0$:

a) biết tiếp tuyến song song đường thẳng $x – y + 3 = 0$

b) biết tiếp tuyến qua điểm (2 ; 1) .

***3.53.**Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 – 2x - 4y – 5 = 0$:

a) biết tiếp tuyến vuông góc đường thẳng $3x + y = 0$

b) biết tiếp tuyến phát xúât từ điểm A(3 ; - 2) .

c) Viết phương trình đường tròn ngọai tiếp tam giác AT_1T_2 và đường thẳng qua hai tiếp điểm T_1, T_2 .

***3.54.**Cho hai đường tròn : $x^2 + y^2 – 2x - 2y – 2 = 0$ và $x^2 + y^2 – 8x – 4y + 16 = 0$

a) Chứng minh hai đường tròn bằng nhau và cắt nhau .

b) Viết phương trình đường thẳng qua giao điểm của hai đường tròn .

b) Tìm phương trình tiếp tuyến chung của chúng .

***3.55.** Cho A(3 ; 0) và B(0 ; 4) . Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB .

***3.56.** Biện luận theo m vị tri tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn (C)

a) $\Delta : x + 3y + m = 0$; (C) : $(x – 2)^2 + y^2 = 10$

b) $\Delta : x – my + m – 4 = 0$; (C) : $x^2 + y^2 - 2x – 4y + 4 = 0$

***3.57.** Cho hai đường thẳng $\Delta : x + 1 = 0$ và $\Delta' : x – 1 = 0$, cắt Ox tại A và B . . M và N là hai điểm di động trên Δ và Δ' có tung độ là m và n sao cho luôn có : mn = 4.

a) Viết phương trình đường thẳng AN và BM .

b) Chứng minh giao điểm I của AN và BM thuộc một đường tròn cố định .

3.58. Chọn câu đúng : Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn $(x + 2)^2 + (y – 1)^2 = 4$

a) I(2 ; - 1), R = 2 b) I(- 2 ; 1), R = 2
c) I(2 ; - 1) , R = 4 d) I(- 2 ; 1) , R = 4

3.59. Chọn câu đúng : Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn : $2x^2 + 2y^2 – 3x + 4y - 1 = 0$ 1

a) I(3/2 ; - 2) , R = $\frac{\sqrt{29}}{2}$ b) I(- ¾ ; 1) , R = $\frac{\sqrt{33}}{4}$
c) I(3/4 ; - 1) , R = $\frac{\sqrt{33}}{4}$ d) I(3/4 ; - 1) , R = $\frac{\sqrt{17}}{4}$

3. 60..Chọn câu đúng : Có bao nhiêu số nguyên m để : $x^2 + y^2 – 2(m + 1)x + 2my + 3m^2 + 2m – 12 = 0$ là phương trình một đường tròn ?

a) 5 b) 7 c) 9 d) vô số

3.61. Chọn câu đúng : Cho A(1 ; 1) và B(2 ; 3) , tập hợp các điểm M thỏa : $3MA^2 – 2MB^2 = 6$ là một đường tròn . Bán kính của nó là :

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

3.62. Chọn câu đúng : Có hai đường tròn có tâm trên Ox , bán kính 5 và qua điểm A(1 ; - 38) . Khỏang cách hai tâm của chúng là :

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

3. 63. Chọn câu đúng : Đường tròn qua A(1 ; 0), B(2 ; 0) và C(0 ; 3) có bán kính gần nhất với số nào dưới đây ?

a) 1, 1 b) 1, 2 c) 1, 3 d) 1, 4

D. Hướng dẫn hay đáp số :

3. 38. a) I (- 5/.2 ; 3/2) , R = 1 b) I(- ½ ; - ½) , R = $\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) (- 3/2 ; 0), R = $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) I(1 ; - 3/2) , R = 5/4

3.39. a) ∀ m , tập hợp I là đường thẳng 2x + y – 6 = 0
b) m < 0 , tập hợp là nửa đường thẳng x + y = 0 với x > 0
c) – 1 < m <1 , tập hợp là đoạn 2x + y = 0 với – 1< x < 1

3.40. a) $a^2 + b^2 – c = 2(m + 1)^2 + 3 > 0$, ∀ m
b) Bán kính nhỏ nhất khi m = - 1 .
c) Điều kiện tiếp xúc ⇔ $2m^2 + 4m – 26 = 0$: phương trình này có hai

nghiệm .

3.41. a) 4 b) $2\sqrt{5}$ c) Vì khỏang cách hai tâm bằng tổng hai bán kính . Phương trình tiếp tuyến chung là : 2x + y + 4 = 0

3.42. a) ở ngòai vì IM > R . Dây cung qua M và vuông góc IM .

b) Vì dây cung có độ dài 2 nên khỏang cách từ I đến đường thẳng là : $\sqrt{R^2 - 1} = \sqrt{5}$. Phương trình đường thẳng Δ : kx – y = 0 . Giải : d(I, Δ) = $\sqrt{5}$, ta được k .

3.44. Gọi I(h ; k) là tâm và R là bán kính :

a) Ta có hệ : $\begin{cases} |h| = |k| = R \quad (1) \\ (h-1)^2 + (k-2)^2 = h^2 \quad (2) \end{cases}$

Thế lần lượt k = h và k = - h vào (2) , ta được phương trình tính h .

b) I(0 ; k) , ta có hệ phương trình : $\begin{cases} d(I, \Delta) = d(I, \Delta') \\ d(I, \Delta) = R \end{cases}$

c) Ta có hệ : $\begin{cases} d(I, \Delta) = 2\sqrt{5} \\ \overrightarrow{IT} \,//\, \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2h + k - 5|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \\ \dfrac{h-2}{2} = \dfrac{k-1}{1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2h + k - 5 = 10 \\ 2h + k - 5 = -10 \end{array}\right. \\ h - 2k = 0 \end{cases}$$

3.45. Phương trình đường tròn có dạng : $x^2 + y^2 + 2a + 2by + c = 0$

a) Thế tọa độ A, B, C , ta được hệ phương trình tính a, b, c .

b) Ta có : b = 0 , thế tọa độ A và B , ta có hệ tính a và c .

c) Phương trình đường thẳng qua T và vuông góc x + y – 2 = 0 là : x – y = 0 . Ta có hệ :

$$\begin{cases} 34 + 6a + 10b + c = 0 \\ 2 + 2a + 2b + c = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

qua A(3 ; 5) và tiếp xúc đường thẳng x + y – 2 = 0 tại điểm T(1 ; 1) .

3.46. a) Điểm cần tìm cách tâm một khỏang là R $\sqrt{2}$.
b) Điểm cần tìm là giao điểm của OI và đường tròn .

3.47. a) Đường tròn có tâm I(2 ; - 1) , bán kính R = $\sqrt{6}$

Ta có : $d(I, \Delta) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < R \Rightarrow \Delta$ cắt đường tròn .

Độ dài dây cung : $2\sqrt{R^2 - d^2} = 2$

3. 48. (C) có tâm I(1 ; 2) . (C') có tậm I'(- 2 ; - 2).

Điểm chung của hai đường tròn thỏa hệ : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0\ (1) \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0\ (2) \end{cases}$

Lây (1) trừ (2) : - 6x – 8y + 2 = 0 ⇔ $x = \frac{-4y+1}{3}$.

Thế vào (1) : $(5y - 2)^2 = 0$ ⇔ y = 2/5 => x = - 1/5 . Hai đường tròn có một điểm chung T nên tiếp xúc nhau tại T(- 1/5 ; 2/5) .Lại có $x_{I'} < x_T < x_I$ nên T ∈ đọan II' , chứng tỏ hai đường tròn tiếp xúc ngòai .

Ghi chú :Có thể chứng minh cách khác x (C) có tâm I(1 ; 2) , bán kính R = 2 . (C') có tậm I'(- 2 ; - 2), bán kính R' = 3 . Vì II' = R + R' = 5 nên hai đường tròn tiếp xúc ngòai . Nhưng với cách này , ta không tìm được tiếp điểm .

b) Tiếp tuyến chung là đường thẳng vuông góc với $\overrightarrow{II'} = (-3;-4)$ và qua T , có phương trình : 3x + 4y – 1 = 0

3.49. a) Khỏang cách từ tâm I đến M là IM = $\sqrt{37} > R = 3$

b) Phương tích của M là : $IM^2 - R^2 = 28$ và độ dài tiếp tuyến là $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Ghi chú : Tổng quát có thê chứng minh được rằng : Phương tích của điểm M(x_0 ; y_0) đối với đường tròn : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ là : $x^2_0 + y^2_0 + 2ax_0 + 2by_0 + c$.

3.50. a) (C) có tâm I(1 ; 1) , bán kính R = 1 . (C') có tâm I'(2 ; - 3) , bán kính R' = 2 . Vì II' = $\sqrt{17}$ > R + R' = 3 nên hai đường tròn cắt nhau . Suy ra chúng có 4 tiếp tuyến chung .

b) Gọi M là điểm chia đọan tiếp tuyến chung TT' theo tỉ số - 2 , thế thì :
$MT = 2MT' \Leftrightarrow MT^2 = 4MT'^2$
$\Leftrightarrow IM^2 - R^2 = 4(I'M^2 - R'^2)$

⇔ $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 4(x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9)$
⇔ $3x^2 + 3y^2 - 14x + 26y + 35 = 0$
Đây là phương trình một đường tròn .

3.51. a) $x + 3y - 5 = 0$ b) $x + 2y - 10 = 0$ hay $x + 2y - 6 = 0$

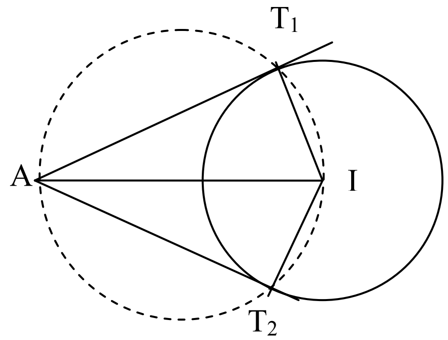
3.52.. a) $x - y + 1 = 0$, $x - y - 11 = 0$
b) $x + y - 3 = 0$, $7x - 17y + 3 = 0$

3.53. c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AT_1T_2 có đường kính là AI , có phương trình : $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$.

* Tọa độ các điểm T_1 , T_2 thỏa hệ :

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \end{cases}$ nên cũng thỏa :

$(x^2 + y^2 - 4x - 1) - (x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5) = 0$
⇔ $-2x + 4y + 4 = 0$ ⇔ $x - 2y - 2 = 0$
Do đó phương trình đường thẳng T_1T_2 là
$x - 2y - 2 = 0$



3.54. a) (C) có tâm I(1 ; 1) , R = 2 . (C') có tâm I'(4 ; 2) . R' = 2 .

Vì R – R' < II' < R + R' nên (C) , (C') cắt nhau .

b) Ta giải tổng quát : Tọa độ (x ; y) của các giao điểm của hai đường tròn thỏa hệ :

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \ \ (1) \\ x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0 \ \ (2) \end{cases}$ => chúng cũng thỏa phương trình :

(1) – (2) : $2(a - a')x + 2(b - b')y + c - c' = 0$

c) Tiếp tuyến chung có VTCP là (3 ; 1) và cách I một khoảng là 2 .

3.55. Bán kinh đường tròn là $r = \frac{S}{p} = 1$. Phương trình phân giác trong góc O là $x - y = 0$. Tọa độ I là (1 ; 1) . Phương trình đường tròn nội tiếp là : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

3.56. a) (C) có tâm I(2 ; 0) , R = $\sqrt{10}$. d = d(I, Δ) = $\frac{|2 + m|}{\sqrt{10}}$

➢ d < R ⇔ $-12 < m < 8$: d và (C) cắt nhau
➢ d = R ⇔ m = 8 hay m = - 12 : d và (C) tiếp xúc

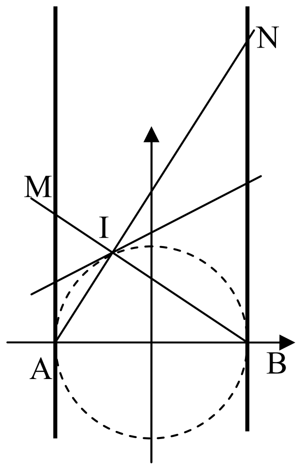
- $d > R \Leftrightarrow m < -12$ hay $m > 8$: d và (C) ngòai nhau .

b) (C) có tâm I (1 ; 2) , R = 1 . $d = d(I, \Delta) = \dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$

- $d < R \Leftrightarrow \dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}} < 1 <=> 6m + 8 < 0 <=> m < -4/3$: d và (C) cắt nhau
- $d = R \Leftrightarrow m = -4/3$: d và (C) tiếp xúc
- $d > R \Leftrightarrow m > -4/3$: d và (C) ngòai nhau

3. 57. a) Phương trình chính tắc AN

qua A(- 1; 0) và N(1 ; n) : $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{n}$ (1)



Phương trình chính tắc BM qua B(1 ; 0)

và M(- 1 ; m) : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-m}$ (2)

b) Tọa độ (x ; y) của I thỏa (1) và (2)

=> (x ; y) thỏa : $\dfrac{x+1}{2}.\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{n}.\dfrac{y}{-m}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{4} = -\dfrac{y^2}{mn} = -\dfrac{y^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Vậy I thuộc đường tròn (O ; 1)

3. 58 (b) **3.59**.(c) **3.60.** (b) **3.61.** (d) **3.62** (d) **3.63** (d)

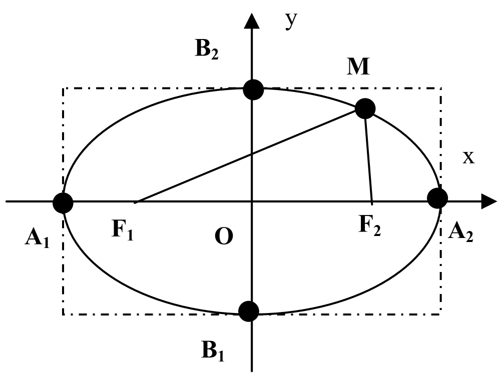
&5 .Êlip

A. Tóm tắt giáo khoa

1. Định nghĩa . Cho hai điểm cố định F_1 , F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và một độ dài không đổi 2a (a > c) Elip là tập hợp những điểm M sao cho :
$$F_1M + F_2M = 2a$$

F_1 , F_2 : tiêu điểm , F_1F_2 : tiêu cự , F_1M , F_2M : bán kính qua tiêu .

2. Phương trình chính tắc .
Với $F_1(- c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$:



M(x ; y) $\in$ (E) $\Leftrightarrow$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **với** $b^2 = a^2 - c^2$. **(1)**

(1) : phương trình chính tắc của (E)

3. Hình dạng của elip .-

* A_1 (- a ; 0) , A_2 (a ; 0) ,
B_1(0 ; - b) , B_2 (0 ; b) : đỉnh .

* Đoạn A_1A_2 = 2a : trục lớn , B_1B_2 = 2b : trục nhỏ .

* Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường x = ± a, y = ± b gọi là hình chữ nhật cơ sở của elip.

* e = $\frac{c}{a} < 1$: tâm sai êlip .

* $F_1M = a + \frac{cx_M}{a} = a + ex_M$; $F_2M = a - \frac{cx_M}{a} = a - ex_M$

B. Giải toán .

Dạng toán 1 : Xác định các yếu tố của êlip

Ví dụ : Hãy xác định đỉnh , độ dài các trục , tiêu cự , tiêu điểm tâm sai và vẽ elip có phương trình sau :

a) (E) : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ b) (E) : $9x^2+16y^2=144$

Giải : a) Ta có : $a^2 = 4$, $b^2 = 1$ => a = 2 và b = 1

Suy ra A_1 (- 2; 0) , A_2 (2 ; 0) , B_1(0 ; - 1) , B_2 (0 ; 1)

Độ dài trục lớn 2a = 4 , trục nhỏ 2b = 2 .

Ta có : c = $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$. Tiêu cự 2c = 2 $\sqrt{3}$, tiêu điểm F_1(- $\sqrt{3}$; 0) , F_2 ($\sqrt{3}$; 0) . Tâm sai : e = c/a = $\sqrt{3}$ /2 .

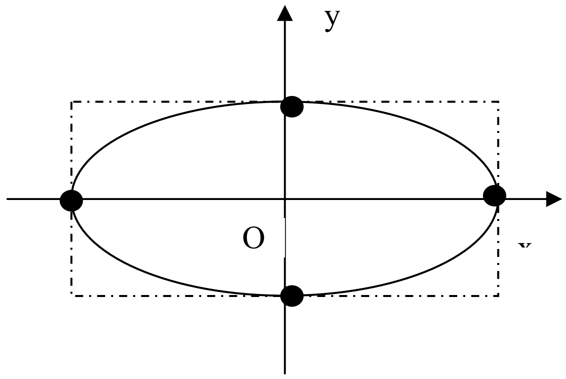
c) Viết lại phương trình (E) : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ => $a^2 = 16$; $b^2 = 9$ => a = 4 , b = 3 và c = $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$

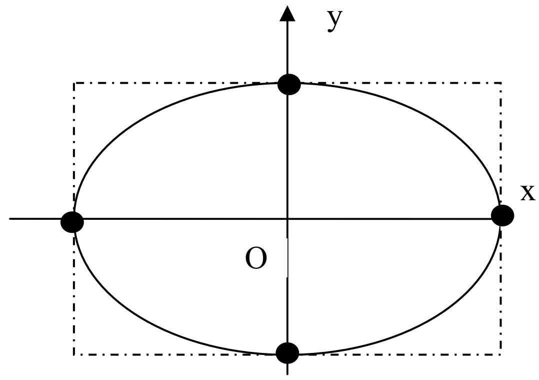
Suy ra A_1 (- 4; 0) , A_2 (4 ; 0) , B_1(0 ; - 3) , B_2 (0 ; 3)

Độ dài trục lớn 2a = 8 , trục nhỏ 2b = 6 .

Tiêu cự 2c = 2$\sqrt{7}$, tiêu điểm F_1(- $\sqrt{7}$; 0) , F_2($\sqrt{7}$; 0) .

Tâm sai e = c/a = $\frac{\sqrt{7}}{4}$





Dạng toán 2 : Lập phương trình chính tắc của êlip :

Từ giả thiết , lập hệ phương trình theo a và b . Giải hệ , tìm được a , b . Suy ra phương trình (E) . Cần nhớ : $M(x_0 ; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} = 1$

Ví dụ 1 : Lập phương trình của elip (E) biết :

a) Có độ dài hai trục là 6 , 4 .
b) (E) có một đỉnh là (5 ; 0) và tiêu cự là 6 .
c) (E) có một đỉnh là (0 ; 3) và (E) qua điểm M(4 ; 1) .
d) (E) qua hai điểm (1 ; $\frac{\sqrt{3}}{2}$) và (- $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$) .
e) (E) có tiêu điểm F_2 (2 ; 0) và qua điểm (2, 5/3)

Giải a) 2 a = 6 = > a = 3 , 2b = 4 = > b = 2 . Phương trình elip là :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

b) Phương trình (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Đỉnh (5 ; 0) $\in$ Ox do đó nó là đỉnh A_2 (a ; 0) . Suy ra : a = 5
Tiêu cự = 2c = 6 $\Leftrightarrow$ c = 3 . Suy ra : $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

Vậy phương trình (E) là : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) Phương trình (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Đỉnh (0 ; 3) $\in$ Oy do đó nó là đỉnh B_2 (0 ; b) . Suy ra : b = 3 và :

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$M(4; 1) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{4^2}{a^2} + \dfrac{1}{9} = 1 <=> \dfrac{16}{a^2} = \dfrac{8}{9} <=> a^2 = 18$

Vậy phương trình (E) : $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) Phương trình (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$(\ 1\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{4b^2} = 1 \ (1)$

$N(-\sqrt{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{4b^2} = 1 \ (2)$

Giải hệ (1) và (2) với hai ẩn là : u = $\dfrac{1}{a^2}, v = \dfrac{1}{b^2}$, ta được : u = ¼ , v = 1 .

Vậy phương trình (E) : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

e) $F_2(2 ; 0)$ => c = 2 . Suy ra : $F_1 (- 2 ; 0)$.

Ta có : $F_2M = \sqrt{(2-2)^2 + \left(\dfrac{5}{3}\right)^2} = \dfrac{5}{3}$, $F_1M = \sqrt{(2+2)^2 + \left(\dfrac{5}{3}\right)^2} = \dfrac{13}{3}$

Theo định nghĩa elip : $2a = F_1M + F_2M = \dfrac{13}{3} + \dfrac{5}{3} = 6 => a = 3$.

Suy ra : $b^2 = a^2 - c^2 = 5$ và phương trình eip là : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5}$

Cách khác : c= 2 = > $a^2 = b^2 + 4$. Phương trình elip : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Thế tọa độ của M , ta được :

$$\frac{4}{b^2+4} + \frac{25}{9b^2} = 1 <=> 36b^2 + 25b^2 + 100 = 9b^4 + 36b^2$$

$$\Leftrightarrow 9b^4 - 25b^2 - 100 = 0 .$$

Giải phương trình trùng phương này , ta được : $b^2 = 5$. Suy ra $a^2 = 9$.

Ví dụ 2 : Cho đoạn AB có độ dài không đổi bằng 3 . Đầu A(0 ; a) di động trên truc hoành , đầu B (b ; 0) di động trên trục tung . M là điểm chia đoạn AB theo tỉ số – 2. Tìm tọa độ của M , suy ra M di động trên một elip .

Giải Gọi (x; y) là tọa độ của M , ta có :

$$\overrightarrow{MA} = -2.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_A + 2x_B}{3} = \dfrac{2b}{3} \\ y = \dfrac{y_A + 2y_B}{3} = \dfrac{a}{3} \end{cases}$$

Vì $a^2 + b^2 = AB^2 = 3$, suy ra : $(3y)^2 + \left(\dfrac{3x}{2}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

Vậy M di động trên elip có phương trình $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

Dạng toán 3 : Tìm điểm thuộc (E)

Cần nhớ : * $M(x_0 ; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x_o^{\ 2}}{a^2} + \dfrac{y_o^{\ 2}}{b^2} = 1 \Leftrightarrow F_1M + F_2M = 2a$.

* $F_1M = a + \dfrac{cx_M}{a}$; $F_2M = a - \dfrac{cx_M}{a}$

Ví dụ 1 : Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

a) Tìm trên (E) điểm M có hoành độ là 2 .

b) Tìm tọa độ giao điểm của (E) và đường thẳng $y = x\sqrt{3} - 2$.

c) Tìm trên (E) điểm M sao cho góc $F_1MF_2 = 90^0$.

d) Tìm trên (E) điểm M thỏa $F_1M - F_2M = \sqrt{6}$

GIẢI a) Thế x = 2 vào phương trình của (E) :

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 <=> y^2 = \frac{4}{3} <=> y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ta tìm được 2 điểm M có tọa độ $(2 ; \dfrac{2}{\sqrt{3}})$, $(2 ; -\dfrac{2}{\sqrt{3}})$.

b) Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \ \ (1) \\ y = x\sqrt{3} - 2 \ \ (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1) : $x^2 + 3(x\sqrt{3} - 2)^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 + 3(3x^2 - 4x\sqrt{3} + 4) = 6$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 6x\sqrt{3} + 3 = 0$

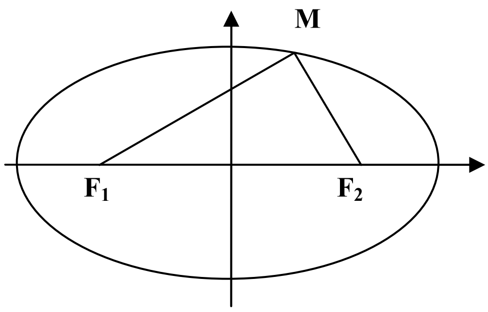
Phương trình này có 2 nghiệm : $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$

Thế vào (2) : $y_1 = x_1\sqrt{3} - 2 = 1$; $y_2 = x_2\sqrt{3} - 2 = -\dfrac{7}{5}$

Ta được 2 điểm có tọa độ $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$.

c) Gọi (x; y) là tọa độ của M . Ta có : $F_1MF_2 = 90^0$ ⇔ $OM = OF_1 = OF_2$

⇔ $\sqrt{x^2 + y^2} = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ ($c^2 = a^2 - b^2 = 6 - 2 = 4$)



Mặt khác vì M ∈ (E) nên tọa độ E thỏa :

$2x^2 + 6y^2 = 12$

Ta có hệ : $\begin{cases} 2x^2 + 6y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

⇔ $\begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Ta tìm được 4 điểm có tọa độ ($\sqrt{3}$; 1) , ($\sqrt{3}$; - 1) , (- $\sqrt{3}$; 1) , (- $\sqrt{3}$; - 1)

d) Theo định nghĩa : $F_1M + F_2M = 2a = 2\sqrt{6}$ mà $F_1M - F_2M = \sqrt{6}$

Suy ra : $F_1M = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$, $F_2M = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Từ đó : $\dfrac{3\sqrt{6}}{2} = a + \dfrac{cx_M}{a} \Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} + \dfrac{2x_M}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow x_M = \dfrac{3}{2}$

Thế lại vào phương trình (E) , ta được :

$$\frac{9}{24} + \frac{y^2}{2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{15}{48} = \frac{5}{16} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{4}$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm ($\dfrac{3}{2}$;$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$) và ($\dfrac{3}{2}$;$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$)

Ví dụ 4 : Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ có tiêu điểm F_1 , F_2. M là điểm bất kì trên (E) .

a) Tìm trên (E) : $x^2 + 4y^2 = 4$ điểm M sao cho $F_1M = 2F_2M$
b) Chứng minh $F_1M . F_2M + OM^2 = a^2 + b^2$.

Giải a) Viết lại phương trình (E) : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ => $a^2 = 4$; $b^2 = 1$ => $c^2 = 3$

Theo chúng minh trên : $F_1M = 2F_2M \Leftrightarrow a + \frac{c}{a}x = 2(\ a - \frac{c}{a}x\ )$

$\Leftrightarrow \frac{3cx}{a} = a <=> x = \frac{a^2}{3c}$

Thế $a^2 = 4$, $c = \sqrt{3}$: $x = \frac{4}{3\sqrt{3}}$. Thế vào phương trình (E) , ta được :

$$\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^2 + 4y^2 = 4 <=> y^2 = \frac{23}{27} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{23}{27}}$$

b) Ta có : $F_1M . F_2M = (a + \frac{c}{a}x)(a-\frac{c}{a}x) = a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2$ (1)

$OM^2 = x^2 + y^2$ (2)

Cộng (1) và (2) : $F_1M . F_2M + OM^2 = a^2 + (1 - \frac{c^2}{a^2})\ x^2 + y^2$

$$= a^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = a^2 + \frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^2}$$

Vì $M \in (E)$ nên $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, suy ra : $F_1M . F_2M + OM^2 = a^2 + b^2$: giá trị không đổi .

C. Bài tập rèn luyện.

3.64 . Xác định độ dài các trục , tọa độ đỉnh , tiêu điểm và vẽ các elip sau :

a) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$ c) $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. 65 . Cho elip (E) : $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Tìm trên (E) :

a) điểm M có tung độ ½ . b) điểm N có tung đô gấp đôi hoành độ .

c) điểm P sao cho góc $F_1PF_2 = 90^0$.

d) tọa độ các đỉnh của hình vuông nội tiếp (E) biết hình vuông có các cạnh song song với các trục tọa độ .

3.66. Cho elip (E) có độ dài trục lớn là 6 và qua điểm M($\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$

a) Lập phương trình (E) .
b) Tính độ dài dây cung của (E) vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm .
c) Tìm trên (E) điểm M cách tâm O một khoảng là $\frac{\sqrt{11}}{2}$ . .

3.67. Lập phương trình (E) biết :
a) tiêu cự 4 và khoảng cách từ một đỉnh đến tiêu điểm là 5 .
b) độ dài trục nhỏ là 4 và một tiêu điểm là (2 ; 0)
c) một tiêu điểm là F_2 (5 ; 0) và khoảng cách giưa hai đỉnh là 9.

3.68. Lập phương trình (E) biết :

a) độ dài trục lớn là 8 và qua điểm (3 ; 2) .

b) qua hai điểm P $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ $,Q\left(2;\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

c) có tiêu cự là 4 và qua điểm (1 ; $\frac{2}{\sqrt{5}}$)

d) qua điểm M$\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và $F_1MF_2 = 90^0$.

3.69 . Cho (E) : $4x^2 + 9y^2 = 36$
a) Xác định tiêu điểm , độ dài các trục .
b) Một đường thẳng thay đổi d : y = x + m . Định m để d cắt (E) tại hai điểm P, Q .
c) Tìm tọa độ trung điểm I của PQ . Chứng tỏ I di động trên một đoạn cố định khi d thay đổi .
d) Gọi P’ và Q’ lần lượt là đối xứng của P và Q qua gốc O . Tứ giác PQP’Q’ là hình gì ? Định m để nó là hình thoi .

3.70. Cho hai êlip : $x^2 + 8y^2 = 16$ và $4x^2 + 9y^2 = 36$. Viết phương trình đường tròn qua các giao điểm của hai êlip .

3.71. Cho đường tròn tâm F_1 (- 2; 0) và bán kính 6 và điểm F_2 (2 ; 0) . M là tâm đường tròn di động qua F_2 và tiếp xúc trong với (F_1) .
Chứng minh M thuộc một êlip (E) . Viết phương trình (E).

*** 3.72.**a) Viết phương trình của (E) **b**iết nó có một tiêu điểm là F(- 2 ; 0) và khoảng cách từ F đến đỉnh trên trục nhỏ là 3 .

b) Hai đường thẳng d : mx – y = 0 và d' : x + my = 0 lần lượt cắt (E) tại M , P và N, Q . Tứ giác MNPQ là hình gì? Tính diện tích của nó theo m .

c) Định m để MNPQ là hình vuông .

***3.73.** Cho êlip : $5x^2 + 9y^2 = 45$ có tiêu điểm F_1 , F_2 . M là điểm bất kì trên (E) .

a) Chứng minh chu vi tam giác F_1MF_2 không đổi . Tìm m để diện tích tam giác F_1MF_2 là 2 đvdt.

b) Tim M sao cho : T = $F_1M + F_2M + \dfrac{1}{F_1M} + \dfrac{1}{F_2M}$ lớn nhất .

***3.74.** Cho đường tròn tâm O , bán kính 2 . AB là đường kính trên Ox. Gọi M, N là hai điểm di động trên tiếp tuyến của (C) tại A và B , có tung độ là m, n luôn thỏa mn = 4.

a) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh I di động trên một elip (E).

c) Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AM và BN .Chứng minh đường tròn đường kính HK qua hai tiêu điểm của (E).

***3.75.** Cho điểm M di động trên êlip : $9x^2 + 16y^2 = 144$. H, và K là hình chiếu của M lên hai trục . Tìm M để diện tích OHMK lớn nhất .

***3.76.** Cho M, N là hai điểm bất kì trên êlip : $4x^2 + 9y^2 = 36$ và không trùng với các đỉnh .Gọi I là trung điểm của MN.

a) Chứng minh tích hệ số góc của đường thẳng MN và đường thẳng OI có giá trị không đổi .

b) Viết phương trình đường thẳng MN biết trung điểm I có tọa độ (1 ; 1)

*** 3. 77.** Cho đường tròn (O; a) và elip (E) : $bx^2 + ay^2 = a^2b^2$.

a) Chứng minh phép co về trục hoành theo hệ số $k = \dfrac{b}{a}$ biến (O) thành (E).

b) Gọi T, M là hai điểm trên (O) (MT cắt Ox) , phép co trên biến đường thẳng MT thành đường thẳng nào . Chứng minh hai đường thẳng đó đồng qui . Khi M tiến về T (T cố định) thì MT , M'T' tiến đến vị trí nào . Suy ra cách vẽ tiếp tuyến của (E) tại một điểm cho trước . Tìm phương trình tiếp tuyến biết tiếp điểm T' có tọa độ (x_0 ; y_0) .

c) Phép co trên biến một hình vuông đơn vị có các canh song song với các trục hay nằm trên hai trục thành hình gì , có diện tích bao nhiêu . Từ đó hãy suy đóan công thức tính diện tích hình êlip.

3.78. Chọn câu đúng : Cho (E) : $6x^2 + 9y^2 = 54$. Khoảng cách từ tiêu điểm đến đỉnh trên trục nhỏ là :

a) $\sqrt{6}$ b) 3 c) $\sqrt{15}$ d) 6

3.79 . Chọn câu đúng : Cho (E) : $4x^2 + 5y^2 = 20$. Khoảng cách giữa hai tiêu điểm là :

a) 1 b) 2 c) 3 d) $2\sqrt{5}$

3.80. Chọn câu đúng : Cho (E) : $3x^2 + 4y^2 = 12$. Điểm M có hoành độ là 1 thuộc (E) . Thế thì F_1M = (F_1 là tiêu điểm bên trái)

a) 3/2 b) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ c) 5/2 d) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

3.81. Chọn câu đúng : Cho (E) : $4x^2 + 9y^2 = 36$. Tính độ dài dây cung vuông góc với Ox và qua tiêu điểm F .

a) 3 b) 4/3 c) $\sqrt{5}$ d) 8/3

3.82. Chọn câu đúng : Tung giao điểm của (E) : $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ với đường tròn

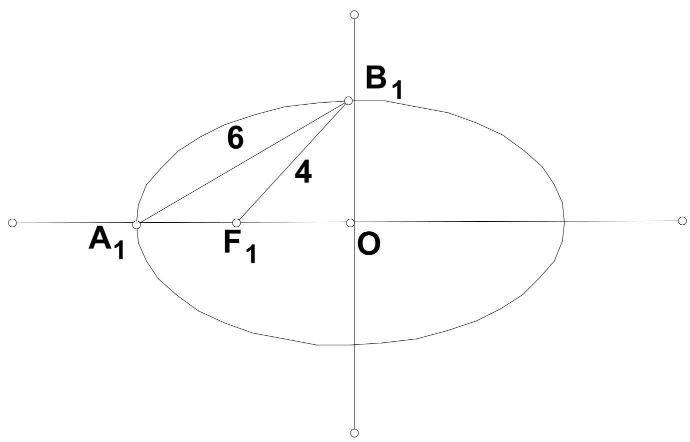
$x^2 + (y - 1)^2 = 1$ gần nhất với số nào dưới đây ?

a) 0 , 86 b) 0 , 88 c) 0, 9 d) 0, 92

3.83. Chọn câu đúng : Elip có hình bên có tiêu cự là :

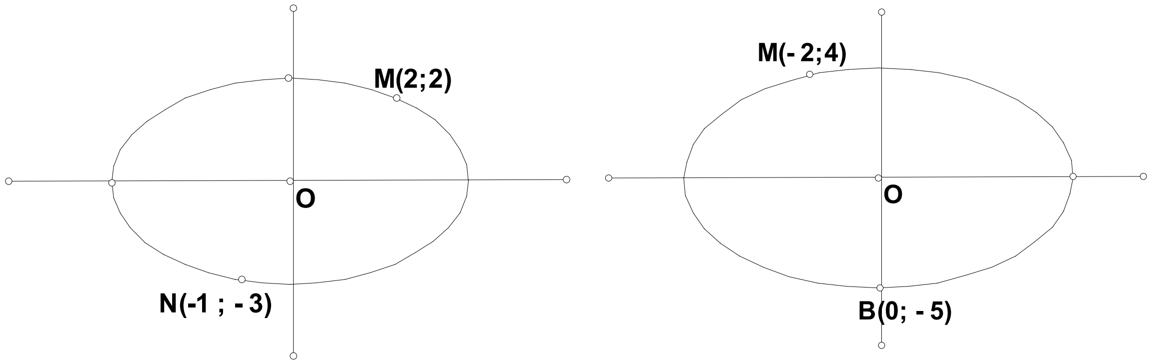
a) 4 b) 6

c) $2\sqrt{11}$ d) $2\sqrt{14}$



3.84. Chọn câu đúng : Elip có hình dưới bên trái có độ dài **trục nhỏ** gần đúng với số nào dưới đây ?

a) $4\sqrt{\frac{8}{3}}$ b) $8\sqrt{\frac{8}{3}}$ c) $2\sqrt{96}$ d) đáp số khác



3.85. Chọn câu đúng : Elip có hình trên bên phải có độ dài **trục lớn** là :
a) 5/ 3 b) 8/3 b) 3 d) 10/3

D. Hướng dẫn giải hay đáp số

3.65. a) Thế y = ½ vào phương trình (E) b) Thế y = 2x vào phương trình (E) .

c) Tọa độ (x ; y) của P thỏa phương trình (E) và $OM^2 = c^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3$

d) Gọi(x ; y) là tọa độ một đỉnh bất kì của hình vuông , ta có hệ :

: $x^2 + 4y^2 = 4$ và $x^2 = y^2$.

3.66. a) a = 3 và $\frac{9}{2a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$ => (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ => c = $\sqrt{5}$

b) Thế x = $\sqrt{5}$: y = ± 4/ 3 => độ dài dây cung là 8/ 3.

c) Điểm (x ; y) cần tìm thỏa hệ : $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = \frac{11}{4} \end{cases}$

3.67. a) c = 2 . Phân biệt cac trường hợp :

(1) $B_2F_2 = \sqrt{b^2 + c^2} = a = 5$.

(2) A_2F_2 = a – c = 5 => a = 7

(3) A_2F_1 = a + c = 5 => a = 3

b) b = 2 , c = 2 .

c) c = 5 . Phân biệt 2 trường hợp :

(1) B_1B_2 = 2b = 9 ⇔ b = 9/ 2

(2) A_1A_2 = 2a = 9 ⇔ a = 9/2 < c : loại .

d) $A_1B_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 81$ và $a^2 - b^2 = c^2 = 25$

3. 68. a) a = 4 và $\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$

b) $\begin{cases} \frac{8}{9a^2} + \frac{1}{9b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{5}{9b^2} = 1 \end{cases}$ c) c = 2 và $\frac{1}{a^2} + \frac{4}{5b^2} = 1$. Thế $a^2 = b^2 + 4$

d) $OM^2 = c^2 = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$. Giải như bài © .

3.69 . b) Thế y = x + m : $4x^2 + 9(x + m)^2 = 36$ ⇔ $13x^2 + 18mx + 9m^2 - 36 = 0$ (1)

YCBT ⇔ $\Delta' \geq 0$ ⇔ $m^2 \leq 13$ ⇔ $-\sqrt{13} \leq m \leq \sqrt{13}$ (*)

c) $I \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-9m}{13} \\ y = x + m = \frac{4m}{13} \end{cases}$ => $y = -\frac{9}{4}x$ với $-\frac{9}{\sqrt{13}} \leq x \leq \frac{9}{\sqrt{13}}$ do (*)

=> I di động trên đoạn thgẳng có phương trình $y = -\frac{9}{4}x$ với $\frac{9}{\sqrt{13}} \leq x \leq \frac{9}{\sqrt{13}}$

d) Do đối xứng PQP'Q' là hình bình hành . Gọi (x_1 ; y_1) và (x_2 ; y_2) lần lượt là tọa độ của P và Q , trong đó $x_{1,\,2}$ là nghiệm của phương trình (1) và $y_{1,2} = x_{1,\,2} + m$.

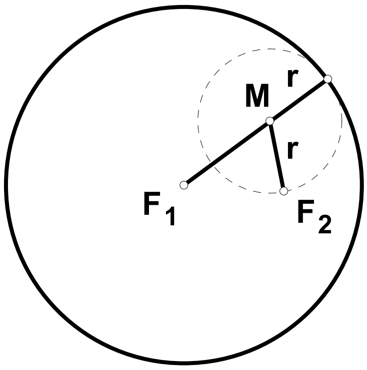
YCBT ⇔ $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1.y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0$

⇔ $2x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0$

Thế $x_1 + x_2 = -18m/13$, $x_1x_2 = (9m^2 - 36)/13$ (định lí Viet của phương trình (1)) , ta được phương trình tính m .

3.70. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x^2 + 8y^2 = 16 \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{144}{23} \\ y^2 = \dfrac{28}{23} \end{cases}$ => $x^2 + y^2 = \dfrac{172}{23}$: Đây là phương trình cần tìm .



3.71. Gọi r = MF_2 là bán kính đường tròn (M) .Ta có : $MF_1 + MF_2 = MF_2 + r = 6$. Do đó M thuộc êlip có 2a = 6 và 2c = 4 . Suy ra : $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$ Phương trình (E) là : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

3.72. a) c = 2 , a = 3 : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

b) Tọa độ M, P : $\begin{cases} 5x^2 + 9y^2 = 45 \\ y = mx \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x = \pm 3\sqrt{\dfrac{5}{9m^2 + 5}} \\ y = \pm 3m\sqrt{\dfrac{5}{9m^2 + 5}} \end{cases}$

Tương tự , tọa độ N, Q : $\begin{cases} 5x^2 + 9y^2 = 45 \\ x = -my \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y = \pm 3\sqrt{\dfrac{5}{5m^2 + 9}} \\ x = \mp 3m\sqrt{\dfrac{5}{5m^2 + 9}} \end{cases}$

Tứ giác là hình thoi vì d và d' vuông góc .

Diện tích hình thoi MNPQ : 4. S_{OMN} = 2 . OM. ON = 2 .

$\sqrt{{x_M}^2 + {y_M}^2}.\sqrt{{x_N}^2 + {y_N}^2}$

$= 18(m^2 + 1)\sqrt{\dfrac{5}{9m^2 + 5}.\dfrac{5}{5m^2 + 9}} = \dfrac{90(m^2 + 1)}{\sqrt{(9m^2 + 5)(5m^2 + 9)}}$

c) YCBT ⇔ OM = ON ⇔ $9m^2 + 5 = 5m^2 + 9$ ⇔ $m = \pm 1$

3.73.a) Chu vi là : 2a + 2c = 6 + 4 = 10 . Diện tích tam giác là : ½ .$|y_M|$. 2c = 2 ⇔ $|y_M| = 1$. Suy ra x_M.

b) $T = 2a + \dfrac{2a}{F_1M.F_2M}$ mà $F_1M.F_2M = a^2 - \dfrac{c^2x^2}{a^2} = 9 - \dfrac{4}{9}x^2$ ($-3 \le x \le 3$)

Vậy T lớn nhất ⇔ $F_1M.F_2M$ nhỏ nhất ⇔ $x^2 = 3$

3.74. a) Phương trình MN : (n – m)x + 4y + 2(m + n) = 0

Ta có : $d(O; MN) = \dfrac{|2(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2-2mn+16}} = \dfrac{2|m+n|}{\sqrt{m^2+n^2+2mn}} = 2$ (vì mn = 4)

=> MN tiếp xúc đường tròn (O; 2) .

b) Xem bài tập 3.57 .

c) Ta chứng minh : $\overrightarrow{F_{1,2}H}.\overrightarrow{F_{1,2}K} = 0$

3.75. Dùng bất đẳng thức Cô si cho hai số

3.76. a) Ta có : $4x_M^2 + 9y_M^2 = 36$ (1) và $4x_N^2 + 9y_N^2 = 36$ (2) .

Lấy (1) – (2) : $4(x_M^2 - x_N^2) = -9(y_M^2 - y_N^2)$

⇔ $4(x_M - x_N)(x_M + x_N) = -9(y_M - y_N)(y_M + y_N)$

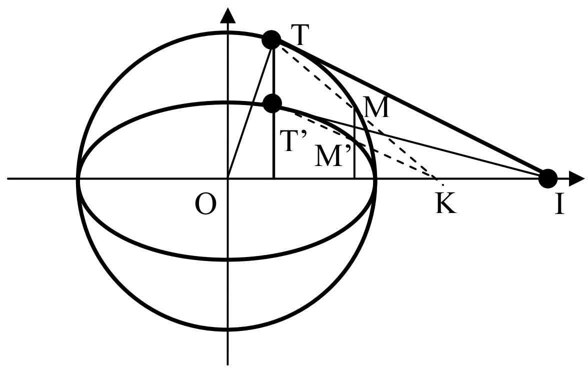
⇔ $\dfrac{y_I}{x_I}.\dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = -\dfrac{4}{9}$ ⇔ $k_{OI} . k_{MN} = -4/9$

b) Hệ số góc của OI là 1 , do đó $k_{MN} = -4/9$. Vậy phương trình MN là :

. . . . .

3.77. b) Các đường thẳng qua T , M và vuông góc với Ox cắt (E) lần lượt tại T' và M' . Đường thẳng TM co lại thành đường thẳng T'M'. Hai đường thẳng này đồng qui tại K ∈ Ox .

Khi M tiến về T , đường thẳng TM biến thành tiếp tuyến của (O) tại T , khi đó đường thẳng T'M' biến thành tiếp tuyến của (E) tại T' . Hai tiếp tuyến này đồng qui tại I với IT vuông góc bán kính OT.



Nếu $(x_0 ; y_0)$ là tọa độ của T' thì $(x_0 ; \frac{a}{b}y_o)$ là tọa độ của T. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại T vuông góc $\overrightarrow{OT} = (x_o; \frac{a}{b}y_o)$ là :

$$x_0(x - x_0) + \frac{a}{b}y_o(y - \frac{a}{b}y_o) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2x_0x + aby_oy = b^2x_0^2 + a^2y_o^2 = a^2b^2 \quad (TI)$$

Thay y bằng $\frac{a}{b}y$ và giữ nguyên x , ta đưọc phương trình tiếp tuyến IT' của êlip tại T' : $b^2x_0x + aby_oy = a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x_ox}{a^2} + \frac{y_oy}{b^2} = 1$

c) Phép co về Ox hệ số k , biến hình vuông đơn vị có cạnh song song hay nằm trên hai trục thanh hình chữ nhật có cạnh song song hay nằm trên hai trục có diện tích là k đvdt .

Diện tích hình tròn là $\prod a^2$. Với sự chọn đơn vị độ dài đủ nhỏ tương ứng với việc làm tròn số $\prod$, hình tròn coi như chứa $\prod a^2$ hình vuông đơn vị . Suy ra qua phép co , hình êlip coi như chứa $\prod a^2$ hình chữ nhật có diện tích $\frac{b}{a}$ đvdt . Do đó hình êlip có diện tích là : $\prod a^2 . \frac{b}{a} = \prod ab$.

3.78 (b) **.** FB = $\sqrt{b^2 + c^2} = a = 3$

3.79 (b) $F_1F_2 = 2c = 2$

3.80 (b) **.** $y_M = \pm\ 3/2 \Rightarrow F_1M = \sqrt{(1+1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 5/2$

3.81 (d) **.** Thế x = $\sqrt{5}$ = c : $9y^2 = 36 - 20 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4/3$
Vậy độ dài dây cung là 8/ 3 .

3.82 (a). Thế $x^2 = 1 - (y - 1)^2$ vào phương trình (E) : $1 - (y - 1)^2 + 4y^2 = 4$
$\Leftrightarrow 3y^2 + 2y - 4 = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm : $y_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{3}; y_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

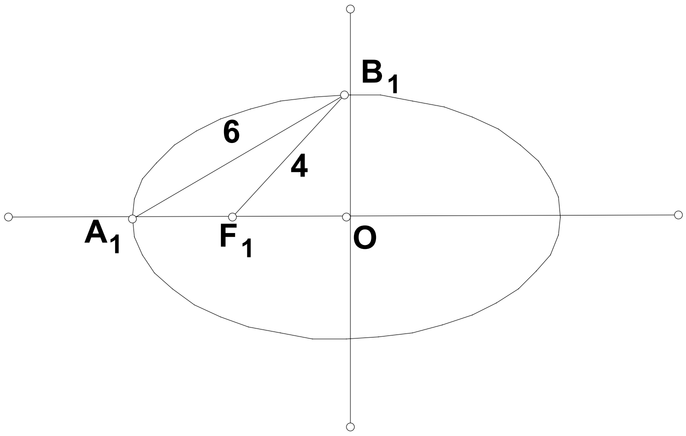
Vì $x^2 = 1 - (y - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq (y - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2$

nên chỉ nhận y = $\frac{\sqrt{13}-1}{3} \approx 0,868$

3.83 (d) . BF = $\sqrt{c^2+b^2} = a$ = 5 , $\sqrt{a^2+b^2} = 6 \Leftrightarrow b^2 = 36 - 25 = 11$.

Suy ra : c= $\sqrt{25-11} = \sqrt{14}$

Vậy tiêu cự là 2 $\sqrt{14}$



3.84 (b**).** Ta có hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1 \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1 \end{cases}$$

Nhân phương trình sau cho 4 rồi trừ với phương trình đầu , ta được :

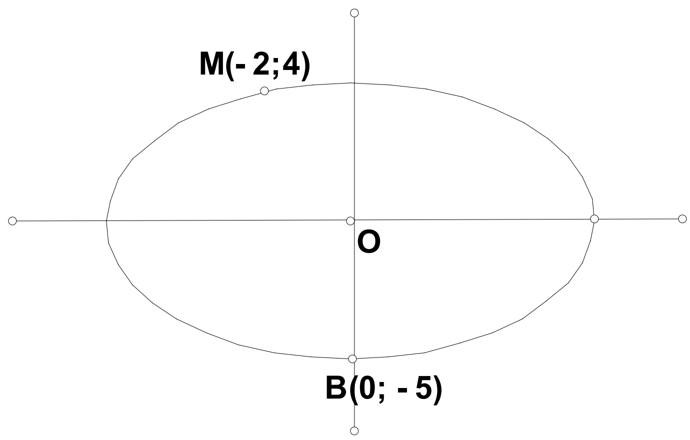
$$\frac{32}{b^2}=3 \Leftrightarrow b=\sqrt{\frac{32}{3}}.$$

Độ dài trục nhỏ là 2 $\sqrt{\frac{32}{3}} = 8\sqrt{\frac{8}{3}}$

3.85 (d) **.**Ta có hệ :

$$\begin{cases} b=5 \\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{16}{25}=1 \end{cases} \Rightarrow a = 10/3$$

Độ dài trục lớn là : 20 / 3 .



* §6. Hypebol

A. Tóm tắt giáo khoa

1.Định nghĩa **.**Cho hai điểm cố định F_1 , F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và một độ dài không đổi 2a (a > c) . Hypebol là tập hợp những điểm M sao cho :

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

F_1 , F_2 : tiêu điểm , F_1 F_2 : tiêu cự .

2. Phương trình chính tắc **:**

Với F_1(- c ; 0) , F_2(c ; 0) :

$$M(x ; y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = c^2 - a^2 \quad \textbf{(1)}$$

(1) : phương trình chính tắc của hypebol .

3. Hình dạng của hypebol .-

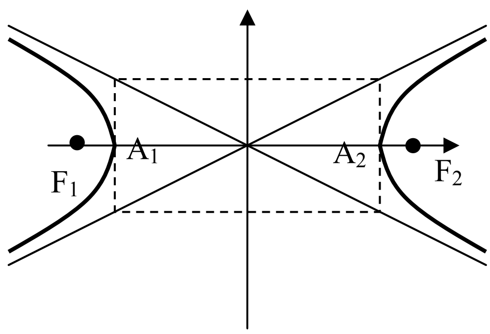
* A_1 (- a ; 0) , A_2 (a ; 0) : đỉnh .

* Ox : trục thực , độ dài 2a . Oy : trục ảo , độ dài 2b .

* Hypebol gồm 2 nhánh : nhánh trái gồm những điểm có $x \leq -a$, nhánh phải gồm những điểm có $x \geq a$.

* Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = \pm a$, $y = \pm b$ gọi là hình chữ nhật cơ sở của hypebol.

* Đường thẳng $y = \pm \frac{b}{a}x$ gọi là hai tiệm cận .



* Tâm sai : $e = \frac{c}{a} > 1$

* F_1M =

$$|ex_M + a| = \begin{cases} \frac{c}{a}x_M + a & ,M \in \text{nhánh phai} \\ -\frac{c}{a}x_M - a & , M \in \text{nhánh trái} \end{cases}$$

$$F_2M = |ex_M - a| = \begin{cases} \frac{c}{a}x_M - a & ,M \in \text{nhánh phai} \\ -\frac{c}{a}x_M + a & , M \in \text{nhánh trái} \end{cases}$$

B. Giải toán .

Dạng toán 1 : Xác định các yếu tố của hypebol

Ví dụ : Hãy xác định đỉnh , độ dài các trục , tiêu cự , tiêu điểm , tiệm cận , tâm sai và vẽ hypebol có phương trình sau :

a) (H) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$. b) (H) : $16x^2 - 9y^2 = 144$

Giải : a) Ta có : $a^2 = 4$, $b^2 = 2$ => a = 2 và b = $\sqrt{2}$

Suy ra đỉnh A_1 (- 2; 0) , A_2 (2 ; 0) .

Độ dài trục thực 2a = 4 , trục ảo 2b = $2\sqrt{2}$.

Ta có : c = $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6}$. Tiêu cự 2c = $2\sqrt{6}$, tiêu điểm F_1(- $\sqrt{6}$; 0) , F_2($\sqrt{6}$; 0) .

Tiệm cận : y = $\pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$. Tâm sai e = c/a = $\sqrt{6}$ /2

b) Viết lại phương trình (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ => $a^2 = 9$; $b^2 = 16$

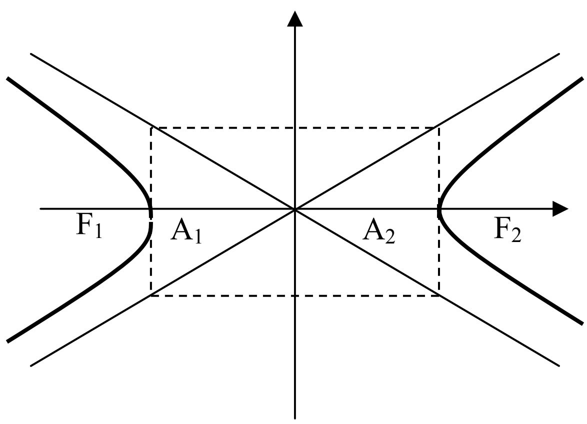
=> a = 3 , b = 4 và c = $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$

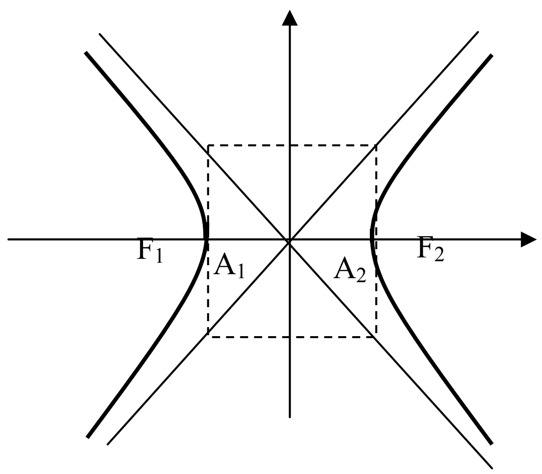
Suy ra A_1 (- 3; 0) , A_2 (3 ; 0) .

Độ dài trục thực 2a = 6 , trục ảo 2b = 8 .

Tiêu cự 2c = 10 , tiêu điểm F_1(- 5 ; 0) , F_2(5; 0) .

Tiệm cận : y = $\pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$. Tâm sai e = c/a = 5/3





Dạng toán 2 : Lập phương trình chính tắc của hypebol

Từ giả thiết , lập hệ phương trình theo a và b . Giải hệ , tìm được a , b . Suy ra phương trình (H) .

Cần nhớ : $M(x_0 ; y_0) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} = 1$

Ví dụ 1 : Lập phương trình của hypebol (H) biết :

a) (H) có độ dài trục thực là 6 , tiêu điểm là (4; 0)

b) (H) có một đỉnh là (5 ; 0) và tiệm cận là y = 2x .

c) (H) có một tiệm cận là $y = -\sqrt{2}\,x$ và qua điểm $M(4 ; \sqrt{2})$.

d) (H) qua hai điểm $(1 ; \sqrt{3})$ và $(-\sqrt{2} ; 2\sqrt{2})$.

e) (H) có tiêu điểm F_2 (3 ; 0) và qua điểm $(3; \frac{4}{\sqrt{5}})$

Giải a) 2 a = 6 = > a = 3 , c = 4 = > $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$.

Phương trình hypebol là :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

b) Phương trình (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Đỉnh (5 ; 0) do đó a = 5.

Tiêu cận y = 2x => $\frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow b = 10$.

Vậy phương trình (H) là : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$

c) Phương trình (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Tiệm cận $y = -\sqrt{2}\,x$ => $\frac{b}{a} = \sqrt{2} \Leftrightarrow b^2 = 2a^2$ (1)

$M(4 ; \sqrt{2})$ thuộc (H) $\Leftrightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1\,(2)$

Thế (1) vào (2) : $\frac{15}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 15$. Suy ra $b^2 = 30$.

Vậy phương trình (H) : $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{30} = 1 = 1$

d) Phương trình (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(1 ; \sqrt{3}) \in (H) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1$ (1)

$N(-\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}) \in (H) \Leftrightarrow \frac{2}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1(2))$

Giải hệ (1) và (2) với hai ẩn là : u = $\frac{1}{a^2}, v = \frac{1}{b^2}$, ta được : u = 5/2 , v = 1/ 2 .

Vậy phương trình (H) : $\frac{x^2}{5/2} - \frac{y^2}{2} = 1$

e) F_2(3 ; 0) => c = 3 . Suy ra : F_1 (- 3 ; 0) .

c = 3 = > $a^2 = 9 - b^2$. Phương trình hypebol : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Thế tọa độ của M , ta được :

$$\frac{9}{9-b^2} - \frac{16}{5b^2} = 1 \iff 45b^2 - 16(9-b^2) = (9-b^2)5b^2$$

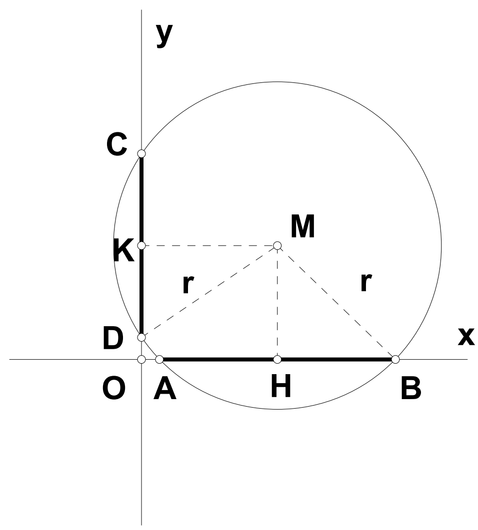
$$\Leftrightarrow 45b^2 - 144 + 16b^2 = 45b^2 - 5b^4$$

$$\Leftrightarrow 5b^4 + 16b^2 - 144 = 0$$

Giải phương trình trùng phương này , ta được : $b^2 = 4$. Suy ra $a^2 = 5$.

Vậy phương trình (H) : $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

Ví dụ 2 : Cho đường tròn (M) di động luôn chắn trên hai trục tọa độ hai dây cung có độ dài là 6 và 4 . Chứng minh tâm đường tròn di động trên một hypebol cố định .



Giải

Gọi M(x ; y) là tâm các đường tròn (M) . Kẻ MH , MK vuông góc Ox và Oy , ta có : HA = HB = 3 , KC = KD = 2

Suy ra : $MB^2 = MD^2 = r^2$

$\Leftrightarrow MH^2 + HB^2 = MK^2 + KD^2$

$\Leftrightarrow y^2 + 9 = x^2 + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$

Chứng tỏ M $\in$ (H) : $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Dạng toán 3 : Tìm điểm trên hypebol

Cân nhớ : * $M(x_0 ; y_0) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow |F_1M + F_2M| = 2a$.

* $F_1M = |\frac{cx_M}{a} + a|$; $F_2M = |\frac{cx_M}{a} - a|$

Ví dụ 1 : Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

a) Tìm trên (E) điểm M có tung độ là $\sqrt{3}$.
b) Tìm trên (H) điểm M sao cho góc $F_1MF_2 = 90^0$.
c) Tìm trên (H) điểm M sao cho $F_1M = 2F_2M$

Giải a) Thế y = $\sqrt{3}$ vào phương trình của (H) :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{(\sqrt{3})^2}{3} = 1 <=> x^2 = 9.\frac{4}{3} <=> x = \pm 2\sqrt{3}$$

Ta tìm được 2 điểm M có tọa độ ($2\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$) , ($-2\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$) .

b) Gọi (x; y) là tọa độ của M . Ta có : $F_1MF_2 = 90^0 \Leftrightarrow OM = OF_1 = OF_2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = c <=> x^2 + y^2 = 12 \quad (c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 3 = 12)$$

Mặt khác vì M $\in$ (H) nên tọa độ E thỏa : $3x^2 - 9y^2 = 27$

Ta có hệ : $\begin{cases} 3x^2 - 9y^2 = 27 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 = \frac{45}{4} \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{3\sqrt{5}}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ta tìm được 4 điểm có tọa độ ($\frac{3\sqrt{5}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$) , ($\frac{3\sqrt{5}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$), ($-\frac{3\sqrt{5}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$) , ($-\frac{3\sqrt{5}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

c) Vì $F_1M = 2F_2M => F_1M > F_2M =>$ M thuộc nhánh phải và

$$F_1M - F_2M = 2a = 6$$

Suy ra $F_2M = 6$ và $F_1M = 12$.

Mà $F_1M = \frac{c}{a}x_M + a = \frac{2\sqrt{3}}{3}x_M + 3 = 12 \quad \Leftrightarrow x = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Thế vào phương trình (H) , ta suy ra : y = $\pm\frac{\sqrt{69}}{2}$. Tọa độ điểm cần tìm :

$(\frac{9\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{\sqrt{69}}{2})$.

Ví dụ 2 : a) Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có tiêu điểm F_1 , F_2.
M là điểm bất kì trên (H) .

a) Chứng minh tích khoảng cách từ M đến hai tiệm cận có giá trị không đổi

b) Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1$. Một đường thẳng d bất kì : y = x + m cắt (H) tại M, N và hai tiệm cận tại P và Q . Chứng minh MP = NQ .

Giải

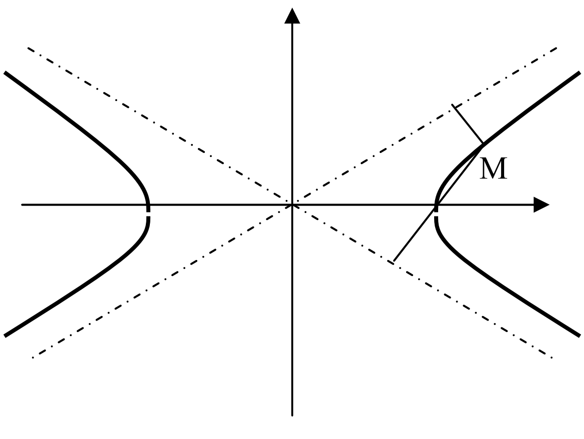
a) Phương trình hai tiệm cận : Δ_1 : bx + ay = 0 và Δ_2 : bx – ay = 0 . Gọi (x; y) là tọa độ của M , ta có :

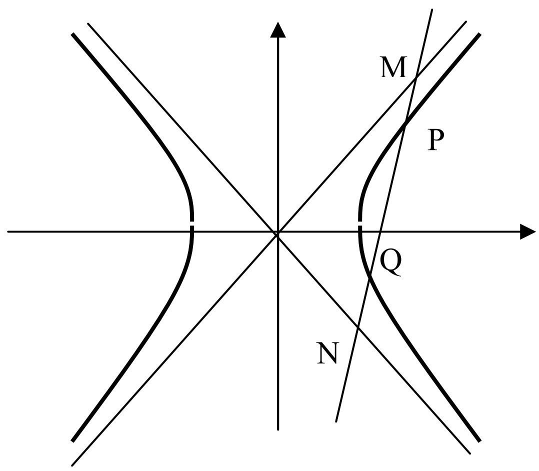
$$d(M; \Delta_1) = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ , } d(M, \Delta_2) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d(M,\Delta_1).d(M,\Delta_2) = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} . \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2 + b^2}$$

Vì M(x; y) thuộc (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ suy ra :

$$d(M,\Delta_1).d(M,\Delta_2) = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{c^2}$$: giá trị không đổi .





b) (H) : $2x^2 - y^2 = 2$.
Phương trình hoành độ giao điểm M, N : $2x^2 - (x + m)^2 = 2$ (thế $y = x + m$ vào phương trình của (H))
$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - m^2 - 2 = 0$ (1)
Phương trình hai tiệm cận : $(\sqrt{2}x + y)(\sqrt{2}x - y) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - y^2 = 0$
Phương trình hoành độ giao điểm P, Q : $2x^2 - (x + m)^2 = 0$ (thế $y = x + m$ vào phương trình hai tiệm cận)
$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - m^2 = 0$ (2)
Nếu (1) có hai nghiệm x_1, x_2 , thế thì hoành độ trung điểm của MN là :

$\frac{1}{2}(x_M + x_N) = \frac{1}{2} . 2m = m$ (định lí Viet của (1))

Nếu (2) có hai nghiệm x_3, x_4 , thế thì hoành độ trung điểm của PQ là :

$\frac{1}{2}(x_P + x_Q) = \frac{1}{2} . 2m$ (định lí Viet của (2))

Chứng tỏ MN và PQ có cùng trung điểm hay MP = NQ.

Ghi chú : Tính chất này đúng với mọi hypebol

C. Bài tập rèn luyện .

3.86 . Xác định độ dài các trục , tọa độ đỉnh , tiêu điểm , tiệm cận và vẽ các hypebol sau :

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $4x^2 - 9y^2 = 36$

3.87 . Cho hypebol (H) : $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

Tìm trên (H) :

a) điểm M có hoành độ 2 .   b) điểm N cách đều hai trục tọa độ .

c) điểm P sao cho góc $F_1PF_2 = 90^0$.

d) tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật nội tiếp (H) biết hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ và có diện tích là $8\sqrt{2}$ đvdt.

e) điểm Q sao cho $F_2Q = 2F_1Q$.

3.88. Cho hypebol (H) có độ dài trục thực là 4 và qua điểm M $\left(\sqrt{5} ; \sqrt{2}\right)$

a) Lập phương trình (H) .

b) Tính độ dài dây cung của (H) vuông góc với trục thực tại tiêu điểm .

c) Tìm giao điểm của (H) và đường tròn đường kính F_1F_2 , F_1 , F_2 là các tiêu điểm của (H) .

3.89. Lập phương trình (H) biết :

a) tiêu cự 8 và khoảng cách từ đỉnh trên trục thực đến tiêu điểm là 1 .

b) độ dài trục ảo là 4 và một tiêu điểm là (3 ; 0)

c) một tiêu điểm là F_2 (5 ; 0) và một tiệm cận là y = 2x .

d) một tiệm cận là y = $\sqrt{3}$ x và qua điểm (3 ; $\sqrt{15}$)

e) một tiêu điểm là (2 ; 0) và qua điểm (3 ; $\sqrt{2}$) .

3.90. Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) biết :

a) độ dài trục thực là 6 và qua điểm ($\sqrt{10}$; 2) .

b) qua hai điểm P $\left(\sqrt{10};2\right)$,$Q\left(\frac{5}{2};1\right)$.

c) có tiêu cự là 4 $\sqrt{2}$ và qua điểm (3 ; $\sqrt{5}$)

3.91. Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) biết :

a) qua điểm M$\left(\sqrt{3};1\right)$ và $F_1MF_2 = 90^0$

b) một tiêu điểm (2 ; 0) và khoảng cách từ nó đến tiệm cận là 1.

c) tiêu điểm là(3 ; 0) và dây cung qua tiêu điểm và vuông góc Ox có độ dài là 5 .

d) một tiệm cận có hệ số góc 2/$\sqrt{5}$ và khỏang cách từ tiêu điểm đến tiệm cận là 2 .

3.92 Cho đường tròn tâm I(- 6; 0) , bán kính 4 và điểm J(6 ; 0) .
(M) là đường tròn di động luôn qua J và tiếp xúc với (I) . Chứng minh tậphợp tâm M các đường tròn M là một hypebol . Viết phương trình hypebol .

3.93 . Cho (H) : $9x^2 - 4y^2 = 36$

a) Xác định tiêu điểm , độ dài các trục và tiệm cận . Vẽ (H) .

b) M tùy ý của (H) , chứng minh rằng : $(F_1M^+F_2M)^2 - 4OM^2$ là một hằng số .

c) Một đường thẳng thay đổi d : x + y + m = 0 . Chứng minh d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt P, Q . Tính độ dài đoạn PQ theo m .

3. 94. a) Viết phương trình của (H) biết nó có một đỉnh là (1 ; 0) và một tiêu điểm là ($\sqrt{5},0$) .

b) Định m để hai đường thẳng d : mx – y = 0 và d' : x + my = 0 đều cắt (H) .

c) Gọi M , P và N, Q lần lượt là giao điểm của d và d' với (H) . Tứ giác MNPQ là hình gì ? Tính diện tích của nó khi m = $\sqrt{2}$.

3.95. Cho (H) : $5x^2 - 4y^{-2} = 20$ và đường thẳng d : 2x – y + m = 0

a) Định m để d cắt (H) tại 2 điểm M, N phân biệt .

b) Tìm tập hợp trung điểm của MN

c) Gọi P, Q lần lượt là đối xứng của M, N qua O . Định m để MNPQ là hình thoi.

3.96. Cho (H) : $x^2 - 3y^2 = 12$

a) Tìm các đỉnh, tiêu điểm , tiệm cận .

b) Tìm trên (H) điểm M sao cho góc $F_1MF_2 = 120^0$.

c) Tìm M $\in$ (H) sao cho : $T = F_1M - F_2M + \frac{1}{F_2M} - \frac{1}{F_1M}$ lớn nhất

d) Cho M bât kì $\in$ (H) , tính tích các khỏang cách từ M đến hai tiệm cận .

3.97. Cho êlip (E) và hypebol (H) biết chúng có cùng tiêu điểm F(2 ; 0) , tiệm cận của (H) chứa đường chéo của hình chữ nhật cơ sở của (E) và hợp với Ox một góc 30^0 .

a) Viết phương trình chính tắc của (E) và (H) .

b) Viết phương trình đường tròn qua các giao điểm của (E) và (H) .

3. 98 . Cho hai điểm A_1 (– 2; 0) và A_2(2 ; 0) . Gọi (I) là đường tròn di động qua A_1 , A_2 và MM' là đường kính của (I) cùng phương với Ox . Chứng minh tập hợp những điểm M, M' là một hypebol .

3.99. Cho đường tròn tâm O , bán kính 1 . Gọi A và A' là hai điểm trên đường tròn có hoành độ là – 1, 1 . Đường thẳng di động x = m ($m \neq 0, \pm 1$) cắt đường tròn tại M và M' (M có tung độ dương) .

a) Tìm tọa độ M và M' .

b) Viết phương trình đường thẳng AM và A'M' . Chứng minh giao điểm của AM và A'M' di động trên một hypebol cố định.

3. 100. Chọn câu đúng :

Cho (H) : $6x^2 - 9y^2 = 54$. Phương trình một tiệm cận là :

a) y = $\frac{\sqrt{6}}{3}x$ b) y = $\frac{3}{\sqrt{6}}x$ c) y = $\frac{6}{9}x$ d) y = $\frac{9}{6}x$

3.101 . Chọn câu đúng :
Cho (H) : $4x^2 - 5y^2 = 20$. Khoảng cách giữa hai tiêu điểm là :
a) 1 b) 2 c) 3 d) 6

3. 102. Chọn câu đúng :
Cho (H) : $3x^2 - y^2 = 3$. Điểm M có tung độ là 3 thuộc (H) . Thế thì

F_1M = (F_1 là tiêu điểm bên trái)
a) 3 b) 4 c) 5 d) đáp số khác

3.103. Chọn câu đúng : Cho (H) : $4x^2 - 9y^2 = 36$. Tính khoảng cách từ tiêu điểm đến một tiệm cận là :

a) 2 b) 3 c) $\frac{2\sqrt{13}}{3}$ d) 4/ $\sqrt{13}$

3.104. Chọn câu đúng : Cho điểm M(x ; y) bất kì thuộc (H) : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Thế thì :$F_1M^2 + F_2M^2 - 2OM^2$ =
a) 6 b) 10 c) 2 $\sqrt{5}$ d) có giá trị thay đổi theo M

3.105. Chọn câu đúng : Hypebol (H) có khoảng cách giữa tiêu điểm bên phải và đỉnh bên trái là 5 và độ dài trục ảo là $2\sqrt{5}$. (H) qua điểm M có hoành độ 3 và tung độ dương gần nhất với giá trị :

a) 2, 1 b) 2, 2 c) 2, 3 d) 2, 4

3.106. Chọn câu đúng : Hypebol (H) qua điểm M ($\sqrt{5}; \sqrt{2}$) và tiệm cận qua điểm ($3\sqrt{2}; 6$) . Vậy tiêu cự của (H) là :
a) 2 b) 4 c) 2 $\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{3}$

3.107. Chọn câu đúng : Hypebol (H) có hai tiệm cận vuông góc nhau và qua điểm M (5; 4) .

a) (H) chỉ qua duy nhất điểm M có tọa độ nguyên dương .

b) Mỗi đường thẳng y = x + m cắt (H) nhiều nhất tại một điểm

c) Cả (a) và (b) đều đúng . d) Cả (a) và (b) đều sai .

D. Hướng dẫn hay đáp số

3.87. b) Thế y = x và y = - x .

c) Tọa độ P thỏa $x^2 + y^2 = c^2$

d) Gọi (x; y) là tọa độ một đỉnh của hình chữ nhật . Ta có : $|xy| = 2\sqrt{2}$

e) $F_2Q - F_1Q = 2a = 2 \Leftrightarrow F_1Q = 1$, $F_2Q = 2$. Lại có : $F_1Q^2 - F_2Q^2 = 4cx_M$.

3.88 a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$.

c) Phương trình đường tròn là : $x^2 + y^2 = 12$

3.89 . a) c = 4 , a = 3 .

b) b = 2 , c = 3 c) c = 5 , b = 2a

d) $b^2 = 3a^2$, $\frac{9}{a^2} - \frac{15}{b^2} = 1$ e) $a^2 = 4 - b^2$, $\frac{9}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$

3.90 a) a = 3 , b = 6 b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $x^2 - y^2 = 4$

3.91. a) $x^2 - y^2 = 2$

b) Khoảng cách từ tiêu điểm đến tiệm cận là : $\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

c) Độ dài dây cung là : $2.\frac{b^2}{a}$

3.92. a) Gọi T là tiếp điểm của (M) và (I) , ta có : MT = MJ $\Leftrightarrow$
MI - IT = MJ (tiếp xúc ngoài)

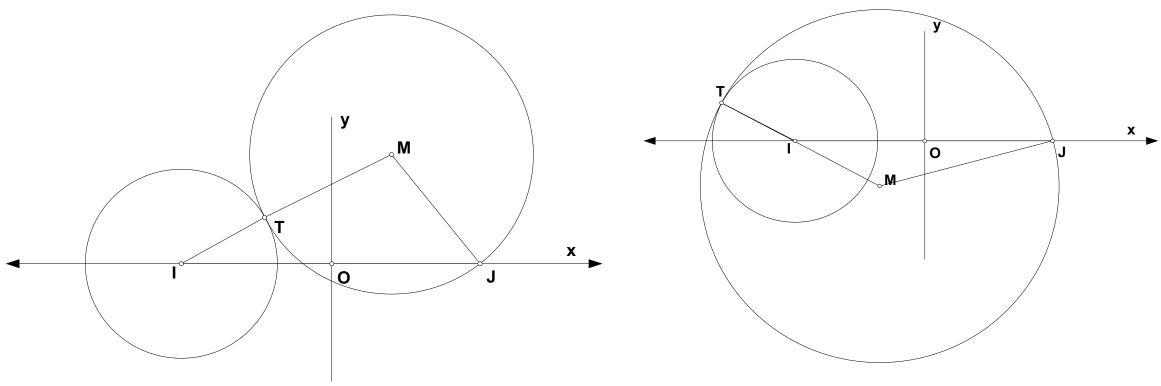
hay MI + IT = MJ (tiếp xúc trong)

MI – MJ = IT = 4 hay MI – MJ = - IT = - 4

$\Leftrightarrow$ |MI – MJ| = 4

Vì I , J cố định nên tập hợp những điểm M là hypebol tiêu điểm I(- 6 ; 0) và J(6 ; 0) và 2a = 8 . Suy ra : $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$.

Vậy phương trình (H) là : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$



3.93. b) Thế y = - x – m vào phương trình (H) , ta được phương trình hoành độ giao điểm : $5x^2 - 8mx - 4m^2 - 36 = 0$.

Phương trình này có Δ ‘ > 0 , với mọi m nên luôn có 2 nghiệm phân biệt .

PQ = $\dfrac{12}{5}\sqrt{2(m^2+5)}$

3. 94 . a) (H) : $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

b) $\begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ 4m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < m < 2 \\ -2 < m < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

c) Tứ giác là hình thoi . Diện tích là $12\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

3.95. a) Phương trình hoành độ giao điểm : $11x^2 + 16mx + 4m^2 + 20 = 0$

Có 2 giao điểm M, N ⇔ Δ > 0 ⇔ m < - $\sqrt{11}$ hay m > $\sqrt{11}$

b) Tọa độ trung điểm I của MN thỏa : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{8m}{11} \\ y_I = 2x_I + m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{11x_I}{8} \\ y_I = 2x_I - \dfrac{11x_I}{8} = \dfrac{5x_I}{8} \end{cases}$

Vì $m < -\sqrt{11}$ hay $m > \sqrt{11}$ $\Leftrightarrow$ $-\dfrac{8}{\sqrt{11}} < x < \dfrac{8}{\sqrt{11}}$ nên tập hợp những điểm I là phần đường thẳng y = 5x/8 ứng với $-\dfrac{8}{\sqrt{11}} < x < \dfrac{8}{\sqrt{11}}$

c) Hình bình hành MNPQ là hình thoi $\Leftrightarrow$ OM vuông góc ON
$\Leftrightarrow$ $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, $(x_{1,2} ; y_{1,2})$ là tọa độ M, N .

3.96. b) Áp dụng định lí hàm cos trong tam giác MF_1F_2 :

$$F_1F_2^2 = F_1M^2 + F_2M^2 + F_1M.F_2M$$

Thế $F_1F_2 = 8$, $| F_1M | = \left|\dfrac{2x}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\right|$; $F_2M = \left|\dfrac{2x}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\right|$, ta được :

$x^2 = 13 \Leftrightarrow x = \ldots$.

c) $T = F_1M - F_2M + \dfrac{F_1M - F_2M}{F_1M.\,F_2M}$

* $M \in$ nhánh trái : $F_1M < F_2M$ => $T < 0$

* $M \in$ nhánh phải : $F_1M > F_2M$ và $F_1M - F_2M = 2a = 4\sqrt{3}$. Suy ra :

$T = 4\sqrt{3} + \dfrac{4\sqrt{3}}{\dfrac{4x^2}{3} - 12}$ với $x^2 \geq a^2 = 12$. Vậy T lớn nhất khi $x^2 = 12$ và

GTLN của T là $5\sqrt{3}$

d) Xem ví dụ 2(Dạng toán 3)

3.97. a) (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;(H) : $\dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{y^2}{B^2} = 1$

Ta có : $a^2 - b^2 = A^2 + B^2 = 4$; $\dfrac{b}{a} = \dfrac{B}{A} = tg30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Suy ra : $a^2 = 6, b^2 = 2$; $A^2 = 3$ và $B^2 = 1$

(E) : $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3y^2 = 6$ (1)

(H) : $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 3$ (2)

b) Giải (1) và (2) : $x^2 = 9/2$; $y^2 = 1/2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$: phương trình đường tròn cần tìm

3.98. Gọi (x ; y) là tọa độ của M , M' . Ta có : $IM = IA_{1,2} = R \Leftrightarrow x^2 = y^2 + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$.

3.99. a) Phương trình đường tròn : $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow A(-1 ; 0)$, A'(1 ; 0) . Tọa độ M (m; $\sqrt{1-m^2}$) , tọa độ M' ($(m ; -\sqrt{1-m^2})$.

b) Phương trình đường thẳng A'M :

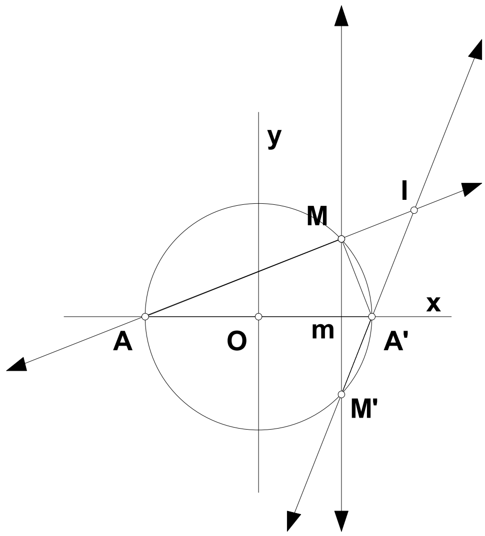
$$\frac{x+1}{m+1} = \frac{y-0}{\sqrt{1-m^2}-0} \quad (1)$$

Phương trình đường thẳng AM'

$$: \frac{x-1}{m-1} = \frac{y-0}{-\sqrt{1-m^2}-0} \quad (2)$$

Nhân (1) và (2) : $\Rightarrow x^2 - y^2 = 1$

=> M thuộc hypebol : $x^2 - y^2 = 1$



3. 100(a)
3.101(d)
3.102(c)
3.103(a)

3. 104(b) Ta biết : $F_1M^2 + F_2M^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) = 2OM^2 + 2c^2$

$\Rightarrow F_1M^2 + F_2M^2 - 2OM^2 = 2c^2 = 10$

3.105(d) . Ta có a + c = 5 và $b^2 = c^2 - a^2 = 5$. Suy ra : c – a = 1 . Vậy c = 3, a = 2 .

Phương trình (H) : $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$. Thế x = 3 : y = 2, 5

3.106. (d) Tiệm cận : y = $\frac{b}{a}x$ qua điểm $(3\sqrt{2}; 6)$ => $b^2 = 2a^2$.

Lại có : $\frac{5}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$. Suy ra : $a^2 = 4$, $b^2 = 8$ => c = 2 $\sqrt{3}$.

3.107. (c) Ta có : b = a = 3 . Phương trình (H) : $x^2 - y^2 = 9$ (1)

* (1) ⇔ (x + y)(x – y) = 9. 1

Vì x, y nguyên dương nên x + y = 9 , x – y = 1 ⇔ x = 5 ; y = 4 . Vậy (a) đúng .

* Phương trình hoành độ giao điểm : $x^2 - (x + m)^2 = 1$ ⇔ $2mx = m^2 + 1$: phương trình này có nghiệm duy nhất nếu m khác 0 và vô nghiệm nêu m = 0 : (b) đúng .

Vậy (c) đúng .

* §7. Parabol

A. Tóm tắt giáo khoa

1. Định nghĩa : Cho điểm F và đường thẳng (Δ) không chứa F . **Parabol** là tập hợp các điểm M sao cho khoảng cách từ M đến F luôn bằng khoảng cách từ M đến (Δ) .

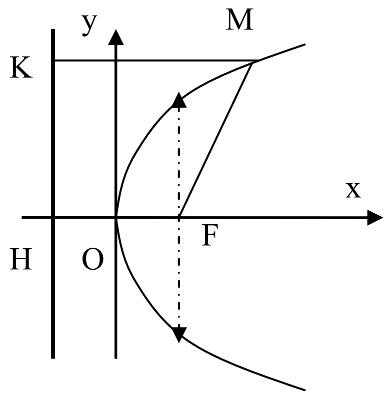
F : tiêu điểm , (Δ) : đường chuẩn của parabol .
P = d(F, Δ) : tham số tiêu

2. Phương trình chính tắc của parabol .

Với F($\frac{p}{2}$;0) và Δ : x = - $\frac{p}{2}$ (p > 0) .

M(x ; y) ∈ (P) ⇔ $y^2 = 2px$ (1) .

(1) : phương trình chính tắc của parabol .



3. Hình dạng của parabol

* O là đỉnh của parabol

* (P) có trục đối xứng là Ox .

* Độ dài của dây cung vuông góc với trục đối xứng tại F có độ dài là 2p. *Tính chất này thường dùng để vẽ parabol .*

* MF = MK = $\frac{p}{2} + x_M$

Ngoài dạng trên , ta còn nhớ các đồ thị các hàm số $y = ax^2$ và $y = ax^2 + bx + c$ cũng là parabol.

B. Giải toán

Dạng toán 1 : Xác định các yếu tố của parabol

Ví dụ 1 : Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của các parabol sau và vẽ các parabol đó : $y^2 = 6x$

Giải 2p = 6 => p = 3 . Tiêu điểm $F(\frac{3}{2};0)$, đường chuẩn : x = - 3/2 .

Dạng toán 2 : Lập phương trình chính tắc của parabol

Ví dụ 1 : Lập phương trình chính tắc của parabol biết :

a) tiêu điểm F(5; 0) . b) qua điểm (2 ; - 4) .

c) qua điểm M có hoành độ 2 và cách tiêu điểm F một khoảng 3

GIẢI **a)** Phương trình (P) có dạng : $y^2 = 2px$ (p > 0) .

Tiêu điểm (5 ; 0) => p/2 = 5 ⇔ p = 10 .

Vậy phương trình (P) : $y^2 = 20x$.

b) Phương trình (P) có dạng : $y^2 = 2px$ (p > 0) .

M(2 ; - 4) thuộc (P) ⇔ $(- 4)^2 = 2p. (2)$ ⇔ p = 4

Vậy phương trình (P) : $y^2 = 8x$

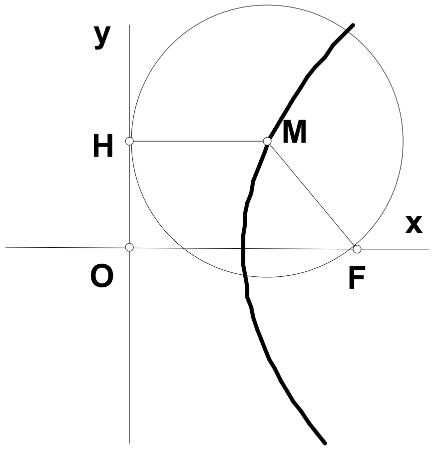
c) Ta có : $\frac{p}{2} + x_M = FM$, suy ra : $\frac{p}{2} + 2 = 3$ ⇔ p = 2 .

Vậy phương trình (P) là : $y^2 = 4x$.

Ví dụ 2 : Cho điểm F (4 ; 0) . Gọi (M) là đường tròn tâm M di động nhưng luôn tiếp xúc với trục tung và qua F . Chứng minh tập hợp những điểm M là một parabol mà ta phải viết phương trình của nó .

Giải Vì (M) tiếp xúc với d nên khoảng cách từ tâm M đến đường thẳng Oy bằng bán kính đường tròn tức bằng FM (vì (M) qua F)) .
Vậy tập hợp những điểm M là parabol (P) tiêu điểm F , đường chuẩn là Oy .

Đặt M = (x ; y) , ta có :



$M(x ; y) \in (P) \Leftrightarrow MF = MH$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = |x|$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 \Leftrightarrow y^2 = 8(x-2)$

Dạng toán 3 : Tìm điểm thuộc parabol

Ví dụ 1 : Cho (P) : $y^2 = 4x$.

a) Tìm trên (P) điểm M cách F một khoảng là 4 .

b) Tìm trên (P) điểm $M \neq O$ sao khỏang cách từ M đến Oy gấp hai lần khỏang cách từ M đến Ox .

Giải p = 2

Ta có : $FM = \frac{p}{2} + x_M = 4 \Leftrightarrow 1 + x_M = 4 \Leftrightarrow x_M = 3$

Suy ra : $y_M^2 = 12 \Leftrightarrow y_M = \pm 2\sqrt{3}$. Ta được 2 điểm $M(3 ; \pm 2\sqrt{3})$

b) Gọi M (x ; y) , ta có :$|x| = 2|y| \neq 0$

Thế $x = |x| = 2|y|$ vào phương trình $y^2 = 4x$: $y^2 = 8|y| \Leftrightarrow |y| = 8$

Suy ra : M = (16 ; 8) hay M = (16 ; - 8)

Ví dụ 2 : Cho parabol (P) : $y^2 = 4x$ và đường thẳng d luôn qua tiêu điểm F và có hệ số góc là $1/k$ ($k \neq 0$)

a) Viết phương trình đường thẳng d và viết phương trình tung độ giao điểm của d và (P) . Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm M, N và tích khoảng cách từ M và N đến trục đối xứng của parabol có giá trị không đổi .

b) Định k để $MN = 2\sqrt{5}$.

c) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M và N lên đường chuẩn Δ . Chứng minh đường tròn đường kính MN luôn tiếp xúc với đường chuẩn .

GIẢI a) Tiêu điểm F có tọa độ (1 ; 0) . Phương trình đường thẳng d :

$$y - 0 = \frac{1}{k}(x - 1) \Leftrightarrow x = ky + 1$$

Phương trình tung độ giao điểm của d và (P) :

$$y^2 = 4(ky + 1) \Leftrightarrow y^2 - 4ky - 4 = 0 \ (1)$$

$\Delta' = 4k^2 + 4 > 0$ với mọi k nên (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt , chứng tỏ d luôn cắt (P) tại 2 điểm . Chú ý trục đối xứng của (P) là Ox và khoảng cách từ M và N đến Ox chính là $|y_M|$ và $|y_N|$. Do đó tích các khoảng cách này là :

$|y_M| \cdot |y_N| = | \; y_M y_N | = \left|\frac{c}{a}\right| = |-4| = 4$ (định lí Viet của (1)) (giá trị không đổi) .

b) Gọi x_1 , x_2 lần lượt là hoành độ của M , N . Ta có :

$$FM = \frac{p}{2} + x_1 = 1 + x_1 \text{ , } FN = \frac{p}{2} + x_2 = 1 + x_2$$

Lại có : $x_1 = ky_1 + 1$, $x_2 = ky_2 + 1$, do đó : MN = FM + FN = $4 + k(y_1 + y_2)$

Thế : $y_1 + y_2 = 4k$ (định lí Viet của (1)) , ta được :

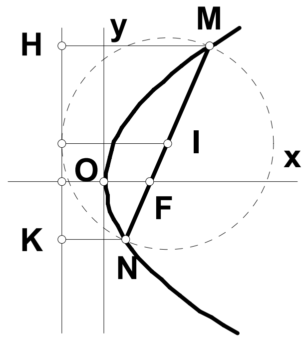
$$4 + k(y_1 + y_2) = 4 + 4k^2 .$$

Và YCBT $\Leftrightarrow 4 + 4k^2 = (2\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2$.

c) Kẻ MH , NK vuông góc Δ . Ta chứng minh khoảng cách từ tâm I của đường tròn đến đường chuẩn Δ thì bằng bán kính đường tròn . Theo định nghĩa parabol :

FM = MH , FN = NK

Suy ra : M N = FM + FN = MH + NK = 2 d(I , Δ) với I là trung điểm của MN , cũng là tâm đường tròn đường kính MN . Hay : $d(I, \Delta) = \frac{MN}{2}$ = bán kính (đpcm)



BÀI TẬP

3.108. Tìm tiêu điểm , đường chuẩn và vẽ parabol các phương trình sau :

a) $y^2 = 5x$ b) $y^2 = 6x$

3.109. Cho parabol (P) : $y^2 = 8x$.

a) Tìm độ dài dây cung AB của parabol biết hoành độ A và B là 1 .

b) Tìm trên (P) điểm cách tiêu điểm F một khoảng là 5 .

c) Tìm m để đường thẳng d : x + y + m = 0 có với (P) điểm chung duy nhất .

3.110. Cho (P) : $y^2 = 4x$.

a) Tìm trên (P) điểm cách đường thẳng d : $3x - 4y + 10 = 0$ một khoảng ngắn nhất .

b) Cho A và B là hai điểm trên (P) có tung độ - 2 và 4 . M là điểm cung AB co tung độ y ($-2 \leq y \leq 4$) .Tính diện tích tam giác MAB theo y . Định y để diện tích tam giác MAB nhỏ nhất .

c) Tìm m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt (P) tại hai điểm M, N và FM = 2FN .

3.111. Lập phương trình chính tắc của parabol :

a) qua điểm (2; 2) .

b) có đường chuẩn qua điểm (5; 7) .

c) biết khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là 6 .

d) biết nó qua điểm có hoành độ là 4 và cách đường chuẩn một khoảng là 6.

3.112. Lập phương trình chính tắc của parabol :

a) biết nó qua điểm có tung độ là 4 và cách tiêu điểm một khoảng là 5.

b) biết nó qua hai điểm M , N có tung độ là - 1, 3 và thẳng hàng với tiêu điểm .

c) biết nó qua điểm M có tung độ là 2 và cách đường chuẩn một khỏang là 5/2 .

3.113. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$. AB là dây cung di động của (P) .

a) Biết AB có hệ số góc không đổi là k khác 0 , chứng minh trung điểm I của AB di động trên đường thẳng cố định .

b) Viêt phương trình đường thẳng AB biết trung điểm của nó có tọa độ (2 ; 4)

3.114. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x = 0$ và đường tròn (M) di động tâm M luôn tiếp xúc ngoài với (C) và trục Oy tại hai điểm phân biệt . Chứng minh M di động trên một parabol cố định mà ta phải viết phương trình của nó .

3.115. Cho đường tròn (O) : $x^2 + y^2 = 4$. M là điểm tùy ý trên (O) có hình chiếu là H lên Ox. Gọi A là điểm trên (O) có tung độ – 2 . .

a) Gọi (x_0 ; y_0) là tọa độ của M , viết phương trình OM và AH .

b) Suy ra giao điểm I của OM và AH di động trên một parabol .

3.116. Cho parabol (P) : y = $\frac{1}{4}x^2$

a) Xác định đường chuẩn Δ , tiêu điểm F và vẽ (P) .

b) M là điểm di động trên Δ và có hoành độ là m . Viết phương trình trung trực (t) của FM .

c) Chứng minh (t) và (P) có điểm chung duy nhất.. Tìm tọa độ điểm chung.

3.117. Cho parabol (P) : $y^2 = 4x$. Một đường thẳng d qua tiêu điểm F và có hệ số góc là $k \neq 0$ cắt (P) tại M, N .

a) Chứng minh tích các khỏang cách từ M và N đến trục Ox có giá trị không đổi .

b) Tìm k sao cho FM = 4FN.

c) Chứng minh góc MON luôn tù .

3.118. Cho (P) : $y^2 = 8x$.

a) Xác định tiêu điểm F , đường chuẩn Δ .

b) Một đường thẳng quay quanh tiêu điểm F có hệ số góc $k \neq 0$, cắt (P) tại M , N . Chứng minh tích các khỏang cách từ M, N đến trục tung có giá trị không đổi .

c) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M, N lên đường chuẩn . Tính diện tích hình thang MNHK theo k .

3.119. Cho (P) : y = $\frac{1}{4}x^2$.

a) Tìm tiêu điểm F và đường chuẩn của (P) .

b) Một đường thẳng bất kì qua F có hệ số góc là m cắt (P) tại M, N . Tìm tọa độ trung điểm I của MN . Suy ra I di động trên một parabol cố định .

3.120. Cho parabol (P) : $y^2 = 2x$. Hai đường thẳng qua O và vuông góc có hệ số góc lần lượt là k và $-1/k$ ($k \neq 0$) lại cắt (P) tại M và N .

a) Tìm tọa độ M, N .

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định .

c) Chứng minh trung điểm của MN $\in$ một parabol cố định .

3.121. Cho parabol (P) : $y^2 = 4x$ và đường thẳng Δ di động có phương trình y = m ($m \neq 0$) .

a) Xác định tiêu điểm F và đường chuẩn Δ .

b) Δ lần lượt cắt Δ , Oy và (P) lần lượt tại K, H , M. Tìm tọa độ các điểm đó

c) Gọi I là trung điểm OH . Viết phương trình đường thẳng IM và chứng tỏ đường thẳng IM cắt (P) tại một điểm duy nhất .

d) Chứng minh MI vuông góc KF . Từ đó suy ra MI là phân giác của góc KMF.

3.122. Trong mặt phẳng Oxy, cho A(1 ; 1) , A' (1 ; - 1) . Gọi M là điểm di động trên Oy có tung độ là m .

a) Viết phương trình hai đường cao của tam giác MAA' .

b) Chứng minh trực tâm H của tam giác MAA' thuộc một parabol cố định

3.123. Chọn câu đúng : Phương trình chính tắc của parabol mà khỏang cách từ đỉnh tới tiêu điểm bằng 3/ 4 là :

a) $y^2 = \frac{3}{4}x$ b) $y^2 = \frac{3}{2}x$ c) $y^2 = 3x$ d) $y^2 = 6x$

3.124 . Chọn câu đúng : Điểm M $\in$ (P) : $y^2 = 4x$ và FM = 3 thì hòanh độ của M là a) 1 b) 3 c) 3/2 d) 2

3. 125. Chọn câu đúng : Đường thẳng d : $x - 2y + 5m - 1 = 0$ có một điểm chung duy nhất với (P) : $y^2 = mx$ ($m \neq 0$) , vậy m là :

a) số nguyên lẻ b) số nguyên chẵn

c) số hữu tỷ không nguyên d) số vô tỉ

3.126. Chọn câu đúng : Một tam giác đều OMN có 3 điểm thuộc (P) : $y^2 = 8x$. Vậy cạnh tam giác đều gần nhất với số nào dưới đây :

a) 26 b) 27 c) 28 d) 29

3.127. Chọn câu đúng : Có hai parabol qua điểm M có tung độ là 6 và cách tiêu điểm một khỏang là 19 .Tổng hai tham số tiêu của chúng là :

a) 38 b) 72 c) 18 d) đáp số khác

3.128. Chọn câu đúng : Cho parabol (P) , độ dài dây cung MN của parabol vuông góc Ox là 3 . Vậy khỏang cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là :

a) 12 b) 3 c) 6 d) đáp số khác

3.129. Chọn câu đúng : Cho (P) : $y^2 = 16x$. Một đường thẳng qua tiêu điểm F và có hệ số góc là 1 cắt (P) tại M, N . Tính độ dài MN .

a) 28 b) 32 c) 40 d) 20

3. 130. Chọn câu đúng : Cho (P) : $y^2 = 8x$. Một đường thẳng qua tiêu điểm F và có hệ số góc là m > 0 , cắt (P) tại M, N . Biết |FM – FN| = 3 , thế thì m =

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}/3$ c) $\sqrt{2}$ d) $2/\sqrt{3}$

D. Hướng dẫn hay đáp số

3.109. a) Tọa độ A(1 ; $2\sqrt{2}$) và B(1 ; $2\sqrt{2}$) . Độ dài AB = $4\sqrt{2}$.

b) Gọi x_0 là hoành độ điểm cần tìm , ta có : FM = $\frac{p}{2} + x_o$ = 2 + x_0 = 5 ⇔ x_0 = 3

Suy ra tọa độ điểm cần tìm là (3 ; ± $6\sqrt{2}$)

c) Thế x = - y – m vào phương trình của (P) , ta được phương trình tung độ giao điểm của d và (P) : $y^2 = 8(- y – m)$ ⇔ $y^2 + 8y + 8m = 0$ (1)

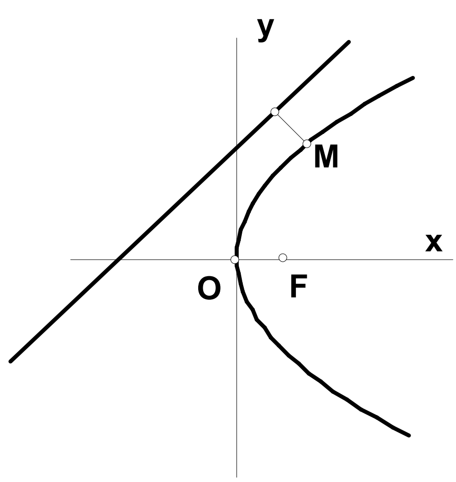
YCBT ⇔ (1) có nghiệm duy nhất ⇔ Δ’ = 16 – 8m = 0 ⇔ m = 2

3.110.. a) Gọi M(x_0 ; y_0) là điểm cần tìm , ta có :

$$d(M , d) = \frac{|3x_o - 4y_o + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x_o - 4y_o + 5|}{5}$$

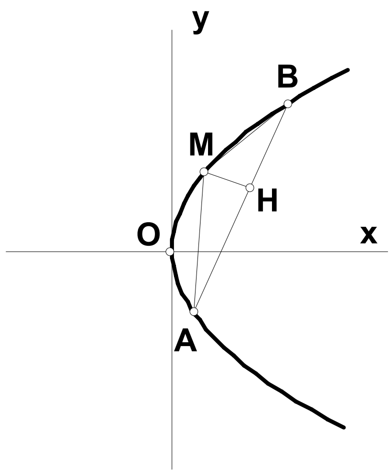
Thế $x_0 = \frac{y_o^2}{4}$ (vì M ∈(P)) , ta được : d(M , d) =

$$\frac{\left|3\frac{y_o^2}{4} - 4y_o + 10\right|}{5} = \frac{|3y_o^2 - 16y_o + 40|}{20}$$



Ta có : $3y_0^2 - 16y_0 + 40 = 3\left(y_o^{\,2} - \frac{16}{3}y_o + \frac{40}{3}\right) = 3\left[(y_o - \frac{8}{3})^2 + \frac{56}{9}\right] > 0$

Suy ra : $d(M , d) = \dfrac{3\left[(y_o - \frac{8}{3})^2 + \frac{56}{9}\right]}{20} \geq \dfrac{56}{60} = \dfrac{14}{15}$.



Vậy GTNN của d(M, d) là 14/ 14 , đạt được ($y_0 - \frac{8}{3})^2 = 0$ ⇔

$y_0 = \dfrac{8}{3}$

b) Tọa độ A(1 ; - 2) , B(4 ; 4) , M(x; y) .

Ta có : AB = $\sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$

Phương trình đường thẳng AB : 2x – y – 4 = 0

Khoảng cách từ M đến AB : $\dfrac{|2x - y - 4|}{\sqrt{5}}$

Diện tích MAB : S = ½ . 3 $\sqrt{5}.\dfrac{|2x - y - 4|}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{2}|2x - y - 4|$

Thế x = y^2 / 4 , ta được : S = $\dfrac{3}{4}|y^2 - 2y - 8| = \dfrac{3}{4}\,|(y+2)(y-4)|$

Vì $-2 \leq y \leq 4$ nên $(y + 2)(y - 4) \leq 0$, suy ra :

$$S = \frac{3}{4}\,(-y^2 + 2y + 8) = \frac{3}{4}\,\left[9 - (y-1)^2\right] \leq \frac{27}{4}$$

Vậy S nhỏ nhất khi y = 1

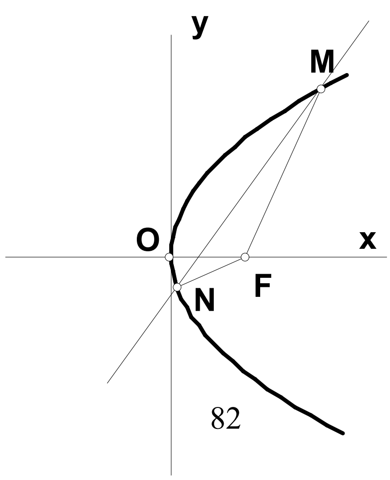
c) Phương trình hoành độ M , N : $(x + m)^2 = 4x$ ⇔ $x^2 + 2(m - 2)x + m^2 = 0$ (1)

$\Delta' = -4m + 4 \geq 0$ ⇔ $m \leq 1$.

Nghiệm x_1 , x_2 là hoành độ của M và N . Ta có : FM = 1 + x_1 , FN = 1 + x_2.

FM = 2FN ⇔ $x_1 - 2x_2 = 1$ (1)

Theo Viết : $x_1 + x_2 = 2 - m$ (2) , $x_1.x_2 = m^2$ (3)



Giải (1) và (2) : $x_1 = \dfrac{5-2m}{3}, x_2 = \dfrac{1-m}{3}$

Thế vào (3) : $7m^2 + 7m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-7 \pm \sqrt{189}}{14}$

3.111. a) $y^2 = 2x$ b) $x^2 = \sqrt{3}y$ c) $y^2 = 12x$

d) y2 = 2px . Ta có : FM = $\dfrac{p}{2} + x = 6 \Leftrightarrow p = 4$

3.112.

a) $y^2 = 2px$. Ta có : $16 = 2px \Leftrightarrow x = 8/p$.

Khoảng cách là : FM = $\dfrac{p}{2} + x = 6 \Leftrightarrow \dfrac{p}{2} + \dfrac{8}{p} = 5 \Leftrightarrow p^2 - 10p + 16 = 0$

$\Leftrightarrow p = 2$ hay $p = 8$.

b) $y^2 = 2px$. $F(\dfrac{p}{2};0)$, $M(\dfrac{1}{2p};-1), N(\dfrac{9}{2p};3)$

F, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{1}{2p} - \dfrac{p}{2}}{-1-0} = \dfrac{\dfrac{9}{2p} - \dfrac{p}{2}}{3-0} \Leftrightarrow p^2 = 3 \Leftrightarrow p = \sqrt{3}$

c) Theo định nghĩa parapol : d(M, Δ) = FM = 5/ 2 $\Leftrightarrow \dfrac{p}{2} + x = \dfrac{5}{2}$ (1)

(x : hoành độ của M) . Lại có : $y^2_M = 2px_M \Leftrightarrow 4 = 2px \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{p}$ (2)

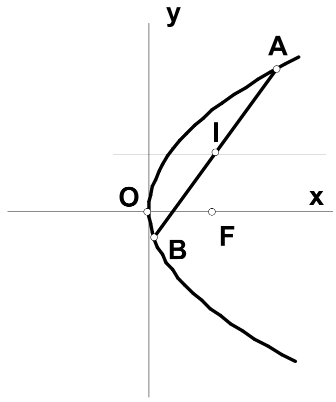
Thế (2) vào (1) : $\dfrac{p}{2} + \dfrac{2}{p} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow p^2 - 5p + 4 = 0 \Leftrightarrow p = 1$ hay $p = 4$

Vậy ta tìm được 2 parabol (P_1) : $y^2 = 2x$ và (P_2) : $y^2 = 8x$

3.113. a) Gọi $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ là tọa độ của A và B , ta có :

$y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2 \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 = 2p(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{2p}{y_1 + y_2} = k \Rightarrow y_I = p/k$

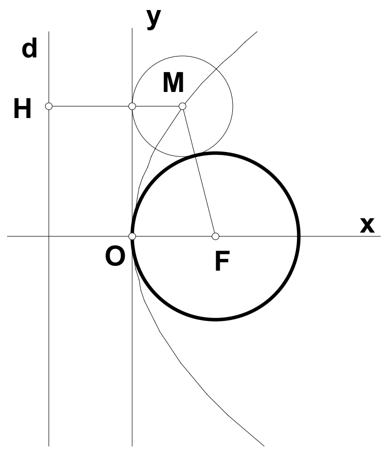


Vậy I di động trên đường thẳng y = p/ k song song với Ox .

b) $y_1 = p/k = 4 \Leftrightarrow k = p/4$.

Vậy phương trình AB : $y - 4 = \dfrac{p}{4}(x - 2)$

$\Leftrightarrow px - 4y - 2p + 16 = 0$



3.114.: Vẽ đường thẳng d song song với Oy và cách trục Oy một khoảng bằng bán kính đường tròn (C) có tâm F(2 ; 0) . Thế thì :

FM = d(M, d) = R + r

Vậy tập hợp những điểm M là parabol tiêu điểm F (2; 0) , đường chuẩn x = - 2 => p = 4=> phương trình parabol là : $y^2 = 8x$.

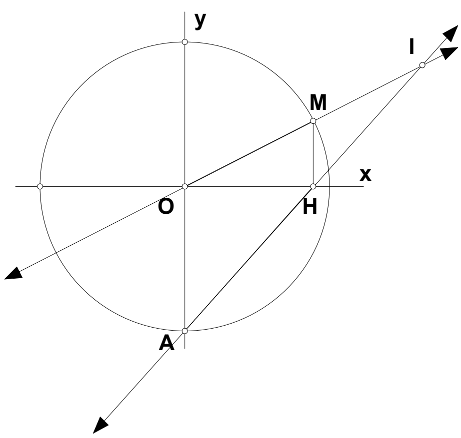
3.115.a) Phương trình OM : $y_0x - x_0y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x_o} = \dfrac{y}{y_o}$ (1)

Tọa độ H (x_0 ; 0) , A(0 ; - 2) , phương trình AH :

$$\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y+2}{0+2} <=> \frac{x}{x_o} = \frac{y+2}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) : $\dfrac{y+2}{2} = \dfrac{y}{y_o} <=> y_o = \dfrac{2y}{y+2}$,

$x_o = \dfrac{2x}{y+2}$



$x_0^2 + y_0^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \left(\dfrac{2x}{y+2}\right)^2 + \left(\dfrac{2y}{y+2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + \ y^2 = y^2 + 4y + 4$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x^2 - 1$

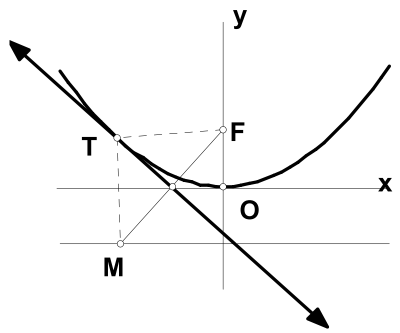
Vậy I di động trên parabol có phương trình : y =

- $\frac{1}{4}x^2 - 1$

3.116.a) y = $\frac{1}{4}x^2$ ⇔ $x^2 = 4y$. Suy ra p = 2 . Vậy F = (0 ; 1) và đường chuẩn Δ : y = - 1 .

b) Phương trình đường chuẩn : y = - 1 => y_M = - 1 . Suy ra tọa độ của M (m ; - 1) . Vậy tọa độ trung điểm I của FM là

$$\left(\frac{m}{2};\frac{1-1}{2}\right) = \left(\frac{m}{2}; 0\right)$$



Phương trình (t) qua I ($\frac{m}{2}$; 0) và vuông góc với $\overrightarrow{FM} = (m;-2)$ là :

$$m(x - \frac{m}{2}) - 2(y - 0) = 0 \Leftrightarrow mx - 2y - \frac{m^2}{2} = 0$$

c) Tọa độ điểm chung của (t) và (P) thỏa hệ : $\begin{cases} x^2 = 4y \ \ (1) \\ mx - 2y - \dfrac{m^2}{2} = 0 \ \ (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) : $2mx - x^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép $x_1 = x_2 = m$, chứng tỏ (P) và (t) có điểm chung duy nhất (x = m ; y = $\frac{m^2}{4}$)

3.117. a) Phương trình d : y = kx – k.. Phương trình hoành độ giao điểm :

$$(kx - k)^2 = 4x \Leftrightarrow k^2x^2 - 2(k^2 + 2)x + k^2 = 0 \ \ (1)$$

Phương trình luôn có hai nghiệm x_1 , x_2 .

Tích các khỏang cách : $|y_1|.\ |y_2| = 2.\sqrt{x_1}.2\sqrt{x_2} = 4\sqrt{x_1x_2} = 4.1 = 4$: giá trị không đổi .

b) FM = 4FN ⇔ $1 + x_1 = 4(1 + x_2) \Leftrightarrow x_1 = 4x_2 + 3$

Thế vào : $x_1 . x_2 = 1$, ta được : $4x_2^2 + 3x_2 - 1 = 0$ . . ..

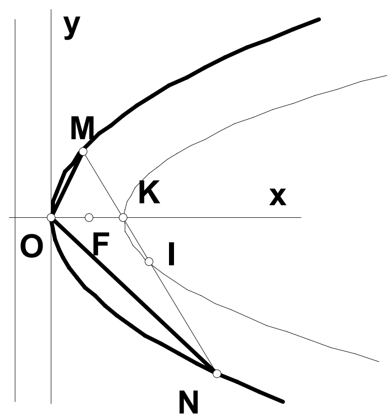
c) Ta chứng minh : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2 < 0$
Chú ý : $y_1 = k(x_1 - 1)$, $y_2 = k(x_2 - 1)$

3.118. b) Giải tương tự như bài 3.117.
c) Chú ý : MH + NK = MF + NF = MN , HK = $|y_M - y_N|$

3.119. a) (P) : $x^2 = 4y$ => F(0 ; 1) , Δ : y + 1 = 0
b) Phương trình đường thẳng : y = mx + 1 . Phương trình hoành độ giao điểm :
$x^2 - 4mx - 4 = 0$
Phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi k và tọa độ I :

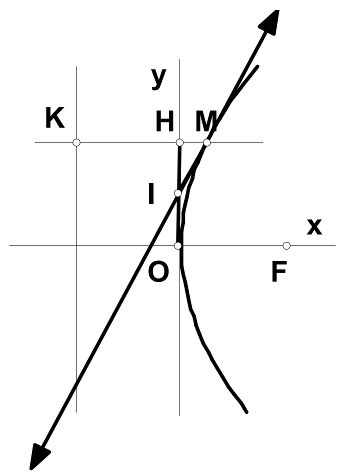
$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 2m \\ y_I = mx + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y_I = \frac{x_I^{\;2}}{2} + 1$$

I di động trên parabol (P') : $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$ Tập hợp



3.120. a) d : y = kx ; d' : $y = -\dfrac{x}{k}$. M($2/k^2$; 2/k) , N($2k^2$; - 2k)
b) Phương trình MN : $k(x - 2) + (k^2 - 1)y = 0$ => MN luôn qua điểm cố định K (2 ; 0) .
c) Tọa độ I : $\begin{cases} x_I = k^2 + \dfrac{1}{k^2} \\ y_I = \dfrac{1}{k} - k \end{cases}$ => $y^2_I = x_I - 2$ => I ∈ parabol : $y^2 = x - 2$

3.121. a) F(1 ; 0) , Δ : x + 1 = 0
b) K(- 1; m) , H(0 ; m) ; M(m^2 /4 ; m)
c) I(0 ; m/2) . IM : $4x - 2my + m^2 = 0$
Phương trình tung độ giao điểm :
$y^2 - 2my + m^2 = 0 \Leftrightarrow y = m$
Điểm chung duy nhất là M .
d) Tam giác KMF cân tại M.



1**3.122.** a) Đường cao từ M : y = m (1)

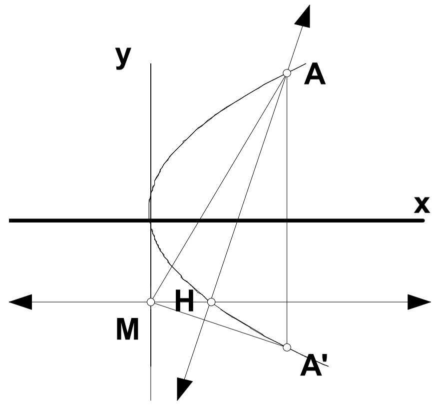
Đường cao qua A(1 ; 1) và vuông góc

$\overrightarrow{A'M} = (-1; m+1)$:

$-1.(x-1)+(m+1)(y-1)=0$

$\Leftrightarrow x-(m+1)y+m=0$ (2)

b) Thế (1) vào (2) : $x-y^2=0 \Leftrightarrow y^2=x$



3.123 (b)

3.124 (d)

3.125 (c)

3.126 (c) Hoành độ đỉnh M là (x ; y) trong đó : $x = |y|\sqrt{3}$. Cạnh là $16\sqrt{3}$

3.127 (a) $x = 36/p$. $\frac{p}{2}+\frac{36}{p}=19 \Leftrightarrow p^2-38p+72=0$

3.128 (d) Độ dài dây cung là 2p => p = 3/2 .

3.129 (b) Phương trình hoành độ giao điểm : $x^2-24x+16=0$

$MN = \frac{p}{2}+x_1+\frac{p}{2}+x_2 = 32$

3.130. (a) Phương trình hoành độ giao điểm :

$m^2x^2 - 4(m^2+2)x + 4m^2 = 0$

$|FM - FN) = 3 \Leftrightarrow |x_1-x_2| = 3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2 = 9$

Mà $x_1x_2 = 4$, suy ra : $x_1+x_2 = 5$.

Vậy : $\frac{4(m^2+2)}{m^2}=5 \quad \Leftrightarrow m = 2\sqrt{2}$

§8. Các Đường Cônic

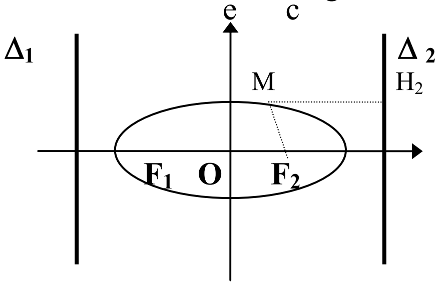
A. Tóm tắt giáo khoa

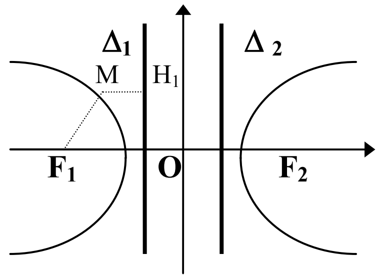
1. Đường chuẩn :

Cho (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: hay (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=12$

- $\Delta_1 : x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}$ gọi là đường chuẩn ứng với $F_1(-c ; 0)$

- $\Delta_2 : x = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c}$ gọi là đường chuẩn ứng với $F_1(- c ; 0)$





Chú ý : Đối với êlip tâm O ở gần tiêu điểm hơn đường chuẩn tương ứng .Trong khi với hypebol , tâm O ờ gần đường chuẩn hơn tiêu điểm tương ứng .

2. Tính chất : Với mọi M $\in$ (E) hay (H) :

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e$$

3. Định nghĩa : Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định , tập hợp các điểm sao cho : $\dfrac{MF}{d(M;\Delta)} = e$ (số dương cho trước) được gọi là đường cônic .

F : tiêu điểm , Δ : đường chuẩn , e : tâm sai

- $e < 1$: cônic là êlip
- $e = 1$: cônic là parabol
- $e > 1$: cônic là hypebol

B. Giải toán :

1. Dạng toán : Lập phương trình chính tắc của cônic với đường chuẩn

Ví dụ 1 : Lập phương trình chính tắc của êlip có một đỉnh là (0 ; $\sqrt{5}$) và khỏang cách giữa hai đường chuẩn là 9 .

Giải (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Theo đề bài , ta có : $b = \sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 = 5 + c^2$

$$\frac{a^2}{c} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{5+c^2}{c} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2c^2 - 9c + 10 = 0$$

$\Leftrightarrow$ c = 2 hay c = 5/2

- $c = 2 : a^2 = 7$ => (E) : $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{5} = 1$
- $c = 5/2 : a^2 = 15/2$ => (E): $\frac{x^2}{15/2} + \frac{y^2}{5} = 1$

Ví dụ 2 : Lập phương trình chính tắc của hypebol có tiệm cận y = 2x và một đường chuẩn là x = 1

Giải (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có : $\frac{b}{a} = 2$ <=> b = 2a ⇔ $c^2 - a^2 = 4a^2$ ⇔ $c = a\sqrt{5}$

Và $\frac{a^2}{c} = 1$ ⇔ $\frac{a^2}{a\sqrt{5}} = 1$ ⇔ $a = \sqrt{5}$.

Suy ra : $b = 2\sqrt{5}$ => (E) : $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

Dạng toán 2 : Lập phương trình cônic bằng định nghĩa

Ví dụ 1 : Lập phương trình parabol tiêu điểm O và đường chuẩn Δ : 3x – 4y + 5 = 0

Giải Gọi (P) là parabol cần tìm , ta có :

$M(x ; y) \in (P)$ ⇔ MO = d(M ; Δ)

⇔ $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|3x - 4y + 5|}{5}$

⇔ $25(x^2 + y^2) = (3x - 4y + 5)^2$

⇔ $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y - 25 = 0$

Ví dụ 2 : Lập phương trình hypebol tiêu điểm F(1 ; 0) , đường chuẩn Δ : x – y = 0 và tâm sai $e = \sqrt{2}$

`**Giải** Gọi (H) là hypebol cần tìm , ta có :

$M(x ; y) \in (H)$ ⇔ $\frac{MF}{d(M;\Delta)} = \sqrt{2}$

⇔ MF = d(M ; Δ) . $\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x-y)^2$

$\Leftrightarrow 2xy - 2x + 1 = 0$

Dạng toán 3 : Nhận dạng cônic theo tâm sai .

Ví dụ 1 : Cho cônic có tiêu điểm F(1 ; 1) và đường chuẩn Δ : x + y – 3 = 0 . Biết cônic qua gốc O , hãy cho biết dạng cônic ấy .

Giải Ta có : OF = $\sqrt{2}$ và d(O, Δ) = $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Suy ra : e = $\frac{MF}{d(M;\Delta)} = \frac{2}{3} < 1$, vậy cônic là một êlip .

Ví dụ 2 : Chứng minh đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2x}$ là một hypebol .

`Giải Ta có : $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2xy = 1$ (1)

Cộng hai vế $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1$, ta được :

(1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 + 2xy = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 + 1$

$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2$

$\Leftrightarrow \frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$

Gọi F là điểm (- 1 ; - 1) , Δ là đường thẳng : x + y + 1 = 0 và M = (x ; y) , thế thì :

(2) $\Leftrightarrow$ d(M ; Δ) . $\sqrt{2}$ = MF

$\Leftrightarrow \frac{MF}{d(M:\Delta)} = \sqrt{2}$ => cônic là một hypebol tiêu điểm F và đường chuẩn Δ

.

C. Bài tập rèn luyện .

3.131. Lập phương trình chính tắc của :

a) êlip qua M(- $\sqrt{5}$; 2) và một đường chuẩn là x = 5 .

b) hypebol có một tiệm cận là $y = \frac{4}{3}x$ và khỏang cách giũa hai đường chuẩn là 18 / 5 .

c) hypebol có đỉnh A($\sqrt{5}$; 0) , đường chuẩn hợp với hai tiệm cận một tam giác có diện tích là $\frac{10\sqrt{5}}{9}$

d) êlip đỉnh A_2 (2 ; 0) cách đường chuẩn ứng với F_1 một khoảng là 6 .

e) hypebol có hai tiệm cận vuông góc và một đường chuẩn x = 2

3.132. Cho biết dạng các cônic và lập phương trình chính tắc của nó :

a) tiêu điểm (4 ; 0) và đường chuẩn x = 2 .

b) đường chuẩn x = 9/2 và qua M(0 ; $\sqrt{5}$)

c) đỉnh ($\sqrt{5}$; 0) và khỏang cách giũa tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng là 4 .

3.133. Lập phương trình tổng quát các cônic bằng định nghĩa biết tiêu điểm F , đường chuẩn Δ , tâm sai e .

a) F(- 1; 0) , Δ : x = 3 , e = $1/\sqrt{2}$

b) F(0 ; 0) , Δ : x – y + 1 = 0 , e = 1

c) F(- 3 ; 0) , Δ : x + 2y , e = $\sqrt{2}$

3. 134. Cho parabol có đường chuẩn Δ : x – y – 4 = 0 và đỉnh là O . Tìm tiêu điểm F và phương trình của parabol .

3.135. Cho cônic có tâm đối xứng I(2 ; 4) , đường chuẩn Δ : x + y + 2 = 0 và tiêu điểm tương ứng thuộc Oy . Hãy tìm tiêu điểm , tâm sai và nhận dạng cônic đó .

3.136. Cho cônic có tiêu điểm (0 ; 3) , đường chuẩn x + y = 0 , tâm sai e = 2 . Tìm giao điểm của cônic với các trục tọa độ .

3.137. Nhận dạng các đường có phương trình sau :

a) $\sqrt{x^2+y^2} = |x-y-1|$ b) $\sqrt{2(x^2+y^2-2x+1)} = |x+y|$

c) $x^2 + 2y^2 + 2x - 1 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$

d) xy = 1

3.138. Biện luận theo m hình dạng đường (C) có phương trình :

$x^2 + y^2 = m(x-2)^2$

D. Hướng dẫn hay đáp số

3.131. a) (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Ta có : $\dfrac{a^2}{c} = 5 \Leftrightarrow a^2 = 5c$

Suy ra : $b^2 = a^2 - c^2 = 5c - c^2$

M(- $\sqrt{5}$; 2) $\in$ (E) ⇔ $\frac{5}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ ⇔ $5b^2 + 4a^2 = a^2 b^2$

⇔ $5(5c - c^2) + 20c = 5c(5c - c^2)$

⇔ $c^2 - 6c + 9 = 0$) (chia hai vế cho 5c)

⇔ c = 3 . . .

b) (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Ta có : 4a = 3b (1) và $\frac{a^2}{c}=\frac{9}{5}$ (2)

Vì : $c^2 = a^2 + b^2 = 25a^2 / 9$ ⇔ c = 5a/3 (do (1)) . Thế và (2) : a = 3 . . .

c) (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ .Ta có : Tam giác có đường cao là $\frac{a^2}{c}$ và cạnh đáy là 2. $\frac{ab}{c}$.

Suy ra : $\frac{a^3b}{c^2}=5\sqrt{5}\frac{b}{c^2}=\frac{10\sqrt{5}}{9}$ ⇔ $9b = 2c^2$

Thế $c^2 = a^2 + b^2 = 5 + b^2$: $2b^2 - 9b + 10 = 0$ ⇔ b = 2 hay b = 5/2 . . .

3.132. a) c = 4 , $\frac{a^2}{c}=2 \Leftrightarrow a^2 = 8$. Suy ra : a < c . Vậy cônic là hypebol và :

$b^2 = 8$.

b) $\frac{a^2}{c}=\frac{9}{2}$ ⇔ $2a^2 = 9c$ (1) . Vì cônic qua M $\in$ Oy nên cônic là êlip và $b^2 = 5$

Vậy : $a^2 = 5 + c^2$. Thếvào (1) : $2(5 + c^2) = 9c$ ⇔ $2c^2 - 9c + 10 = 0$

⇔ c = 2 hay c = 5/2 . . .

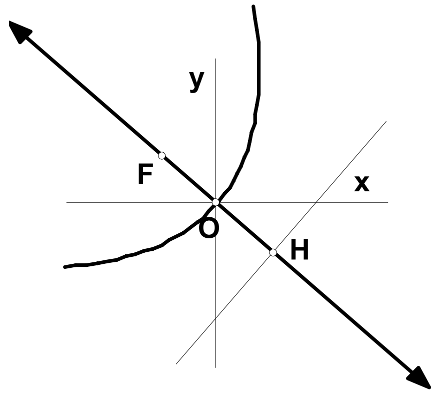
c) Ta có : a = $\sqrt{5}$ và $\left|\frac{a^2}{c}-c\right|=\left|\frac{a^2-c^2}{c}\right|=\frac{|5^2-c^2|}{c}=4$.

⇔ $\left[\begin{array}{l}5-c^2=4c\\ c^2-5=4c\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c^2+4c-5=0\\ c^2-4c-5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=1\\ c=5\end{array}\right.$

- c = 1 < a : cônic là êlip : $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

- $c = 5 > \sqrt{5}$: cônic là hypebol :

  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$



3.133. a) $M(x ; y) \in (C) \Leftrightarrow$

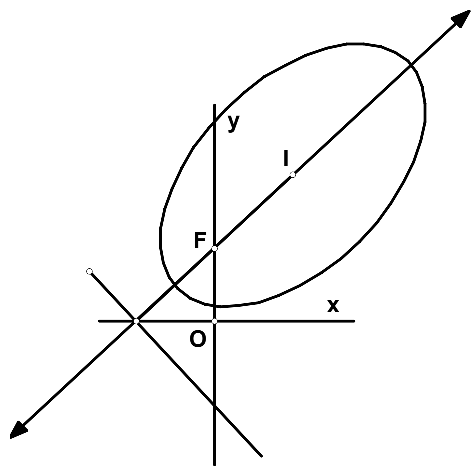
$\frac{MF}{d(M;\Delta)} = e \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}.(x-3)^2$ . .

..Lập phương trình tổng quát các cônic bằng định nghĩa biết tiêu điểm F

3. 134. Ta tìm hình chiếu H của O lên Δ thì tiêu diểm F là điểm đối xứng của H qua O .
H(2 ; - 2) => F(- 2 ; 2) .
$M(x ; y) \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M ; \Delta)$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = \frac{(x-y-4)^2}{2}$. Khai triển và rút gọn, ta được phương trình tổng quát cần tìm .

3.135. Phương trình đường thẳng qua I và vuông góc Δ : x – y + 2 = 0 . Đường này cắt Oy tại F(0 ; 2) là tiêu điểm của cônic. Ta có : $c = IF = 2\sqrt{2}$, $\frac{a^2}{c} = d(I,\Delta) = 4\sqrt{2}$ => $a^2 =$ 16 $\Leftrightarrow$ a = 4 .
Vậy e = c/a = $\sqrt{2}$: cônic là êlip



3.136. Gọi M(x ; 0) là giao điểm $\in$ Ox , ta có :
MF = 2. d(M ; Δ)

$\Leftrightarrow x^2 + 9 = 4.\ \frac{(x+0)^2}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\ 3$ . . . .

3.137. a) Xét điểm O(0 ; 0) và đường thẳng Δ : x – y – 1= 0 , ta có :

$MO = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$d(M ; \Delta) = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}$

PT ⇔ $\dfrac{MO}{d(M;\Delta)} = \sqrt{2}$. Vậy tập hợp là một hypebol tiêu điểm O và đường chuẩn Δ .

b) Xét điểm F(1 ; 0) và Δ : x + y = 0 . Tập hợp là parabol .

c) PT ⇔ $2(x^2 + y^2) = x^2 - 2x + 1$ ⇔ ⇔ $\sqrt{2}\ \sqrt{x^2 + y^2} = |x - 1|$

Xét O(0 ; 0) và Δ : x – 1 = 0 : tập hợp là êlip

d) $2(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$

⇔ $2(x^2 + y^2) = (x + y - 1)^2$ ⇔ $\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}$

Xét O và Δ : x + y – 1 = 0 : tập hợp là parabol .

e) 2xy = 2 . Cộng hai vế cho $x^2 + y^2 + 2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{2} + 2$

⇔ $x^2 + y^2 + 2xy + 2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{2} + 2 = x^2 + y^2 + 2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{2} + 4$

⇔ $(x + y + \sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2$ ⇔

$\sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2} = \dfrac{|x + y + \sqrt{2}|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}$

Xét F(- $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$) và Δ : x + y + $\sqrt{2}$ = 0 : tập hợp là hypebol tiêu điểm F , đường chuẩn Δ , e = $\sqrt{2}$.

3.138. * Nếu m < 0 : PT vô nghiệm => tập hợp ∅

* Nếu m = 0 : x = y = 0 => tập hợp là {O}

* Nếu m > 0 : xét O và Δ : x – 2 = 0 , ta có : $\dfrac{MO}{d(M,\Delta)} = \sqrt{m}$

- m < 1 : êlip
- m = 1 : parabol
- m > 1 : hypebol

§ 9.Trắc nghiệm cuối chương .

A. Đề :

1. Phương trình đường thẳng qua A(3 ; - 2) và có vectơ chỉ phương (- 2 ; 6) là :

a) $3x + y – 7 = 0$ b) $– x + 3y + 9 = 0$

c) $x + 3y + 3 = 0$ d) $3x – y – 11 = 0$

2. Cho tam giác ABC với A(2 ; 4) , B(2 ; 1) và C(5 ; 0) . Trung tuyến CM qua điểm N có hoành độ 20 và tung độ bằng ?

a) - 12 b) - 12, 5 c) - 13 d) – 13, 5

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song : $3x – 4y + 2 = 0$ và $3x – 4y – 3 = 0$ là :

a) 1 / 5 b) 1 c) 5 d) đáp số khác

4. Có 2 điểm M thuộc Ox và cách đường thẳng $2x – y + 5 = 0$ một khoảng là $2\sqrt{5}$, **tích** hai hoành độ của chúng là :

a) – 75/4 b) – 25/ 4 c) – 225 / 4 d) đáp số khác

5. Hai đường thẳng d : $mx + y – 5 = 0$ và d' : $(m – 3) x + 5 y + m = 0$ song song khi m =

a) 4/3 b) – 4/3 c) 3/4 d) – 3/4

6. Đường thẳng d : $3x – 2y + 8 = 0$ tiếp xúc với đường tròn tâm I(1; - 1) , bán kính là :

a) $\frac{5}{\sqrt{13}}$ b) $\sqrt{13}$ c) 13 d) đáp số khác

7. Gọi α là góc của hai đường thẳng : $y = 5x + 3$ và $x - 5y – 1 = 0$, thế thì cos α =

a) 1/ 26 b) 2/ 13 c) 5/ 13 d) 0

8. Có hai đường thẳng y = kx và hợp với d : $x – y = 0$ một góc là 60^0 . Tổng hai giá trị của k là :

a) 1 b) – 8/ 3 c) – 8 d) - 1

9. Phương trình đường tròn có đường kính AB với A(- 3 ; 1) và B(5 ; 7) là :

a) $x^2 + y^2 + 2x + 8y – 8 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x + 8y – 8 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 8y – 8 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 2x - 8y – 8 = 0$

10 Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình : $x^2 + y^2 – 2x + 2my + 10 = 0$ là phương trình đường tròn ?

a) 0 b) 5 c) 7 d) vô số

11. Có hai đường tròn có bán kính 10 và qua A (- 3 ; 2) và B(1 ; - 6) . Một đường tròn có tung độ tâm là :

a) - 6 b) - 9 c) - 2 d) 7

12. Đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ cắt đường thẳng $x - y + 1 = 0$ theo một dây cung có độ dài là :

a) 1 b) 2 c) 3 d) đáp số khác

13. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với Oy tại A(0 ; 5) và có tâm thuộc đường thẳng $3x - y - 5 = 0$ .B.àn kình đường tròn gần nhất với số nào dưới đây :

a) 3, 1 b) 3, 2 c) 3, 3 d) 3, 4

14. Đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$ có bán kính là :

a) $\sqrt{10}$ b) 3 c) 4 d) 29

15. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) : $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$ biết tiếp tuyến song song với $\Delta : 3x - 4y + 12 = 0$

a) $4x - 3y - 27 = 0$ b) $4x + 3y - 11 = 0$

c) $3x - 4y + 23 = 0$ d) $3x - 4y + 27 = 0$

16. Elip : $4x^2 + 8y^2 = 32$ có tiêu cự là :

a) 2 b) 4 c) $2\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{2}$

17. Cho elip : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Câu nào sau đây là **sai ?**

a) Một tiêu điểm của elip là (- 2; 0)

b) Một đỉnh trên trục nhỏ là (0 ; $\sqrt{5}$)

c) Độ dài trục lớn là 6

d) Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $3\sqrt{5}$

18. Elip có một tiêu điểm là F (3 ; 0) cách đỉnh B một khoảng là 5 , có độ dài trục nhỏ là :

a) 2 b) 4 c) 8 d) 10

19. Elip (E) : $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$. Điểm M (3; 1) trên (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông . Tung độ dương của M là :

a) ½ b) 1 c) 2 d) đáp số khác

20. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Điểm M trên (E) thỏa $F_1M - F_2M = 2$. Hoành độ của M gần nhất với số nào dưới đây ?

a) 1, 4 b) 1, 5 c) 1, 6 d) 1, 7

21. Cho parabol $y^2 = 2px$ qua điểm M(2 ; 6) . Khoảng cách từ M đến đường chuẩn là :

a) 6, 5 b) 9 c) 11 d) đáp số khác

22. Parabol $y^2 = x$ có tiêu điểm là :

a) (¼ ; 0) b) (1 /2 ; 0) c) (0 ; ¼) d) (0 ; ½)

23. Parabol $y^2 = 2px$ (p > 0) qua điểm M có tung độ 2 và cách đường chuẩn một khoảng là 5. Ta được hai parabol có tổng hai giá trị của p là :

a) 5 b) 10 c) 4 d) đáp số khác

24. Cho (P) : $y^2 = 4x$. Đường thẳng d qua F có hệ số góc 1 , cắt (P) tại M và N . Độ dài MN bằng :

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8

25. Hypebol : $2x^2 - 4y^2 = 8$:

a) có tiêu cự là $2\sqrt{2}$ b) có một tiệm cận là : $y = \frac{1}{2}x$

c) Câu (a) và (b) đều đúng d) Câu (a) và (b) đều sai .

26. Một điểm M bất kì trên hypebol (H) : $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$. Tích khoảng cách từ M đến hai tiệm cận bằng :

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{16}{5}$ d) không xác định .

27. Hypebol có tiêu điểm F(10 ; 0) và một tiệm cận là : y = 2x . Hypebol có độ dài trục thực bằng :

a) $2\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{5}$ d) đáp số khác

28. Hypebol : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ qua điểm M (5 ; 4) và có một tiệm cận là $y = x\sqrt{2}$. Thế thì ab =

a) $17\sqrt{2}$ b) 34 c) $34\sqrt{2}$ d) đáp số khác

29. Hypebol có một đỉnh là A_1 (- 4 ; 0) và đỉnh này cách tiệm cận một khoảng là 2 . Thế thì độ dài trục ảo gần nhất với số nào dưới đây ?

a) 4, 3 b) 4, 4 c) 4, 5 d) 4, 6

30. Elip (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có cùng tiêu điểm và độ dài trục thực của (H) bằng độ dài trục nhỏ của (E) . Vậy (E) và (H) cắt nhau tại bốn điểm nằm trên đường tròn có bán kính là :

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 4 d) 8

B. Bảng trả lời :

1. (a)	**2.(b)**	**3. (b)**	**4.(a)**	**5. (d)**
6.(b)	**7. (c)**	**8.(b)**	**9.(d)**	**10.(d)**
11. (a)	**12.(b)**	**13. (c)**	**14.(a)**	**15. (c)**
16.(b)	**17. (d)**	**18.(b)**	**19.(a)**	**20.(b)**
21.(a)	**22.(a)**	**23.(b)**	**24.(d)**	**25.(d)**
26.(b)	**27.(b)**	**28.(a)**	**29.(d)**	**30.(b)**

C. Hướng dẫn giải

1. (a)

2.(b) Phương trình trung tuyến là : $5x + 6y - 25 = 0$. Cho $x = 20$: $y = -12 , 5$

3.(b) Khỏang cách giữa $3x - 4y + 2 = 0$ và $3x - 4y - 3 = 0$ là 1 .

4.(a) Gọi M(x ; 0) : $\frac{|2x+5|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |2x + 5| = 10 \Leftrightarrow x = 5/2$ hay $x = - 15/2$

Vậy có 2 điểm M và tích 2 hoành độ là – 75/4 .

5.(d) d // d’ $\Leftrightarrow \frac{m}{m-3} = \frac{1}{5} \neq \frac{-5}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3=5m \\ m \neq -25 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$

6.(b) $R = d(I, d) = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$

7.(c)

8. (b) Phương trình đường thẳng cần tìm : $kx - y = 0$. Ta có :

$$\frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}} = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 3k^2 + 8k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 = - 8/3$.

9. (d)

10. (d) $a^2 + b^2 - c = m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m > 3$ hay $m < - 3$: vố số giá trị m nguyên .

11.(a)Gọi I(a ; b) là tâm : $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = R^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+3 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 = 100 \end{cases}$

Thế , ta được : $b^2 + 4b - 12 = 0 \Leftrightarrow b = - 6$ hay $b = 2$

12. (b) (C) có tâm I(1 ; - 2) , R = 3 . Khỏang cách d từ I đến đường thẳng là : $3/\sqrt{2}$

Suy ra độ dài dây cung là : $2.\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{9-8} = 2$

13.c Vì đường tròn tiếp xúc Oy tại A(0 ; 5) nên tâm I(a ; 5) . I $\in$ 3x – y – 5 = 0 ⇔ a = 10/3

Bán kính đường tròn là 10/3 = 3,333… .

14. (a) (C) có tâm I(- 3/2 ; 5/2) , bán kính R = $\sqrt{\frac{46}{4}}$

=> $MT^2 = IM^2 + R^2 = 9$ => MT = 3

15. (c)

16. (b)

17 (d) Hình chữ nhật cơ sở có diện tích là 4ab = $12\sqrt{5}$

18. (b) Tam giác OBF cho : $OB^2 = BF^2 - OF^2 = 25 - 9 = 16$ => BF = b = 4

Vậy độ dài trục nhỏ là 8 .

19.(a) Ta c ó hệ **:** $\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 1/4 \Rightarrow |y| = \frac{1}{2}$

Vậy tung độ dương của M là ½ .

20 (b) Ta có hệ : $\begin{cases} F_1M + F_2M = 6 \\ F_1M - F_2M = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1M = 4 \\ F_2M = 2 \end{cases}$

Suy ra : $F_1M^2 - F_2M^2 = 4cx = 12$ => x = 3/2

21(a) **.** (P) : $y^2 = 2px$ qua điểm (2 ; 6) ⇔ 36 = 4p ⇔ p = 9

Khoảng cách từ M đến đường chuẩn là : $x + \frac{p}{2} = 2 + 4,5 = 6,5$

22(a) **.**

23.(b) Gọi (x ; 2) là tọa độ của M , ta có hệ : $\begin{cases} 4 = 2px \\ x + \frac{p}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{p} + \frac{p}{2} = 5$ (x > 0)

⇔ $p^2 - 10p + 4 = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm và tổng là 10 .

24 (d) **.** Phương trình đường thẳng d : y = x – 1 . Phương trình hoành độ giao điểm M , N : $(x-1)^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$ (1)

Gọi x_1 , x_2 là hoành độ của M , N , ta có :

MN = FM + FN = $(1 + x_1) + (1 + x_2) = 2 + x_1 + x_2 = 8$

25(d) **.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ **:**

* có c = $\sqrt{6}$ => tiêu cự là $2\sqrt{6}$: (a) sai .

* có tiệm cận là : y = ± x$\sqrt{2}$ /2 : (b) sai .

26(b) **.** (H) : $2x^2 - 8y^2 = 16$. Phương trình hai tiệm cận : x ± 2y = 0

Tích khoảng cách là : $\frac{|x+2y|}{\sqrt{5}} . \frac{|x-2y|}{\sqrt{5}} = \frac{|x^2-4y^2|}{5} = \frac{8}{5}$

27(b) **.** Ta có : c = 10 và b = 2a . Suy ra : $a^2 + b^2 = 100 \Leftrightarrow 5a^2 = 100 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{5}$

Vậy độ dài trục thực là $4\sqrt{5}$.

28(a)**.** Ta có hệ : $\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \\ b^2 = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 17 \\ b^2 = 34 \end{cases}$ => ab = 17.$\sqrt{2}$

29(d) **.** Ta có : a = 4 . Phương trình một tiệm cận là : bx + 4y = 0 . Khoảng cách từ A_1 đến tiệm cận là : $\frac{|-4b|}{\sqrt{b^2+16}} = 2 \Leftrightarrow 16b^2 = 4b^2 + 64 \Leftrightarrow b^2 = 16/3$.

Vậy độ dài trục ảo là : 2b = 2. $\frac{4}{\sqrt{3}} \approx 4,6$

30(b). Ta có : 2a = 4 ⇔ a = 2 . Ngoài r a: $16 - 4 = a^2 + b^2 = 4 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 8$.

Vậy (H) : $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1 \end{cases}$. Tọa độ giao điểm của (E) và (H) :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ 2x^2 - y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{16}{3} \\ y^2 = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 8$$

Vậy 4 giao điểm thuộc đường tròn tâm O , bán kính là $2\sqrt{2}$