

Đề thi Dự trữ khối B-năm 2007 Đề II

Câu I: Cho hàm số $y = -x + 1 + \frac{m}{2-x}$ (Cm)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$
2. Tìm m để đồ thị (Cm) có cực đại tại điểm A sao cho tiếp tuyến với (Cm) tại A cắt trục Oy tại B mà $\triangle OBA$ vuông cân.

Câu II:

1. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x$
2. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0$ có đúng 1 nghiệm

Câu III: Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(2,0,0)$; $M(0,-3,6)$

1. Chứng minh rằng mặt phẳng (P): $x + 2y - 9 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu tâm M, bán kính MO. Tìm tọa độ tiếp điểm.
2. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, M và cắt các trục Oy, Oz tại các điểm tương ứng B, C sao cho $V_{OABC} = 3$.

Câu IV:

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{2-x^2}$.

$$2. \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}$$

Câu Va (cho chương trình THPT không phân ban):

1. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(x^2 + 2)^n$, biết: $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$.
2. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm M(5, 1) biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

Câu Vb (cho chương trình THPT phân ban):

1. Giải phương trình: $(2 - \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$

2. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn đó sao cho $AC = R$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho $\widehat{(SAB, SBC)} = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Chứng minh ΔAHK vuông và tính V_{SABC} ?

Bài giải

Câu 1:

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x + 1 + \frac{1}{2-x}$ (Bạn đọc tự làm)

2. Ta có: $y' = -1 + \frac{m}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x + m - 4}{(2-x)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + m - 4 = 0 \Leftrightarrow (2-x)^2 = m \quad (x \neq 2) \quad (*)$$

Để đồ thị (Cm) có cực đại

\Leftrightarrow phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $\neq 2 \Leftrightarrow m > 0$

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 - \sqrt{m}$, $x_2 = 2 + \sqrt{m}$, ta có:

x	$-\infty$	x_1			2	x_2			$+\infty$
y'		-	0	+			+	0	-
y	$+\infty$	\nearrow CT \nearrow			$+\infty$		\nwarrow CD \nwarrow		
							$-\infty$		$-\infty$

\Rightarrow Điểm cực đại $A(2 + \sqrt{m}, -1 - 2\sqrt{m})$

Phương trình tiếp tuyến với (Cm) tại điểm CD A có phương trình:

$$y = -1 - 2\sqrt{m}, \text{ do đó } OB = |-1 - 2\sqrt{m}| = 1 + 2\sqrt{m}$$

$$AB = x_2 = 2 + \sqrt{m} \quad (\text{vì } B \in Oy \Rightarrow x_B = 0)$$

$$\Delta AOB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow OB = BA \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{m} = 2 + \sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1$$

Cách khác:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2 + m}{2-x} \text{ có dạng } y = \frac{ax^2 + bx + c}{Ax + B} \text{ với } a.A < 0$$

Do đó, khi hàm có cực trị thì $x_{CT} < x_{CD}$

$$\Rightarrow x_{CD} = x_2 = 2 + \sqrt{m} \text{ và } y_{CD} = \frac{2x_2 - 3}{-1} = -1 - 2\sqrt{m}$$

Câu II:

1. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \operatorname{tg} x - \cot x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(2x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\cos 2x \wedge \sin 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \wedge \sin 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad (\cos x = -1 : \text{loại vì } \sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

2. Phương trình: $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 - 13x + m} = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^4 - 13x + m = (1 - x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x^3 - 6x^2 - 9x - 1 = -m \end{cases}$$

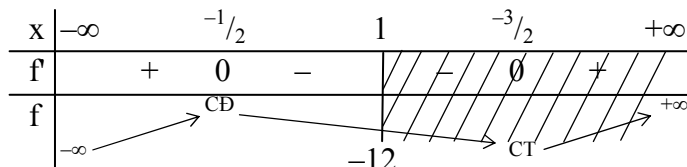
ycbt \Leftrightarrow đường thẳng $y = -m$ cắt phần đồ thị $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x - 1$ với $x \leq 1$ tại 1 điểm

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x - 1$$

$$\text{TXĐ: } x \leq 1$$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 9 = 3(4x^2 - 4x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$



Từ bảng biến thiên ta có:

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow -m = \frac{3}{2} \text{ hay } -m < -12 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2} \text{ hay } m > 12$$

Câu III:

1. Theo giả thiết $A(2,0,0)$ $M(0,-3,6)$ $O(0,0,0)$

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = MO = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

Khoảng cách từ tâm M của mặt cầu đến mặt phẳng (P): $x + 2y - 9 = 0$

$$d = \frac{|0 - 6 - 9|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} = R$$

Vậy (P) tiếp xúc với mặt cầu tâm M bán kính MO

Phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) là:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} \\ z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \\ z = 6 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Thế vào phương trình (P) ta có: $t + 2(2t - 3) - 9 = 0 \Rightarrow t = 3$

Vậy tọa độ tiếp điểm I của mặt cầu với mặt phẳng (P) là $t(3,3,6)$

2. Gọi b là tung độ của B, c là cao độ của điểm C

Vì $A(2,0,0) \in Ox$ nên phương trình (Q): $\frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Ta có $M(0,-3,6) \in \text{mặt phẳng } (yOz)$ nên: $-\frac{3}{b} + \frac{6}{c} = 1 \Leftrightarrow 6b - 3c = bc \quad (1)$

$$\text{Ta lại có } V_{OABC} = \frac{1}{3} OA \cdot S_{OBC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} |bc| = \frac{|bc|}{3} = 3$$

$$\Rightarrow |bc| = 9 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} bc = 9 \\ 6b - 3c = 9 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} bc = -9 \\ 6b - 3c = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = c = 3 \text{ hay } \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ c = -6 \end{cases}$$

Vậy có 2 mặt phẳng (Q) có phương trình là: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$

$$\text{hoặc } \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} - \frac{z}{6} = 1$$

Câu IV:

1. Ta có: $y = \sqrt{2 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Là nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{2}$, có $y \geq 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{2 - x^2}$:
 $x^2 = \sqrt{2 - x^2} \Leftrightarrow x = \pm 1$; x^2 và khi $x \in [-1; 1]$ thì $\sqrt{2 - x^2} \geq x^2$

Do đó ta có

$$S = \int_{-1}^1 (\sqrt{2 - x^2} - x^2) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{2 - x^2} dx - \int_{-1}^1 x^2 dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{2 - x^2} dx \quad \text{Đặt: } x = \sqrt{2} \sin t \quad \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

$$\Rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt \quad x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 - 2 \sin^2 t} \cdot \sqrt{2} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt$$

$$I_1 = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

$$(\text{Nhận xét : } I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt)$$

Vì $f(t) = 1 + \cos 2t$ là hàm chẵn)

$$I_2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } S = 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \quad (\text{đvdt})$$

$$(\text{Nhận xét : } S = \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx)$$

Vì $g(x) = \sqrt{2-x^2} - x^2$ là hàm chẵn)

$$2. \text{ Hệ phương trình } \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y & (1) \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x & (2) \end{cases}$$

Từ hệ suy ra:

$$VT = 2xy \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2 + 8}} \right) = x^2 + y^2 = VP$$

Dễ thấy $|VT| \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2 = VP$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2 + 8}} \leq 1 \text{ và dấu } = \text{ xảy ra} \right)$$

Ta có $VT = VP \Leftrightarrow x = y = 1$ hay $x = y = 0$

Thử lại, kết luận hệ phương trình có 2 nghiệm

$x = y = 1$ hay $x = y = 0$

Câu Va:

1. Điều kiện $n \geq 4$

$$\text{Ta có: } (x^2 + 2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} 2^{n-k}$$

Hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_n^4 2^{n-4}$

$$\text{Ta có: } A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-1)n - 4(n-1)n + n = 49$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow (n-7)(n^2 + 7) = 0 \Leftrightarrow n = 7$$

Nên hệ số của x^8 là $C_7^4 2^3 = 280$

2. Phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ có tâm $I(1, -2)$
 $R = \sqrt{3}$

Đường tròn (C') tâm M cắt đường tròn (C) tại A, B nên $AB \perp IM$ tại trung điểm H của đoạn AB. Ta có $AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Có 2 vị trí cho AB đối xứng qua tâm I.

Gọi A'B' là vị trí thứ 2 của AB

Gọi H' là trung điểm của A'B'

$$\text{Ta có: } IH' = IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có: } MI = \sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2} = 5$$

$$\text{và } MH = MI - HI = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$MH' = MI + H'I = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\text{Ta có: } R_1^2 = MA^2 = AH^2 + MH^2 = \frac{3}{4} + \frac{49}{4} = \frac{52}{4} = 13$$

$$R_2^2 = MA'^2 = A'H'^2 + MH'^2 = \frac{3}{4} + \frac{169}{4} = \frac{172}{4} = 43$$

Vậy có 2 đường tròn (C') thỏa ycbt là: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$
 hay $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$

Câu Vb:

$$1. \text{ Phương trình: } (2 - \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (2 - \log_3 x) \frac{1}{\log_3 9x} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \log_3 x}{2 + \log_3 x} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \quad \text{đặt: } t = \log_3 x$$

$$(1) \text{ thành } \frac{2-t}{2+t} - \frac{4}{1-t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$$

(vì $t = -2, t = 1$ không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ hay } t = 4$$

$$\text{Do đó, } (1) \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \text{ hay } x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ hay } x = 81$$

2. * Chứng minh ΔAHK vuông

Ta có: $AS \perp CB$

$AC \perp CB$ (ΔACB nội tiếp nửa đường tròn)

$$\Rightarrow CB \perp (SAC) \Rightarrow CB \perp AK$$

$$\text{mà } AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCB)$$

$$\Rightarrow AK \perp HK \Rightarrow \Delta AHK \text{ vuông tại } K$$

* Tính V_{SABC} theo R

Kẻ $CI \perp AB$

Do giả thiết ta có $AC = R = OA = OC \Rightarrow \Delta AOC$ đều

$$\Rightarrow IA = IO = \frac{R}{2}$$

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow CI \perp (SAB)$

Suy ra hình chiếu vuông góc của ΔSCB trên mặt phẳng (SAB) là ΔSIB

$$\text{Vì } BI = \frac{3}{4}AB. \text{ Suy ra } S_{SIB} = \frac{3}{4}S_{SAB} = \frac{3}{4}.R.SA \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } S_{SBC} = \frac{1}{2}BC.SC = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.\sqrt{SA^2 + R^2}$$

Theo định lý về diện tích hình chiếu ta có:

$$S_{SIB} = S_{SBC} \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}S_{SBC} = \frac{R\sqrt{3}}{4}\sqrt{SA^2 + R^2} \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*), (**) \text{ ta có: } SA = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Từ đó } V_{SABC} = \frac{1}{3}SA.d\Delta ABC = \frac{R^3\sqrt{6}}{12}$$

-----@-----

HÀ VĂN CHƯƠNG - PHẠM HỒNG DANH

(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và Luyện thi đại học Vĩnh Viễn)