

Câu I: Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(-1, -13)$.

Câu II:

1. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$
2. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m$ có nghiệm.

Câu III: Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(-3, 5, -5)$; $B(5, -3, 7)$; và mặt phẳng (P): $x + y + z = 0$

1. Tìm giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).
2. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Câu IV:

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = 0$ và

$$y = \frac{x(1-x)}{x^2 + 1}.$$

2. Chứng minh rằng hệ
$$\begin{cases} e^x = 2007 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ e^y = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{cases}$$
 có đúng 2 nghiệm thỏa mãn

điều kiện $x > 0, y > 0$

Câu Va (cho chương trình THPT không phân ban):

1. Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 \end{cases}$$

2. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ và đường thẳng d: $x + y - 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp (C) biết $A \in d$

Câu Vb (cho chương trình THPT phân ban):

1. Giải phương trình $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$
2. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với hình chóp. Cho $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và tính thể tích hình chóp OAHK.

Bài giải

Câu I:

1. Khảo sát $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ (Bạn đọc tự làm)
2. Viết phương trình tiếp tuyến (C) đi qua $A(-1, -13)$

Ta có $y' = -6x^2 + 12x$

Gọi $M_0(x_0, y_0)$ là tiếp điểm thuộc (C) $\Leftrightarrow y_0 = -2x_0^3 + 6x_0^2 - 5$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M_0 : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow y = (-6x_0^2 + 12x_0)(x - x_0) - 2x_0^3 + 6x_0^2 - 5$$

Vì tiếp tuyến đi qua $A(-1, -13)$ nên

$$-13 = -2x_0^3 + 6x_0^2 - 5 + (-6x_0^2 + 12x_0^2)(-1 - x_0)$$

$$-13 = -2x_0^3 + 6x_0^2 - 5 - 6x_0^2 + 6x_0^3 - 12x_0 - 12x_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \vee x_0 = -2$$

Ta có $y(1) = -1 \vee y(-2) = 35$

$M(1, -1)$ thì phương trình tiếp tuyến với (C) qua A là

$$y + 1 = 6(x - 1) \Leftrightarrow y = 6x - 7$$

$M(-2, 35)$ thì phương trình tiếp tuyến với (C) qua A là

$$y - 35 = -48(x + 2) \Leftrightarrow y = -48x - 61$$

Câu II:

1. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{3x}{2} = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{3x}{2} = 0 \vee \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$$

2. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m$ có nghiệm

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x}$ (điều kiện: $x \geq 0$)

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) < 0, \forall x > 0$$

$$\forall x \quad \frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} < \frac{x}{\sqrt[4]{x^6}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ta có f giảm trên $[0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ nên ta có

$$0 < f(x) \leq 1, \forall x \in [0; +\infty).$$

Vậy, phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow m \in \text{miền giá trị của } f \text{ trên đoạn } [0; +\infty) \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$$

Câu III:

1. Đường thẳng AB có VTCP $\vec{a} = (8, -8, 12) = 4(2, -2, 3)$

$$\text{Phương trình đường thẳng AB: } \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$$

Điểm $I(-3+2t; 5-2t; -5+3t) \in AB \cap (P)$ khi

$$(-3 + 2t) + (5 - 2t) + (-5 + 3t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại $I(-1, 3, -2)$

2. Tìm $M \in (P)$ để $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất

Gọi H là trung điểm của đoạn AB. Tam giác MAB có trung tuyến MH

$$\text{nên: } MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Do đó $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH^2$ nhỏ nhất

Ta dễ thấy $H(1, 1, 1)$, $M \in (P)$

MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH \perp (P)$ và dễ ý rằng mặt phẳng (P): $x + y + z = 0$ có PVT $\vec{OH} = (1, 1, 1)$ và $O \in (P) \Rightarrow M \equiv (0, 0, 0)$

Vậy, với $M(0, 0, 0)$ thì $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

(khi đó, ta có

$$\min(MA^2 + MB^2) = OA^2 + OB^2 = (9 + 25 + 25) + (25 + 9 + 49) = 142)$$

Câu IV:

1. Tọa độ giao điểm của 2 đường $y = \frac{x(1-x)}{x^2+1}$ và $y = 0$ là $A(0, 0)$; $B(1, 0)$.

$$\text{Khi đó } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow y = \frac{x(1-x)}{x^2+1} \geq 0$$

Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường đã cho là

$$S = \int_0^1 \frac{x(1-x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{-x^2+x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$S = -x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx$$

$$\text{Đặt: } x = \tan t \Rightarrow dx = (\tan^2 t + 1) dt$$

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$S = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} t + 1) dt = [t - \ln(\cos t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

Vậy $S = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$

2. Đặt: $f(t) = e^t, \quad g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}; g'(t) = \frac{-1}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}} < 0, \forall |t| > 1$

Ta có f tăng nghiêm cách trên và g giảm nghiêm cách trên từng khoảng
Xác định.

Hệ phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(y) = 2007 \\ f(y) + g(x) = 2007 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) + g(y) = f(y) + g(x) \quad (*)$

Nếu $x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow g(y) < g(x) \quad (\text{do}(*))$

$\Rightarrow y > x \quad (\text{do } g \text{ giảm nghiêm cách}) \Rightarrow \text{vô lý.}$

Tương tự khi $y > x$ cũng dẫn đến vô lý.

Do đó, (1) $\Leftrightarrow (2) \begin{cases} e^x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2007 = 0 \\ x = y \end{cases}$

Xét: $h(x) = e^x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2007 \quad (|x| > 1)$

Nếu $x < -1$ thì $h(x) < e^{-1} - 2007 < 0 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

Khi $x > 1 \Rightarrow h'(x) = e^x - \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = e^x - (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$

$$h''(x) = e^x + \frac{3}{2} (x^2-1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = e^x + \frac{3x}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}} > 0$$

và $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

Vậy $h(x)$ liên tục và có đồ thị là đường cong lõm trên $(1, +\infty)$

Do đó để chứng minh (2) có 2 nghiệm dương ta chỉ cần chứng minh tồn tại $x_0 > 1$ mà $h(x_0) < 0$

$$\text{Chọn } x_0 = 2 \Rightarrow h(2) = e^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} - 2007 < 0$$

Suy ra: $h(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm $x_1 > 1, x_2 > 1$

Câu Va:

1. Với điều kiện: $x \geq 2, y \geq 3$, ta có:

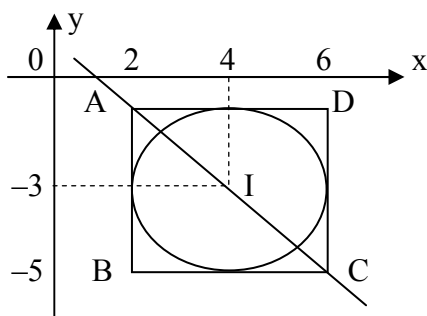
$$\begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) + \frac{1}{6}y(y-1)(y-2) = 22 \\ y(y-1)(y-2) + \frac{1}{2}x(x-1) = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x + y^3 - 3y^2 + 2y = 132 & (1) \\ (y^3 - 3y^2 + 2y) \cdot 2 + x^2 - x = 132 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x + y^3 - 3y^2 + 2y = 132 \\ 11x^2 - 11x - 132 = 0 & (2) - 2(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ hay } x = -3 \text{ (loại)} \\ y^3 - 3y^2 + 2y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ (y-5)(y^2 + 2y + 12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

2.



Đường tròn (C) có tâm $I(4, -3)$, bán kính $R = 2$

Tọa độ của $I(4, -3)$ thỏa phương trình (d): $x + y - 1 = 0$. Vậy $I \in d$

Vậy AI là một đường chéo của hình vuông ngoại tiếp đường tròn, có bán kính $R = 2$, $x = 2$ và $x = 6$ là 2 tiếp tuyến của (C) nên

. Hoặc là A là giao điểm các đường (d) và $x = 2 \Rightarrow A(2, -1)$

. Hoặc là A là giao điểm các đường (d) và $x = 6 \Rightarrow A(6, -5)$

. Khi $A(2, -1) \Rightarrow B(2, -5); C(6, -5); D(6, -1)$

. Khi $A(6, -5) \Rightarrow B(6, -1); C(2, -1); D(2, -5)$

Câu Vb:

1. Giải phương trình: $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$

$$\Leftrightarrow 2\log_3|x-1| + 2\log_3(2x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3|x-1| + \log_3(2x-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \log_3|x-1|(2x-1) = \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow |x-1|(2x-1) = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ 2x^2 - 3x + 4 = 0 \text{ (vn)} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

2. (Bạn đọc tự vẽ hình)

+BC vuông góc với (SAB)

\Rightarrow BC vuông góc với AH mà AH vuông với SB

\Rightarrow AH vuông góc với (SBC) \Rightarrow AH vuông góc SC (1)

+ Tương tự AK vuông góc SC (2)

(1) và (2) \Rightarrow SC vuông góc với (AHK)

$$SB^2 = AB^2 + SA^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$$

$$AH.SB = SA.AB \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

(do 2 tam giác SAB và SAD bằng nhau và cùng vuông tại A)

$$\text{Ta có HK song song với BD nên } \frac{HK}{BD} = \frac{SH}{SB} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Gọi AM là đường cao của tam giác cân AHK ta có

$$AM^2 = AH^2 - HM^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow AM = \frac{2a}{3}$$

$$V_{OAHK} = \frac{1}{3} OA.S_{AHK} = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} HK.AM = \frac{2a^3}{27}$$

Cách khác:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho

A= O (0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), S (0;0; $a\sqrt{2}$)

-----@-----

HÀ VĂN CHƯƠNG - PHẠM HỒNG DANH

(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và Luyện thi đại học Vĩnh Viễn)