

**Câu I:** Cho hàm số  $y = x + m + \frac{m}{x-2}$  (Cm)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với  $m = 1$ .
2. Tìm  $m$  để đồ thị (Cm) có cực trị tại các điểm A, B sao cho đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ 0.

**Câu II:**

1. Giải phương trình:  $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$
2. Giải bất phương trình 
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$$

**Câu III:** Trong không gian Oxyz cho các điểm A(2,0,0); B(0,4,0); C(2,4,6)

và đường thẳng (d) 
$$\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 0 \\ 6x + 3y + 2z - 24 = 0 \end{cases}$$

1. Chứng minh các đường thẳng AB và OC chéo nhau.
2. Viết phương trình đường thẳng  $\Delta // (d)$  và cắt các đường AB, OC.

**Câu IV:**

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường  $4y = x^2$  và  $y = x$ . Tính thể tích vật thể tròn trong khi quay (H) quanh trục Ox trọn một vòng.
2. Cho  $x, y, z$  là các biến số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} + \sqrt[3]{4(x^3 + z^3)} + \sqrt[3]{4(z^3 + x^3)} + 2\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right)$$

**Câu Va (cho chương trình THPT không phân ban):**

1. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm G(-2, 0) biết phương trình các cạnh AB, AC theo thứ tự là  $4x + y + 14 = 0$ ;  $2x + 5y - 2 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

2. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD lần lượt cho 1, 2, 3 và n điểm phân biệt khác A, B, C, D. Tìm n biết số tam giác có ba đỉnh lấy từ n + 6 điểm đã cho là 439.

**Câu Vb (cho chương trình THPT phân ban):**

1. Giải phương trình  $\log_4(x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2}$

2. Cho hình chóp SABC có góc  $(\widehat{SBC}, \widehat{ABC}) = 60^\circ$ , ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến mp(SAC).

## Bài giải

**Câu I:**

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (bạn đọc tự làm)

2. Tìm m:

Ta có:  $y = x + m + \frac{m}{x-2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{m}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - m}{(x-2)^2}$

Đồ thị h/s có 2 cực trị  $\Leftrightarrow y' = 0$  có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - m = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $\neq 2 \Leftrightarrow m > 0$

Gọi A  $(x_1, y_1)$ ; B  $(x_2, y_2)$  là 2 điểm cực trị

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{m} \Rightarrow y_1 = 2 + m - 2\sqrt{m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{m} \Rightarrow y_2 = 2 + m + 2\sqrt{m} \end{cases}$$

P/trình đường thẳng AB:  $\frac{x - (2 - \sqrt{m})}{2\sqrt{m}} = \frac{y - (2 + m - 2\sqrt{m})}{4\sqrt{m}} \quad (m > 0)$

$\Leftrightarrow 2x - y - 2 + m = 0$

AB qua gốc O  $(0, 0) \Leftrightarrow -2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ .

**Cách khác:**

$$y = \frac{x^2 + (m-2)x + m}{x-2} = \frac{u}{v}; \quad y' = 1 - \frac{m}{(x-2)^2}$$

$y' = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow m > 0$

Khi  $m > 0$ , pt đường thẳng qua 2 cực trị là

$$y = \frac{u'}{v'} = 2x + m - 2$$

$$\text{Do đó, ycbt} \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

## Câu II:

$$1. \text{ Giải phương trình: } 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = 6\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 6\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \vee \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \text{ Giải hệ: } \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (-x^2 + xy)^2 + x^3y = 1 \\ (-x^2 + xy) + x^3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = -x^2 + xy, \quad v = x^3y$$

$$(I) \text{ thành } \begin{cases} u^2 + v = 1 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -u + 1 \\ u^2 - u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

Do đó hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} -x^2 + xy = 0 \\ x^3y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -x^2 + xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^4 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = -1 \text{ (vn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

### Câu III:

1. Ta có VTCP của đường thẳng AB là  $(-2, 4, 0)$  hay  $\vec{a} = (-1, 2, 0)$

Ta có VTCP của đường thẳng OC là  $(2, 4, 6)$  hay  $\vec{b} = (1, 2, 3)$

Ta có  $\vec{OA} = (2, 0, 0)$  cùng phương với  $\vec{c} = (1, 0, 0)$

Ta có  $\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \cdot \vec{c} = 6 \neq 0 \Leftrightarrow AB$  và  $OC$  chéo nhau.

2. Đường thẳng d có VTCP  $(-12, 0, 36)$  hay  $\vec{u} = (-1, 0, 3)$

Ta có  $\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{u} \end{bmatrix} = (6, 3, 2)$

Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua A, có PVT  $\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{u} \end{bmatrix}$  ( $\alpha$  chứa AB)

$$6(x - 2) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0 \quad (\alpha)$$

Ta có  $\begin{bmatrix} \vec{b} & \vec{u} \end{bmatrix} = 2(3, -3, 1)$

Phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  qua O có PVT là  $(3, -3, 1)$  ( $\beta$  chứa OC)

$$3x - 3y + z = 0 \quad (\beta)$$

Vậy phương trình đường thẳng  $\Delta$  song song với d cắt AB, BC là

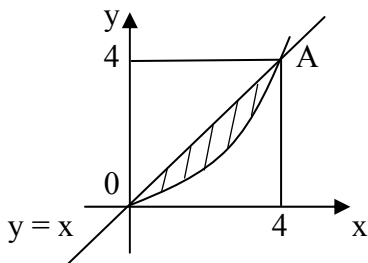
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z - 12 = 0 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

### Câu IV:

1. Tọa độ giao điểm của hai đường là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$V = \pi \int_0^4 \left( x^2 - \frac{x^4}{16} \right) dx = \pi \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{80} \right) \Bigg|_0^4 = \frac{128}{15} \pi \text{ (đvtt)}$$



2. Với  $x, y, z > 0$  ta có

$$4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3 \quad (*) \text{ Dấu = xảy ra } \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{Thật vậy } (*) \Leftrightarrow 4(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)^3$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)^2 \quad \text{do } x, y > 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

$$\text{Tương tự ta có } 4(y^3 + z^3) \geq (y + z)^3 \quad \text{Dấu = xảy ra } \Leftrightarrow y = z$$

$$4(z^3 + x^3) \geq (z + x)^3 \quad \text{Dấu = xảy ra } \Leftrightarrow z = x$$

$$\text{Do đó } \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} + \sqrt[3]{4(y^3 + z^3)} + \sqrt[3]{4(z^3 + x^3)} \geq 2(x + y + z) \geq 6\sqrt[3]{xyz}$$

$$\text{Ta lại có } 2\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right) \geq \frac{6}{\sqrt[3]{xyz}} \quad \text{Dấu = xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\text{Vậy } P \geq 6\left(\sqrt[3]{xyz} + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right) \geq 12 \quad \text{Dấu = xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Vậy  $\min P = 12$ . Đạt được khi  $x = y = z = 1$

### Câu Va:

$$1. \text{ Tọa độ A là nghiệm của hệ } \begin{cases} 4x + y + 14 = 0 \\ 2x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(-4, 2)$$

Vì  $G(-2, 0)$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$  nên

$$\begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ y_B + y_C = -2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Vì } B(x_B, y_B) \in AB \Leftrightarrow y_B = -4x_B - 14 \quad (2)$$

$$C(x_C, y_C) \in AC \Leftrightarrow y_C = -\frac{2x_C}{5} + \frac{2}{5} \quad (3)$$

Thế (2) và (3) vào (1) ta có

$$\begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ -4x_B - 14 - \frac{2x_C}{5} + \frac{2}{5} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -3 \Rightarrow y_B = -2 \\ x_C = 1 \Rightarrow y_C = 0 \end{cases}$$

Vậy  $A(-4, 2)$ ,  $B(-3, -2)$ ,  $C(1, 0)$

2. Nếu  $n \leq 2$  thì  $n + 6 \leq 8$ . Do đó số tam giác có ba đỉnh được lấy từ  $n + 6$  điểm đó không vượt qua  $C_8^3 = 56 < 439$  (loại). Vậy  $n \geq 3$

Vì mỗi tam giác được tạo thành ứng với 1 tổ hợp 3 chập  $n + 6$  phần tử. Nhưng trên cạnh CD có 3 đỉnh, trên cạnh DA có  $n$  đỉnh nên số tam giác tạo thành là:

$$C_{n+6}^3 - C_3^3 - C_n^3 = \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{6} - 1 - \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 439$$

$$\Leftrightarrow (n+4)(n+5)(n+6) - (n-2)(n-1)n = 2540$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 140 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -2 - \sqrt{144} \quad (\text{loại vì } n \geq 3) \vee n = -2 + \sqrt{144} = 10$$

Đáp số:  $n = 10$

### Câu Vb:

$$1. \text{ Giải phương trình: } \log_4(x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2} \quad (1)$$

Điều kiện  $x > 1$

$$(1) \Leftrightarrow \log_4(x-1) + \log_4(2x+1) - \log_4(x+2) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_4 \left[ \frac{(x-1)(2x+1)}{x+2} \right] = \frac{1}{2} \text{ và } x > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x+2} = 2 \text{ và } x > 1$$

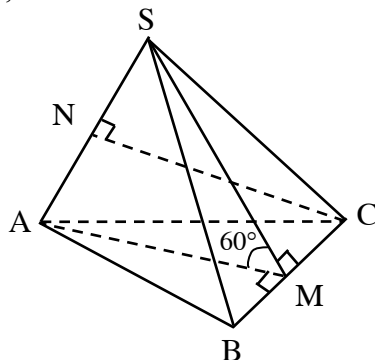
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \text{ và } x > 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

2. Gọi M là trung điểm của BC. thì  $SM \perp BC$ ,

$$AM \perp BC \Rightarrow \widehat{SMA} = (\widehat{SBC}, \widehat{ABC}) = 60^\circ$$

Suy ra  $\Delta SMA$  đều có cạnh bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } S_{SMA} &= \frac{1}{2} \cdot SM \cdot AM \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$



$$\text{Ta có } V_{SABC} = 2V_{SBAM} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot BM \cdot S_{SAM} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

Gọi N là trung điểm của đoạn SA. Ta có  $CN \perp SA$

$$\Rightarrow CN = \frac{a\sqrt{13}}{4} \quad (\text{vì } \Delta SCN \text{ vuông tại N})$$

$$\Rightarrow S_{SCA} = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

$$\text{Ta có } V_{SABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{3} \cdot S_{SCA} \cdot d(B, SAC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{39}}{16} \cdot d(B, SAC)$$

$$\Rightarrow d(B, SAC) = a^3\sqrt{3} \frac{3}{a^2\sqrt{39}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$

-----@-----

**HÀ VĂN CHƯƠNG - PHẠM HỒNG DANH**

*(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và Luyện thi đại học Vĩnh Viễn)*