



ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2008
Môn thi: TOÁN, khối D (Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm I (1;2) với hệ số góc k ($k > -3$) đều cắt đồ thị của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình $2\sin x(1+\cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A(3;3;0), B(3;0;3), C(0;3;3), D(3;3;3)

1. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.
2. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$

2. Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$

PHẦN RIÊNG ----- Thí sinh chỉ được làm 1 trong 2 câu : V.a hoặc V.b -----

Câu V.a. Theo chương trình KHÔNG phân ban (2 điểm)

1. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn hệ thức $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử)
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) : $y^2 = 16x$ và điểm A(1; 4). Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu V.b. Theo chương trình phân ban (2 điểm)

1. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0$
 2. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.
-

BÀI GIẢI GỢI Ý

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

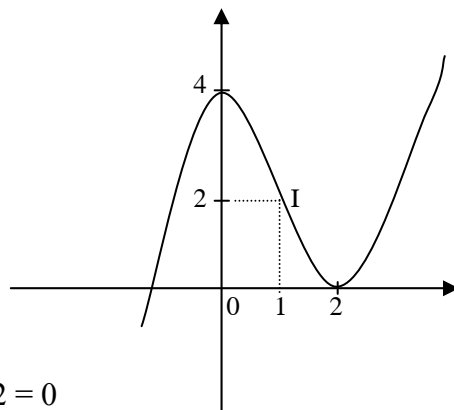
Câu I (2 điểm)

1. $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2), y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

$$y'' = 6x - 6, y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y''		-	-	0	+	+
y			4	2	0	$+\infty$



2. d : $y - 2 = k(x - 1) \Leftrightarrow y = kx - k + 2$

$$\text{Pthđđ: } x^3 - 3x^2 + 4 = kx - k + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - kx + k + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - k - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee g(x) = x^2 - 2x - k - 2 = 0$$

Vì $\Delta' > 0$ và $g(1) \neq 0$ (do $k > -3$) và $x_1 + x_2 = 2x_1$ nên có đpcm.

Câu II (2 điểm)

1. Pt $\Leftrightarrow 4\sin x \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1 - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x \cos x - 1) + (2\sin x \cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x \cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

2. ĐK: $x \geq 1$ và $y \geq 0$

$$xy + x + y = x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -y \vee x = 2y + 1$$

* Th.1 : $x = -y$. Vì $y \geq 0$ nên $x \leq 0$ (loại vì $x \geq 1$)

* Th.2 : $x = 2y + 1$ thế vào pt $x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y$ ta được :

$$(2y + 1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2y + 2 \Leftrightarrow (y + 1)(\sqrt{2y} - 2) = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ (loại)} \vee y = 2.$$

Vậy hệ có 1 nghiệm : $x = 5; y = 2$.

Câu III (2 điểm)

1. Pt mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

(S) đi qua A, B, C, D $\Leftrightarrow 18 - 6a - 6b + d = 0$ và $18 - 6a - 6c + d = 0$ và $18 - 6b - 6c + d = 0$ và

$$27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}; b = \frac{3}{2}; c = \frac{3}{2}; d = 0.$$

$$\text{Vậy pt (S) : } x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0$$

2. mp (ABC) đi qua A và có VTPT là $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (-9; -9; -9)$ nên có pt $x + y + z - 6 = 0$

d đi qua tâm I $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ của (S) và \perp với mp (ABC) có pt : $x = \frac{3}{2} + t, y = \frac{3}{2} + t, z = \frac{3}{2} + t$.

Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC chính là giao điểm H của d và mp(ABC) $\Rightarrow H(2; 2; 2)$.

Câu IV (2 điểm)

1. Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$, $dv = \frac{dx}{x^3}$ chọn $v = -\frac{1}{2x^2}$

$$I = -\frac{1}{2x^2} \ln x \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2x^3} dx = -\frac{1}{8} \ln 2 + \frac{3}{16}$$

2. Đặt $x = \operatorname{tgu}, y = \operatorname{tgv}$ với $u, v \in [0; \frac{\pi}{2})$.

$$P = \frac{(\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v)(1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v)}{(1 + \operatorname{tg} u)^2 (1 + \operatorname{tg} v)^2} = \frac{\sin(u - v) \cos(u + v)}{(\sin u + \cos u)^2 (\sin v + \cos v)^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2u - \sin 2v}{(1 + \sin 2u)(1 + \sin 2v)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sin 2v} - \frac{1}{1 + \sin 2u} \right)$$

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+1} \right) = \frac{1}{4} \text{ khi } u = \frac{\pi}{4} \text{ và } v = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ và } y = 0$$

$$P_{\min} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+0} \right) = -\frac{1}{4} \text{ khi } u = 0 \text{ và } v = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } y = 1$$

Cách khác :

$$P = \frac{x - x^2 y - y + xy^2}{(1+x)^2 (1+y)^2} = \frac{x(1+y^2) - y(1+x^2)}{(1+x)^2 (1+y)^2} = \frac{x(1+2y+y^2) - y(1+2x+x^2)}{(1+x)^2 (1+y)^2}$$

$$= \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{y}{(1+y)^2}, \text{ mà } 0 \leq \frac{a}{(1+a)^2} \leq \frac{1}{4} (\forall a \geq 0)$$

$$\text{nên : } P_{\max} = \frac{1}{4} \text{ khi } x = 1 ; y = 0 \text{ và } P_{\min} = -\frac{1}{4} \text{ khi } x = 0 ; y = 1.$$

PHẦN RIÊNG ----- Thí sinh chỉ được làm 1 trong 2 câu : V.a hoặc V.b -----

Câu V.a. Theo chương trình KHÔNG phân ban (2 điểm)

$$1. (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + x C_{2n}^1 + x^2 C_{2n}^2 + x^3 C_{2n}^3 + \dots + x^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + x^{2n} C_{2n}^{2n}$$

$$x = 1 : 2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (1)$$

$$x = -1 : 0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

$$(1) - (2) : 2^{2n} = 2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}) = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 6.$$

$$2. B, C \in (P) \Rightarrow B\left(\frac{b^2}{16}; b\right), C\left(\frac{c^2}{16}; c\right) \quad (b \neq c, b \neq 4, c \neq 4)$$

$$\overline{AB} = \left(\frac{b^2}{16} - 1; b - 4\right), \overline{AC} = \left(\frac{c^2}{16} - 1; c - 4\right)$$

$$AB \perp AC \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow (b+4)(c+4) + 256 = 0 \Leftrightarrow b+c = \frac{-272 - bc}{4} = -(68 + \frac{bc}{4})$$

$$BC \text{ qua } B\left(\frac{b^2}{16}; b\right) \text{ có 1 vtcp : } \overline{BC} = \frac{c-b}{16}(c+b; 16).$$

Nên có pt BC :

$$16\left(x - \frac{b^2}{16}\right) - (b+c)(y-b) = 0 \Leftrightarrow 16x - (b+c)y + bc = 0 \Leftrightarrow 4(4x + 17y) + bc\left(\frac{y}{4} + 1\right) = 0$$

$$BC \text{ luôn qua điểm cố định thỏa : } 4x + 17y = 0 \text{ và } \frac{y}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 17 \text{ và } y = -4.$$

Vậy BC luôn qua I (17, -4) cố định.

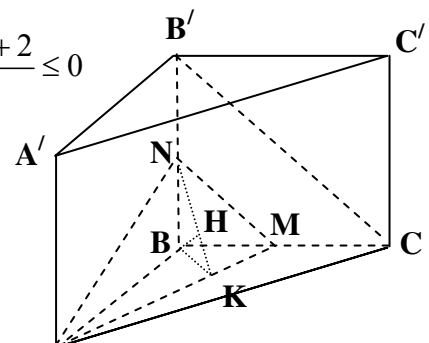
Câu V.b. Theo chương trình phân ban (2 điểm)

$$1. Bpt \Leftrightarrow 0 < \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x} > 0 \text{ và } \frac{x^2 - 4x + 2}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} \leq x < 1 \text{ hay } 2 < x \leq 2 + 2\sqrt{2}$$

$$2. \text{ Thể tích } V = Sh = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot a\sqrt{2} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (đvtt)}$$

Gọi N là trung điểm BB'



Ta có : $d(B'C, AM) = d(B', (AMN)) = d(B, (AMN))$ (vì N là trung điểm BB')
 $= BH$ với H là hình chiếu của B lên mp (AMN)

$$\text{Ta có : } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{7}}$$

----- oOo -----

PHẠM HỒNG DANH – TRẦN VĂN TOÀN
(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và Luyện thi đại học Vĩnh Viễn, TP.HCM)