Phương trình chứa ẩn ở căn thức

Ví dụ : Giải phương trình: $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

Giải: ĐK $0\le x\le 1$.

Để giải phương trình này thì rõ ràng ta phải tìm cách loại bỏ căn thức. Có những cách nào để loại bỏ căn thức ? Điều đầu tiên chúng ta nghĩ tới đó là lũy thừa hai vế. Vì hai vế của phương trình đã cho luôn không âm nên bình phương hai vế ta thu được phương trình tương đương.

$$(1)\Leftrightarrow\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}\right)^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)^2\Leftrightarrow 1+\frac{4}{3}\sqrt{x-x^2}+\frac{4}{9}(x-x^2)=1+2\sqrt{x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-x^2)-\sqrt{x-x^2}=0\Leftrightarrow\sqrt{x-x^2}\left(2\sqrt{x-x^2}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-x^2}=0\\ \sqrt{x-x^2}=\frac{3}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;x=1\\ VN_0\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của phương trình: $x=0;x=1$.

Qua lời giải trên ta thấy được $\sqrt{x-x^2}$ sẽ biểu diễn được qua $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ nhờ vào đẳng thức $\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)^2=1+2\sqrt{x-x^2}$ (*) .Cụ thể nếu ta đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ thì $\sqrt{x-x^2}=\frac{t^2-1}{2}$ và khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai với ẩn là t: $1+\frac{t^2-1}{3}=t\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow t=1;t=2$.

Vậy ta có: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1\\ \sqrt{x}+\sqrt{1-x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sqrt{x-x^2}=0\\ VN_0\quad (VT<2)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0;x=1$.

Việc thay thế biểu thức $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ bằng một ẩn mới là t (mà ta gọi là ẩn phụ) là một suy nghĩ hoàn toàn phù hợp với tự nhiên (chúng ta nhớ lại là chúng ta đang tìm cách làm mất căn thức !). Cách làm như thế này ta thường gặp trong cuộc sống hằng ngày của chúng ta, chẳng hạn khi chúng ta đi xa không tiện cho việc mang theo tiền mặt ta có thể đổi qua đô la, hay thẻ ATM, séc,…Cũng như việc chuyển đổi tiền ở trên, để làm mất căn thức ta tìm cách đặt một biểu thức chứa căn thức nào đó bằng một biểu thức ẩn mới sao cho phương trình ẩn mới có hình thức kết cấu đơn giản hơn phương trình ban đầu. Đặt biểu thức chứa căn nào bằng biểu thức ẩn mới như thế nào là vấn đề quan trọng nhất, bước làm này quyết định đến có được lời giải hay không và lời giải đó tốt hay dở. Để chọn được được cách đặt ẩn phụ thích hợp thì ta cần phải tìm được mối quan hệ của các biểu thức tham gia trong phương trình như ở cách giải trên ta đã tạo được mối quan hệ đó là đẳng thức (*). Có nhiều cách để tạo ra mối quan hệ giữa các đối tượng tham gia trong phương trình chẳng hạn ở phương trình trên ngoài đẳng thức (*) ta còn có mối quan hệ giữa các biểu thức tham gia trong phương trình:

$\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = x + 1 - x = 1$ (**) mà từ phương trình ta rút được một căn thức qua căn thức còn lại: $\sqrt{x} = \dfrac{3\sqrt{1-x} - 3}{2\sqrt{1-x} - 3}$. Do đó nếu đặt $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{3t-3}{2t-3}$ thay vào (**) và biến đổi ta thu được phương trình

$t(t-1)(2t^2 - 4t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = 1$ hay $x = 0, x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Phương trình đã cho chỉ chứa tổng và tích của hai căn thức, đồng thời hai căn thức thỏa mãn (**) do vậy ta có thể đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{1-x}$ thì từ phương trình đã cho kết hợp với (**) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + \dfrac{2}{3}ab = a + b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ đây là hệ đối xứng loại I, giải hệ này ta được nghiệm của phương trình là x=0 và x=1. Bản chất cách giải này chính là cách đặt ẩn phụ $t = \sqrt{1-x}$ mà ta đã giải ở trên .

Tiếp tục nhận xét thì đẳng thức (**) giúp ta liên tưởng đến đẳng thức nào mà ta biết ? Chắc hẳn các bạn sẽ dễ dàng trả lời được đó là đẳng thức lượng giác: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Điều này dẫn đến cách giải sau:

Đặt $x = \sin^2 t,\ \ t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ (Điều này hoàn toàn hợp lí vì $x \in [0;1]$). Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$1 + \frac{2}{3}\sin t.\cos t = \sin t + \cos t \Leftrightarrow 3(1 - \sin t) + \sqrt{(1-\sin t)(1+\sin t)}(2\sin t - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 1 \Rightarrow x = 1 \\ 3\sqrt{1-\sin t} = (3 - 2\sin t)\sqrt{1+\sin t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \sin t(4\sin^2 t - 6\sin t + 8) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Qua ví dụ trên ta thấy có nhiều cách để giải phương trình và bất phương trình vô tỉ. Mọi phương pháp đều chung một tưởng đó là tìm cách loại bỏ căn thức và đưa phương trình đã cho về phương trình mà ta đã biết cách giải. Sau đây chúng ta sẽ đi vào từng phương pháp giải cụ thể.

I. Phương pháp biến đổi tương đương :

Nội dung của phương pháp này là sử dụng các tính chất của lũy thừa và các phép biến đổi tương đương của phương trình, bất phương trình biến đổi phương trình, bất phương trình ban đầu về phương trình, bất phương trình đã biết cách giải.

Ta nhơ lại các tính chất của lũy thừa và phép biến đổi tương đối đối với phương trình và bất phương trình.

1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ (Nếu n chẵn thì cần thêm điều kiện $a \geq 0$).

2) $a = b \Leftrightarrow a^{2n} = b^{2n}$ với a và b cùng dấu

3) $a = b \Leftrightarrow a^{2n+1} = b^{2n+1}$ với mọi a,b.

4) $a \geq b \geq 0 \Leftrightarrow a^{2n} \geq b^{2n}$ (Chú ý nếu a,b<0 thì $a > b \Leftrightarrow -a < -b$ khi đó hai vế cùng không âm và lúc đó ta mới lũy thừa bậc chẵn hai vế).

5) $a \geq b \Leftrightarrow a^{2n+1} \geq b^{2n+1} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x+1} = 3x+1$.

Giải: Ta thấy VT luôn không âm, do đó nếu VP âm thì phương trình vô nghiệm nên ta chỉ cần giải phương trình khi $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$. Khi đó hai vế đều không âm và bình phương ta thu được phương trình tương đương: $2x+1 = (3x+1)^2$ nếu $x_0 \geq -\frac{1}{3}$ là nghiệm của phương trình này thì $2x_0 + 1 = (3x_0+1)^2 \Rightarrow 2x_0 + 1 \geq 0$ do vậy ta không cần đặt điều kiện cho biểu thức dưới dấu căn. Vậy :

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = (3x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 9x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x = 0,\ x = -\frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0,\ x = -\frac{4}{9}.$$

Nhận xét: * Phương trình trên có dạng tổng quát: $\sqrt{f(x)} = g(x)$, khi gặp dạng này ta biến đổi tương đương như sau: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$. Ở đây vì sao ta không cần đặt đk $f(x) \geq 0$?.

* Ở bài toán trên ta có thể giải bằng cách đặt ẩn phụ $t = \sqrt{2x+1}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

Giải: Đk: $-4 \leq x \leq \frac{1}{2}$ (*)

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{1-2x} + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x+4 = 1-2x+2\sqrt{(1-2x)(1-x)} + 1 - x$$

$\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{(1-2x)(1-x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ (2x+1)^2=(1-2x)(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

Đối chiếu điều kiện (*) ta thấy x=0 thỏa mãn. Vậy nghiệm của pt đã cho là x=0.

Chú ý : Ở phương trình trên vì sao chúng ta lại chuyển $\sqrt{1-x}$ qua rồi mới bình phương? Mục đích của việc làm này là tạo ra hai vế của phương trình luôn cùng dấu để sau khi bình phương ta thu được phương trình tương đương.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2-6x+1}-x+2<0$.

Giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+1}<x-2$ **(1)**

Vì VT của (1) luôn không âm nên nếu VP(1) ≤ 0 thì Bất phương trình vô nghiệm, do đó ta chỉ giải Bất phương trình khi $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$. Bình phương hai vế ta được Bpt: $2x^2-6x+1<(x-2)^2$. Nếu x_0 bất phương trình này thì ta chưa thể khẳng định được $2x_0^2-6x_0+1\ge 0$ do đó ta phải đặt điều kiện cho biểu thức dưới dấu căn. Vậy bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm ba bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2x^2-6x+1\ge 0 \\ 2x^2-6x+1<(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\le \frac{3-\sqrt{7}}{2} \text{ V } x\ge \frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ x^2-2x-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\le \frac{3-\sqrt{7}}{2} \text{ V } x\ge \frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ -1<x<3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{7}}{2}\le x<3$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Nhận xét: Dạng tổng quát của bất phương trình trên là: $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)\ge 0 \\ f(x)<g^2(x) \end{cases}$

Giải hệ bất phương trình này ta được nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình : $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$ ***(ĐH Khối A – 2004)***.

Giải: ĐK: $x\ge 4$.

Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)}+x-3>7-x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)}>10-2x$ **(2)**

Ta có VT (2) ≥ 0 nên nếu VP(2)$<0 \Leftrightarrow x>5$ thì (2) luôn đúng. Nếu VP(2)$\ge 0 \Leftrightarrow x\le 5$ thì bpt (2) $\Leftrightarrow 2(x^2-16)>(10-2x)^2$. Nếu x_0 bất phương trình này thì ta có

$2(x_0^2-16)\ge 0$ do đó ta không cần đặt điều kiện cho biểu thức dưới dấu căn

Vậy để giải bất phương trình (2) ta chia làm hai trường hợp

TH1: $\begin{cases} x\ge 4 \text{ (đk)} \\ 10-2x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x>5.$

TH2: $\begin{cases} 10-2x\ge 0 \\ 2(x^2-16)>(10-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\le x\le 5 \\ x^2-20x+66<0 \end{cases} \Leftrightarrow 10-\sqrt{34}<x\le 5$.

Lấy hợp hai trường hợp ta có nghiệm bất phương trình là: $x>10-\sqrt{34}$.

Nhận xét: Dạng tổng quát của bất phương trình (2) là: $\sqrt{f(x)}\ge g(x)$. Để giải bpt này ta chia làm hai trường hợp:

TH 1: $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

TH 2: $\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)\ge g^2(x) \end{cases}$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$.

Giải:

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ 2x+\sqrt{6x^2+1}=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \sqrt{6x^2+1}=x^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 6x^2+1=(x^2+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^4-4x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0, x=2.$$

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$.

Giải: ĐK: $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -2 \quad (*) \\ x=0 \end{array}\right.$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2x^2+x+2\sqrt{x^2(x-1)(x+2)}=4x^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x^2+x-2)}=x(2x-1) \Leftrightarrow 4x^2(x^2+x-2)=x^2(2x-1)^2$ (do đk (*)).

$\Leftrightarrow x^2(8x-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{9}{8} \end{array}\right.$ cả hai giá trị này đều thỏa mãn (*).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=0; x=\dfrac{9}{4}$.

Chú ý : 1) Bài toán trên còn có cách giải khác như sau

* $x = 0$ là một nghiệm của phương trình.

* $x \ge 1 \Rightarrow PT \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x-2} = 2x-1$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 8 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$ (nhận).

* $x \le -2 \Rightarrow PT \Leftrightarrow \sqrt{-x(1-x)} + \sqrt{-x(-x-2)} = 2\sqrt{(-x)(-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{-x-2} = 2\sqrt{-x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x-2} = -2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$ (loại).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0; x = \frac{9}{4}$.

2) Khi biến đổi như trên chúng ta sai lầm khi cho rằng $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$! Nên nhớ đẳng thức này chỉ đúng khi $a, b \ge 0$! Nếu $a, b \le 0$ thì $\sqrt{ab} = \sqrt{-a}.\sqrt{-b}$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$.

Giải:

Phương trình $2x - 3 + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 2x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3} \\ \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$\Leftrightarrow x = 1; x = 2; x = \frac{3}{2}$.

Chú ý :

* Khi giải phương trình trên chúng ta thường biến đổi như sau

$2x - 3 + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 2x - 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)} = 0$!?

Phép biến đổi này không phải là phép biến đổi tương đương! Vì ở đây chúng ta đã thừa nhận phương trình ban đầu có nghiệm !. Do đó để có được phép biến đổi tương đương thì ta phải đưa về hệ như trên. Chẳng hạn ta xét phương trình sau

$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = -1 \Leftrightarrow 2 + 3\sqrt[3]{1-x^2}(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}) = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Nhưng thay vào phương trình ban đầu ta thấy x=0 không thỏa mãn phương trình !

* Với dạng tổng quát $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c}$ ta lập phương hai vế và sử dụng hằng đẳng thức $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$ ta có phương trình tương đương với hệ

$\begin{cases} \sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} \\ a \pm b \pm 3\sqrt[3]{a.b.c} = c \end{cases}$. Giải hệ này ta có được nghiệm của phương trình.

Ví dụ 8: Giải phương trình: $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$ (***HSG QG 2000***).

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ 4-3\sqrt{10-3x}=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ 4x-x^2=3\sqrt{10-3x}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le 4\\ x^4-8x^3+16x^2+27x-90=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le 4\\ (x-3)(x^3-5x^2+x+30)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le 4\\ (x-3)(x+2)(x^2-7x+15)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Ví dụ 9: Giải phương trình: $\sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y}$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{4x-y^2}=\sqrt{4x^2+y}+\sqrt{y+2}$

$\Rightarrow 4x-y^2=4x^2+4y+2+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)}$

$\Leftrightarrow(2x-1)^2+(y+2)^2+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=-2\end{cases}$.

Thử lại ta thấy cặp (x;y) này thảo mãn phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=-2\end{cases}$.

Ví dụ 9: Giải phương trình:

1) $x^2+\sqrt{x+7}=7$. 2) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+3}{5}$.

Giải:

1) Phương trình $x^2-(x+7)+(x+\sqrt{x+7})=0\Leftrightarrow(x+\sqrt{x+7})(x-\sqrt{x+7}+1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x+7}=-x & (1)\\ \sqrt{x+7}=x+1 & (2)\end{array}\right.$$

* (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2-x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$.

* (2) $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2+x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2;x=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$.

2) Phương trình $\Leftrightarrow 5(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2})=(4x+1)-(3x-2)$

$\Leftrightarrow 5(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2})=(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2})(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=0\\ \sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$.

Nhận xét: *Với bài 1 ta có thể giải như sau: Đặt $y=\sqrt{x+7}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}y^2-x=7\\ x^2+y=7\end{cases}$ trừ vế theo vế hai phương trình ta được: $(y+x)(y-x-1)$. Từ đây giải ra ta tìm được x.

* Câu 1 có dạng tổng quát như sau: $x^2+\sqrt{x+a}=a$.

* Với bài toán 2 ta còn có cách giải khác như sau

Phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{4x+1}-3)-(\sqrt{3x-2}-2)=\frac{x-2}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{4x+1}+3}-\frac{3(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2}=\frac{x-2}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}-1}{(\sqrt{4x+1}+3)(\sqrt{3x-2}+2)}=\frac{1}{5} \quad (*)\end{array}\right.$

Vì $VT(*)<0$ (do $x\ge\frac{2}{3}$) nên (*) vô nghiệm.

Ví dụ 10: Giải bất phương trình :

1) $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}>x-4$ 2) $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$.

Giải:

1) ĐK: $x\ge -1$

* Với $x=0$ ta thấy Bpt luôn đúng

* Với $x\ne 0 \Rightarrow 1-\sqrt{x+1}\ne 0$. Nhận lượng liên hợp ở VT của Bpt ta được

$\frac{x^2(1-\sqrt{x+1})^2}{(1+\sqrt{x+1})^2(1-\sqrt{x+1})^2}>x-4 \Leftrightarrow (1-\sqrt{x+1})^2>x-4 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}<3 \Leftrightarrow x<8$

Vậy nghiệm của Bpt đã cho là: $T=[-1;8)$.

2) Ta xét hai trường hợp

TH 1: $2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=2, x=-\frac{1}{2}$. Khi đó BPT luôn đúng

TH 2: Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3 - 2 > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \text{ V } x > 2 \\ x \leq 0 \text{ V } x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \text{ V } x \geq 3$.

Vậy nghiệm của Bpt đã cho là: $T = (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

Chú ý : * Ở bài toán 2 ta thường không chú ý đến trường hợp 1, đây là sai lầm mà chúng ta thường gặp trong giải phương trình và bất phương trình vô tỉ.
* Khi giải bất phương trình nếu ta muốn nhân hoặc chia hai vế cảu bất phương trình cho một biểu thức thì ta phải xác định được dấu của biểu thức đó. Nếu chưa xác định được dấu của biểu thức mà ta muốn nhân thì ta có thể chia làm hai trường hợp.

Ví dụ 11: Giải bất phương trình :

1) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9$ 2) $\dfrac{\sqrt{51 - 2x - x^2}}{1-x} < 1$.

Giải:

1)

* Với $x = 3 \Rightarrow$ bất phương trình đúng.

* Với $x > 3 \Rightarrow$ Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \sqrt{x^2+4} < x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 + 4 < (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.

* Với $x < 3 \Rightarrow$ Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ \sqrt{x^2+4} > x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ \begin{cases} -3 \leq x < 3 \\ 6x + 5 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x < -\frac{5}{6}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình dã cho là: $x < -\frac{5}{6}$ V $x \geq 3$.

2)

* Nếu $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow$ Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 51 - 2x - x^2 \geq 0 \\ \sqrt{51 - 2x - x^2} < 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 - \sqrt{52} \leq x \leq 1 + \sqrt{52} \\ x^2 > 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{52} \leq x < -5$.

*Nếu $x > 1 \Rightarrow$ luôn đúng vì $VT < 0 < 1$.

Vậy nghiệm bất phương trình đã cho là : $1 - \sqrt{52} \leq x < -5$ V $x > 1$.

Ví dụ 12: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 - 2mx + 1} = m - 2$ có nghiệm.

Giải:

* Nếu $m < 2 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

* Với $m>2\Rightarrow$ Phương trình

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1=m^2-4m+4\Leftrightarrow x^2-2mx-m^2+4m-3=0$

Phương trình có nghiệm $\Delta'=2m^2-4m+3\ge 0$ đúng mọi m

Vậy $m\ge 2$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 13: Tìm m để phương trình: $\sqrt{2x^2+mx-3}=x+1$ có hai nghiệm phân biệt.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2+(m-2)x-4=0 \quad (*)\end{cases}$.

Phương trình (*) luôn có hai nghiệm :

$x_1=\dfrac{2-m+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}>0\,;x_2=\dfrac{2-m-\sqrt{m^2-4m+8}}{2}<0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt ≥ -1

$\Leftrightarrow x_2\ge -1\Leftrightarrow 4-m\ge\sqrt{m^2-4m+8}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 4\\ (4-m)^2\ge m^2-4m+8\end{cases}\Leftrightarrow m\le 2$.

Vậy $m\le 2$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 14: Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2-mx}-\sqrt{x^2-4}=0$ có nghiệm.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-mx}=\sqrt{x^2-4}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4\ge 0 & (1)\\ x^2-mx+4=0 & (2)\end{cases}$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta=m^2-160\ge 0\Leftrightarrow|m|\ge 4$ (*) . Khi đó (2) có hai nghiệm là:

$x_{1,2}=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-16}}{2}$.

Nghiệm x_1 thỏa mãn (1) $\Leftrightarrow(m+\sqrt{m^2-16})^2-16\ge 0\Leftrightarrow m^2+m\sqrt{m^2-16}-16\ge 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{m^2-16}(\sqrt{m^2-16}+m)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 4\\ \sqrt{m^2-16}\ge -m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\ m\ge 4\end{array}\right.$.

Nghiệm x_2 thỏa mãn (1) $\Leftrightarrow(m-\sqrt{m^2-16})^2-16\ge 0\Leftrightarrow m^2-m\sqrt{m^2-16}-16\ge 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{m^2-16}(\sqrt{m^2-16}-m)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 4\\ \sqrt{m^2-16}\ge m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m\le -4\end{array}\right.$.

Vậy $|m|\ge 4$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Chú ý : Bài toán trên ta có thể giải ngắn ngọn hơn như sau: Nếu (2) có nghiệm thì $|x_1x_2|=4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|x_1|\geq 2\\|x_2|\geq 2\end{array}\right.$ nên phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta\geq 0\Leftrightarrow|m|\geq 4$.

Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$ 2) $\sqrt{8x^2-6x+1}-4x+1=0$

3) $\sqrt{(x+5)(3x+4)}=4(x-1)$ 4) $\dfrac{36}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}$

5) $\dfrac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}=x-4$ 6) $x-2\sqrt{x-1}-\sqrt{x}(x-1)+\sqrt{x^2-x}=0$

7) $\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ 8) $ax^4+x^4\sqrt{x^2+a}+x^2=a(a+1)$

9) $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$.

10) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$. 11) $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$.

12) $\sqrt[3]{2x-1}=x\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2x+1}$ 13) $x+\sqrt{x+5}=5$

14) $x^4-2x^2\sqrt{x^2-2x+16}+2x^2-6x+20=0$.

15) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$.

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

1) $4(x+1)^2\geq(2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$ 2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\leq\sqrt{x}$

3) $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$ 4) $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-9}\leq\sqrt{5x-27}$

5) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\geq x$ 6) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3}\leq\sqrt{4x+9}$

7) $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1}\geq x-1$ 8) $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$

9) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$ 10) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\sqrt{2x+1}-1$

11) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$ 12) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$

13) $\dfrac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x}<2$ 14) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}\geq 2-x^2$

Phương pháp đặt ẩn phụ:

Nội dung của phương pháp này là đặt một biểu thức chứa căn thức bằng một biểu thức ẩn mới mà ta gọi là ẩn phụ, rồi chuyển phương trình ẩn phụ vừa đặt. Giải phương trình ẩn phụ tìm nghiệm rồi thay vào biểu thức vừa đặt để tìm ẩn ban đầu.
Với phương pháp này ta thường tiến hành theo các bước sau

B1: Chọn cách đặt ẩn phụ, tìm điều kiện xác định của ẩn phụ
Bước này là bước quan trọng nhất. Ta cần phải chọn biểu thức thích hợp để đặt ẩn phụ, để làm tốt bước này ta phải nhận xét được mối quan hệ của các biểu thức có mặt trong phương trình, bất phương trình. Cụ thể là ta phải tìm được sự biểu diễn của các biểu thức chứa ẩn trong phương trình qua một đại lượng khác.

B2: Chuyển phương trình (bpt) ban đầu về phương trình (bpt) ẩn phụ vừa đặt.
Thông thường sau khi đặt ẩn phụ thì phương trình thu được thường là những phương trình (bpt) mà ta đã biết cách giải. Khi tìm được nghiệm ta cần chú ý đến điều kiện của ẩn phụ để chọn những nghiệm thích hợp.

B3: Giải phương trình (bpt) với ẩn phụ vừa tìm được và kết luận tập nghiệm.
Có rất nhiều cách để đặt ẩn phụ. Ta đi xét một số dạng phương trình (bpt) mà ta thường hay gặp.

Dạng 1: $F(\sqrt[n]{f(x)})=0$, với dạng này ta đặt $t=\sqrt[n]{f(x)}$ (nếu n chẵn thì phải có điều kiện $t\ge 0$) và chuyển về phương trình $F(t)=0$ giải phương trình này ta tìm được $t\Rightarrow x$.
Trong dạng này ta thường gặp dạng bậc hai: $af(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0$.

Ví dụ 1: Giải phương trình

$1)x^2+\sqrt{x^2+11}=31$ $\qquad$ $2)(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

Giải:

1) Đặt $t=\sqrt{x^2+11},\ t\ge 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$t^2+t-42=0\Leftrightarrow t=6\Leftrightarrow \sqrt{x^2+11}=6\Leftrightarrow x=\pm 5$.

2) Phương trình $\Leftrightarrow x^2+3x-3\sqrt{x^2+3x}-10=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2+3x},\ \ t\ge 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2-3t-10=0\Leftrightarrow t=5\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x}=5\Leftrightarrow x^2+3x-25=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{109}}{2}.$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình :

1) $x^2-2x-22-\sqrt{-x^2+2x+24}\ge 0$ $\qquad$ 2) $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}\le\sqrt{-x^2+9x+6}$

Giải:

1) Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+24},\ (t\ge 0)\Rightarrow -x^2+2x+24=t^2\Rightarrow x^2-2x-22=2-t^2$

Bất phương trình trở thành: $2-t^2-t\ge 0\Leftrightarrow t^2+t-2\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+24}\le 1\Leftrightarrow \begin{cases}-x^2+2x+24\ge 0\\ x^2-2x-23\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-4\le x\le 6\\ x\le 1-2\sqrt{6}\ \vee\ x\ge 1+2\sqrt{6}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4\le x\le 1-2\sqrt{6}\\ 1+2\sqrt{6}\le x\le 6\end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

2) ĐK: $0\le x\le 9$

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 9+2\sqrt{9x-x^2}\le -x^2+9x+6$

$\Leftrightarrow 9x-x^2-2\sqrt{9x-x^2}-3\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{9x-x^2}\ge 3\Leftrightarrow x^2-9x+9\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\le x\le \dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là: $\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\le x\le \dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 3 : Tìm m để các phương trình sau có nghiệm: $x^2+2x+2m\sqrt{5-2x-x^2}=m^2$.

Giải:

Đặt $t=\sqrt{5-2x-x^2}=\sqrt{6-(x+1)^2}\Rightarrow t\in[0;\sqrt{6}]$ và $x^2+2x=5-t^2$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2-2mt+m^2-5=0$ (*) $\Leftrightarrow t=m\pm\sqrt{5}$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $t\in[0;\sqrt{6}]$ hay

$$\left[\begin{array}{l}0\le m+\sqrt{5}\le\sqrt{6}\\ 0\le m-\sqrt{5}\le\sqrt{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{5}\le m\le\sqrt{6}-\sqrt{5}\\ \sqrt{5}\le m\le\sqrt{6}+\sqrt{5}\end{array}\right..$$

Ví dụ 4**:** Chứng minh rằng với $\forall m\ge 0$ thì phương trình sau luôn có nghiệm:

$$x^2+(m^2-\frac{5}{3})\sqrt{x^2+4}+2-m^3=0.$$

Giải:

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t\ge 2$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$f(t)=t^2+(m^2-\dfrac{5}{3})t-m^3-2=0\quad$ (*).

Vì $m\ge 0\Rightarrow$ (*) luôn có hai nghiệm t phân biệt (Do $\Delta=(m^2-\dfrac{5}{3})^2+4(m^3+2)>0$) và

$f(2)=-(m^3-2m^2+\dfrac{4}{3})$

Ta sẽ chứng minh $m^3-2m^2+\frac{4}{3}>0\ \forall m\geq 0$ **(1)**.

* Nếu $m\geq 2\Rightarrow m^3-2m^2\geq 0\Rightarrow (1)$ đúng

* Nếu $0\leq m\leq 2\Rightarrow m^3-2m^2+\frac{32}{27}=(m+\frac{2}{3})(m-\frac{4}{3})^2\geq 0\Rightarrow m^3-2m^2\geq -\frac{32}{27}$

$\Rightarrow m^3-2m^2\geq \frac{4}{3}-\frac{32}{27}=\frac{4}{27}>0\Rightarrow (1)$ đúng.

$\Rightarrow f(2)<0\Rightarrow (*)$ luôn có một nghiệm $t>2$ hay phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Chú ý : * Nếu tam thức $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $af(\alpha)<0\Rightarrow$ tam thức luôn có nghiệm và nếu a>0 thì nghiệm đó $>\alpha$ nếu a<0 thì nghiệm đó $<\alpha$.

* Để chứng minh $m^3-2m^2+\frac{4}{3}>0$ ta có thể sử dụng phương pháp hàm số hoặc BĐT

Dạng 2: $m(\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)})\pm 2n\sqrt{f(x).g(x)}+n(f(x)+g(x))+p=0$.

Với dạng này ta đặt $t=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$ .Bình phương hai vế ta sẽ biểu diễn được những đại lượng còn lại qua t và chuyển phương trình (bpt) ban đầu về phương trình (bpt) bậc hai đối với t.

Ví dụ 1: Cho phương trình: $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=m+\sqrt{(3+x)(6-x)}$.

1) Giải phương trình khi m=3.
2) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

Giải:

Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\Rightarrow t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}$ (*)

Áp dụng BĐT Côsi ta có $2\sqrt{(3+x)(6-x)}\leq 9$ nên từ (*)$\Rightarrow 3\leq t\leq 3\sqrt{2}$.

Phương trình đã cho trở thành: $t=m+\frac{t^2-9}{2}\Leftrightarrow t^2-2t-9=-2m$ **(1)**

1) Với $m=3$ ta có phương trình: $t^2-2t-3=0\Leftrightarrow t=3$ thay vào (*) ta được

$\sqrt{(3+x)(6-x)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=6\end{array}\right.$.

2) Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t\in[3;3\sqrt{2}]$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t-9$ với $t\in[3;3\sqrt{2}]$, ta thấy f(t) là một hàm đồng biến

$\Rightarrow -6=f(3)\leq f(t)\leq f(3\sqrt{2})=9-6\sqrt{2}\quad\forall t\in[3;3\sqrt{2}]$

Do vậy (1) có nghiệm $t\in[3;3\sqrt{2}]\Leftrightarrow -6\leq -2m\leq 9-6\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{6\sqrt{2}-9}{2}\leq m\leq 3$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Vậy $\frac{6\sqrt{2}-9}{2}\le m\le 3$ là những giá trị cần tìm.

Chú ý : Nếu hàm số xác định trên D và có tập giá trị là Y thì phương trình $f(x)=k$ có nghiệm trên D $\Leftrightarrow k\in Y$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}-16$.

Giải: Đk: $x\ge -1$.

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1},\ t\ge 0\Rightarrow t^2=3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}+4$ (*)

Khi đó phương trình trở thành: $t=t^2-20\Leftrightarrow t^2-t-20=0\Leftrightarrow t=5$

Thay $t=5$ vào (*) ta được:

$$21-3x=2\sqrt{2x^2+5x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 7\\ 441-126x+9x^2=8x^2+20x+12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 7\\ x^2-146x+429=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$.

Giải:

Đặt $t=x+\sqrt[3]{35-x}\Leftrightarrow t^3=35+3x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})\Rightarrow x\sqrt[3]{35-x^3}=\frac{t^3-35}{3t}$ (*)

Phương trình đã cho trở thành: $\frac{t^3-35}{3t}.t=30\Leftrightarrow t=5$ thay vào (*) ta có:

$$x\sqrt[3]{35-x^3}=6\Leftrightarrow x^3(35-x^3)=216\Leftrightarrow x^6-35x^3+216=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=2\end{array}\right..$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{5}{2}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})+2=0$.

Giải: ĐK: $-1<x<1$.

Đặt $t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow t^2=\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}+1$.

Phương trình đã cho trở thành: $2t^2+5t+2=0\Leftrightarrow t=-2;t=-\frac{1}{2}$.

$$*\ \ t=-2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-2\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<0\\ \frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}=3\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

$* \, t=-2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<0 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^2}=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình : $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}\le 181-14x$.

Giải: ĐK $x \ge \dfrac{6}{7}$

Đặt $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6},\ (t\ge 0) \Rightarrow 14x+2\sqrt{49x^2+7x-42}=t^2-1$

Bất phương trình đã cho trở thành: $t+t^2-1\le 181 \Leftrightarrow t^2+t-182\le 0 \Leftrightarrow 0\le t\le 13$

$\Leftrightarrow \sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\le 13 \quad (*)$

Vì hàm số $f(x)=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}$ là hàm đồng biến và $f(6)=13 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x\le 6$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình : $\dfrac{6}{7}\le x\le 6$.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình : $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}<2x+\dfrac{1}{2x}+4$.

Giải: ĐK: $x>0$.

Bpt $\Leftrightarrow 5(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})<2(x+\dfrac{1}{4x})+4$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ (t\ge\sqrt{2}) \Rightarrow x+\dfrac{1}{4x}=t^2-1$ và bất phương trình trở thành:

$5t<2(t^2-1)+4 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2>0 \Leftrightarrow t>2$ (do $t\ge\sqrt{2}$)

$t>2 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{4x}>3 \Leftrightarrow 4x^2-12x+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} \\ x>\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

2) $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}+3=0$ 3) $\sqrt{x^2+x+2}=x^2+x$

4) $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$ 5) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$

6) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$ 7) $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$

8) $\sqrt{4x+3}+\sqrt{2x+1}=6x+\sqrt{8x^2+10x+3}-16$

9) $18x^2-18x+5=3\sqrt[3]{9x^2-9x+2}$

10) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$.

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

1) $\sqrt{5x^2+10x+1}>7-2x-x^2$ 2) $2x^2+\sqrt{x^2-5x-6}>10x+15$

3) $x^2-2x+8-4\sqrt{(4-x)(x+2)}\ge 0$ 4) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}\le 6$

5) $\sqrt{|2x+1|}\ge x^2+x$ 6) $\dfrac{1}{1-x^2}>\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1$

7) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^2}+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2>0$

9) $(12-x)\sqrt{\dfrac{12-x}{x-2}}+(x-2)\sqrt{\dfrac{x-2}{12-x}}<\dfrac{82}{3}$

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Dạng 3: $F(\sqrt[n]{f(x)},\ \sqrt[n]{g(x)})=0$, trong đó $F(t)$ là một phương trình đẳng cấp bậc k.
Với dạng này ta xét hai trường hợp:
TH1: g(x)=0 thay vào phương trình ta kiểm tra,
TH2: $g(x)\neq 0$ chia hai vế phương trình cho $g^k(x)$ và đặt $t=\sqrt[n]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ ta được phương trình $F_1(t)=0$ là phương trình đa thức bậc k.
Ta thường gặp dạng: $a.f(x)+b.g(x)+c.\sqrt{f(x)g(x)}=0$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1}=2(x^2+2)$.
Giải: ĐK: $x\geq -1$.
Phương trình $\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=2(x^2-x+1)+2(x+1)$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x+1}{x^2-x+1}-5\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}+2=0 \quad (\text{Do } x^2-x+1>0\ \ \forall x).$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}$, $t\geq 0$, ta có phương trình: $2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

* $t=2\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x^2-x+1}=4\Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$ phương trình vô nghiệm.

* $t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x^2-5x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Nhận xét: Qua cách giải trên ta thấy được cơ sở của phương pháp giải dạng toán này và cũng là con đường để sáng tác ra những bài toán thuộc dạng trên là xuất phát từ phương trình đẳng cấp hai ẩn dạng $\alpha a^2+\beta ab+\gamma b^2=0$ (có thể bậc cao hơn) ta thay thế a,b bằng các biểu thức chứa x và biến đổi đi chút ít để che dấu đi bản chất sao cho phương trình thu được dễ nhìn về mặt hình thức và mối quan hệ giữa các đối tượng tham gia trong phương trình càng khó nhận ra thì bài toán càng khó. Do đó với dạng toán này chúng ta cần biết nhận xét mối quan hệ giữa các biểu thức có mặt trong phương trình. Tuy nhiên nếu khéo léo giấu đi mối quan hệ đó thì việc tìm ra lời giải là một vấn đề hết sức khó khăn. Ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$.
Giải: ĐK $x\geq 5$.
Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+14x+9}=\sqrt{x^2-x-20}+5\sqrt{x+1}$

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

$\Leftrightarrow 5x^2+14x+9=x^2+24x+5+10\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=5\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}=5\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)}$

$\Leftrightarrow 2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}-5\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}}+3=0$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}}$, $t\geq 0$, ta có phương trình: $2t^2-5t+3=0\Leftrightarrow t=1;t=\dfrac{3}{2}$.

* $t=1\Leftrightarrow x^2-5x-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}>5\ (n)\\ x=\dfrac{5-\sqrt{61}}{2}<5\ (l)\end{array}\right.$.

* $t=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 4x^2-25x-56=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8\ \ (n)\\ x=-\dfrac{7}{2}\ \ (l)\end{array}\right.$

Vậy phương tình đã cho có hai nghiệm: $x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2};x=8$.

Chú ý : Trong nhiều bài toán ta có thể đưa vào những ẩn phụ khác để làm đơn giản hình thức bài toán và từ đó ta dễ dàng tìm được lời giải.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$.

Giải: Đặt $a=\sqrt{x^2+2x}$, $b=\sqrt{2x-1}\Rightarrow 3x^2+4x+1=3a^2-b^2$

Phương trình trở thành: $a+b=\sqrt{3a^2-b^2}\Leftrightarrow a^2-ab-b^2=0$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}b\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2x-1}$. Giải phương trình này ta được nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và đây là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $(x^2-6x+11)\sqrt{x^2-x+1}=2(x^2-4x+7)\sqrt{x-2}$.

Giải: ĐK: $x\geq 2$. Đặt $a=\sqrt{x-2};b=\sqrt{x^2-x+1}$, ta có:

$x^2-6x+11=(x^2-x+1)-5(x-2)=b^2-5a^2$

$x^2-4x+7=x^2-x+1-3(x-2)=b^2-3a^2$

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Do vậy phương trình đã cho trở thành: $(b^2-5a^2)b=2(b^2-3a^2)a$

$\Leftrightarrow 6a^3-5a^2b-2ab^2+b^3=0 \Leftrightarrow 6t^3-5t^2-2t+1=0 \quad (t=\frac{a}{b}) \Leftrightarrow t=1, t=-\frac{1}{2}, t=\frac{1}{3}$.

* $t=1 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow x^2-2x+3=0$ phương trình vô nghiệm.

* $t=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow b=-2a$ vô nghiệm do $a,b>0$.

* $t=\frac{1}{3} \Leftrightarrow b=3a \Leftrightarrow x^2-10x+19=0 \Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{6}$.

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x=5\pm\sqrt{6}$.

Nhận xét: Xuất phát từ phương trình : $(a-b)(2a+b)(3a-b)=0$ ta thay $a=\sqrt{x-2}; b=\sqrt{x^2-x+1}$ và biến đổi ta thu được phương trình trên.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $18x^2-13x+2=\sqrt{3(81x^4-108x^3+56x^2-12x+1)}$.

Giải:

Ta có: $18x^2-13x+2=2(2x-1)^2-x=2a-x \quad (a=(3x-1)^2)$

$81x^4-108x^3+56x^2-12x+1=(3x-1)^4+2x^2=a^2+2x^2$

Vậy phương tình đã cho trở thành:

$$2a-x=\sqrt{3(a^2+2x^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 2x \\ a^2-4ax-5x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 2x \\ a=-x; a=5x \end{cases}$$

* $a=-x \Leftrightarrow \begin{cases} -x\ge 2x \\ 9x^2-5x+1=0 \end{cases}$ vô nghiệm.

* $a=5x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x\ge 2x \\ 9x^2-11x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{85}}{18}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\frac{11\pm\sqrt{85}}{18}$.

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{1-m}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1+m}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt[4]{1-m^2}.$$

Giải: ĐK: $-1<x<1$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt[4]{\frac{2}{1+x}-1}\Rightarrow t\in(0;+\infty)$ và phương tình trở thành:

$\sqrt{1+m}.t^2-2\sqrt[4]{(1-m)(1+m)}.t+\sqrt{1-m}=0\Leftrightarrow\sqrt[4]{1+m}.t=\sqrt[4]{1-m}\Leftrightarrow t=\sqrt[4]{\frac{1-m}{1+m}}$.

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow\sqrt[4]{\frac{1-m}{1+m}}>0\Leftrightarrow -1<m<1$.

Ví dụ 7 (ĐH Khối A – 2007): Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}.$$

Giải: ĐK: $x\ge 1$.

* x=1 là nghiệm phương trình $\Leftrightarrow m=0$.

* $x\ne 1$ chia hai vế phương trình cho $\sqrt[4]{x^2-1}$ ta được: $3\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}+m\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}=2$.

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\frac{2}{x+1}}\Rightarrow 0<t<1\ \ \forall t>1$ và phương trình trở thành:

$3t+\frac{m}{t}=2\Leftrightarrow 3t^2-2t=-m\ (*)$.

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $t\in(0;1)$.

Vì $-\frac{1}{3}\le 3t^2-2t<1\ \forall t\in(0;1)\Rightarrow(*)$ có nghiệm $t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le -m<1\Leftrightarrow -1<m\le\frac{1}{3}$.

Vậy $-1<m\le\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Qua các ví dụ trên ta thấy việc đặt biểu thức nào bằng ẩn phụ là mấu chốt của bài toán. Để chọn được biểu thức đặt ẩn phụ thích hợp thì sau khi đặt ta phải biểu diễn được các biểu thức chứa x khác trong phương trình , bất phương trình đã cho qua ẩn phụ vừa đặt. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp chúng ta không thể biểu diến hết các biểu thức chứa x có mặt trong phương trình , bất phương trình qua ẩn phụ được (Chẳng hạn phương trình : $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$) mà ta chỉ biểu diễn được một phần nào đó qua ẩn phụ và phương trình thu đượclà một phương trình hai ẩn gồm ẩn cũ và ẩn phụ vừa đặt. Ta xét dạng toán sau.

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Dạng 4: $a.f(x)+g(x)\sqrt{f(x)}+h(x)=0$. Với phương trình dạng này ta có thể đặt $t=\sqrt{f(x)}$, khi đó ta được phương trình theo ẩn t: $at^2+g(x)t+h(x)=0$, ta giải phương trình này theo t, xem x là tham số (Tức là trong phương trình vừa có t vừa có x) nên ta thường gọi dạng này là dạng đặt ẩn phụ không triệt để.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$.

Giải:

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x-1}$, ta được phương trình: $t^2-2(1-x)t-4x=0$ đây là phương trình bậc hai ẩn t có $\Delta'=(x+1)^2$, do đó phương trình này có hai nghiệm: $t=2, t=-2x$.

* $t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-1}=2 \Leftrightarrow x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{6}$.

* $t=-2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 3x^2-2x+1=0 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-1\pm\sqrt{6}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{12-8x}{\sqrt{9x^2+16}}$.

Giải: ĐK: $-2\le x\le 2$ (*).

Ta có: $12-8x=2(2x+4-4(2-x))=2[(\sqrt{2x+4})^2-(2\sqrt{2-x})^2]$

$\Rightarrow$ Phương trình: $(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x})(2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}-\sqrt{9x^2+16})=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=0 & (1) \\ 2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16} & (2) \end{array}\right.$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2x+4=8-4x \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn (*).

$(2) \Leftrightarrow 48-8x+16\sqrt{8-2x^2}=9x^2+16 \Leftrightarrow 4(8-2x^2)+16\sqrt{8-2x^2}-x^2-8x=0$

Đặt $t=2\sqrt{8-2x^2}$, $t\ge 0$, ta được: $t^2+8t-x^2-8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=-x-8 \end{array}\right.$.

* $t=x \Leftrightarrow 2\sqrt{8-2x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 32-8x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

* $t=-x-8 \Leftrightarrow 2\sqrt{8-2x^2}+x+8=0$ phương trình này vô nghiệm (do (*)).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\dfrac{2}{3}; x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Ví dụ 3: Giải phương trình: $3x^3-13x^2+30x-4=\sqrt{(6x+2)(3x-4)^3}$ (1).

Giải: ĐK: $x\ge\frac{4}{3}$ V $x\le-\frac{1}{3}$.

Ta có $3x^2-13x^2+30x-4=2(6x+2)+(x^2-3x+2)(3x-4)$

* Nếu $x\le-\frac{1}{3}\Rightarrow VT(1)<0<VP\Rightarrow(1)$ vô nghiệm.

* Nếu $x\ge\frac{4}{3}$ chia hai vế phương trình cho $3x-4$(do $x=\frac{3}{4}$ không là nghiệm của phương trình) ta được: $2.\frac{6x+2}{3x-4}-(3x-4)\sqrt{\frac{6x+2}{3x-4}}+x^2-3x+2=0$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{6x+2}{3x-4}}$, $t>0$. Phương trình trở thành:

$$2t^2-(3x-4)t+x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=x-1\\ t=\frac{x-2}{2}\end{array}\right..$$

$$*\ t=x-1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{6x+2}{3x-4}}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{4}{3}\\ \frac{6x+2}{3x-4}=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{4}{3}\\ (x-3)(3x^2-x+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

$$*\ t=\frac{x-2}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{6x+2}{3x-4}}=\frac{x-2}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge2\\ 3x^3-16x^2+4x-24=0\ \ (*)\end{cases}.$$

Sử dụng máy tính ta thấy (*) có duy nhất nghiệm $x\approx5,362870693$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=3$ và nghiệm gần đúng $x\approx5,362870693$.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $2x^2-5x+2=4\sqrt{2(x^3-21x-20)}$ (ĐS: $x=\frac{9\pm\sqrt{193}}{4}$; $x\frac{17\pm3\sqrt{73}}{4}$)

2) $x^4+2x^2+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$ H**D**:PT chỉ có nghiệm khi $0<x<1$. Đặt $a=x(x+1);b=1-x$. ĐS: $x=-1+\sqrt{2}$).

3) $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x=0$ (Đặt $y=\sqrt{x+2}$. ĐS: $x=2;x=2-2\sqrt{3}$)

4) $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$ ($x=3\pm\sqrt{13}$).

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

4) $2x+\dfrac{x-1}{x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$ ($t=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$. ĐS: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$)

5) $x^2-3x+1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^4+x^2+1}$ ($x=1$).

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Đặt ẩn phụ các hàm lượng giác:

Khi giải phương trình lượng giác ta thường đặt ẩn phụ cho các hàm số lượng giác và chuyển về phương trình đại số cơ bản mà ta đã biết giải. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp cách làm ngược lại tỏ ra khá hiệu quả, bằng những tính chất của hàm số lượng giác ta sẽ chuyển bài toán đại số về bài toán lượng giác và giải giải quyết bài toán lượng giác này.
Chúng ta nên lưu ý đến những tính chất đặc trưng của các hàm số lượng giác:
Với hàm số sin và côsin:
 * Tập giá trị của hai hàm số này là $[-1;1]$.
 * $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow 1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$
Với hai hàm số tan và cotan
 * Tập giá trị là R
 * $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha};1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
Hai tính chất trên là cơ sở để chúng ta lựa chọn phương pháp này. Ta xét các ví dụ sau :

Ví dụ 1: Giải phương trình: $1+\sqrt{1-x^2}=2x^2$.
Giải: ĐK: $|x|\le 1$.
Với bài toán này chúng ta có thể giải bằng phương pháp bình phương hoặc đặt ẩn phụ. Cách tiến hành hai phương pháp này tuy khác nhau nhưng cùng một mục đích là làm mất căn thức. Dĩ nhiên một câu hỏi đặt ra là ngoài hai cách nói trên còn có cách nào để loại bỏ căn thức nữa hay không ?. Để trả lời câu hỏi này thì chúng ta cần phải xác định là cần làm xuất hiện gì thì sẽ loại bỏ được căn thức ? Ta phải biến đổi $1-x^2=a^2$! đẳng thức này sẽ gợi cho chúng ta nhớ đến công thức lượng giác giữa sin và cosin. Điều này hoàn toàn hợp lí vì ta thấy được điều kiện xác định của x là đoạn $[-1;1]$. Vậy ta có cách giải như sau: Đặt $x=\cos t,\ t\in[0;\pi]$. Khi đó phương trình trở thành:

$$1+\sqrt{1-\cos^2 t}=2\cos^2 t \Leftrightarrow 2\sin^2 t+\sin t-1=0 \Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\ \ (\text{do } \sin t\ge 0).$$

Vậy $x=\cos t=\pm\sqrt{1-\sin^2 t}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét: Cơ sở để dẫn đến cách đặt như trên là miền xác định của $x\in[-1;1]$ và cần biến đổi $1-x^2=a^2$. Từ đây ta có được nhận xét tổng quát hơn như sau:

* Nếu $|u(x)|\le a$ thì ta có thể thực hiện phép đặt $u(x)=a\sin t$, $t\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, hoặc đặt $u(x)=a\cos t,\ t\in[0;\pi]$

* Nếu $u(x)\in[0;a]$ thì ta có thể đặt $u(x)=a\sin^2 t,\ t\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

Giải: ĐK: $|x|\le 1$.

Đặt $x=\cos t,\ \ t\in[0;\pi]$. Phương trình trở thành:

$\cos^3 t+\sin^3 t=\sqrt{2}\cos t\sin t\Leftrightarrow(\sin t+\cos t)(1-\sin t\cos t)=\sqrt{2}\sin t.\cos t$

$\Leftrightarrow u(1-\dfrac{u^2-1}{2})=\sqrt{2}\dfrac{u^2-1}{2}\Leftrightarrow u^3+\sqrt{2}u^2-3u-\sqrt{2}=0$ ($u=\sin t+\cos t,|u|\le\sqrt{2}$)

$\Leftrightarrow(u-\sqrt{2})(u^2+2\sqrt{2}u+1)=0\Leftrightarrow u=\sqrt{2};u=-\sqrt{2}+1$

* $u=\sqrt{2}\Leftrightarrow\cos(t-\dfrac{\pi}{4})=1\Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

* $u=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1-\sqrt{2}\\ 1-x^2=(1-\sqrt{2}-x)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1-\sqrt{2}\\ x^2-(1-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2};x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{2-2\sqrt{1-x^2}}=x(1+\sqrt{1-x^2})$.

Giải: ĐK: $|x|\le 1$.

Đặt $x=\sin t,\ t\in[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$. Phương trình đã cho trở thành:

$\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2 t}}=\sin t(1+\sqrt{1-\sin^2 t})\Leftrightarrow\sqrt{2(1-\cos t)}=\sin t(1+\cos t)$

$\Leftrightarrow 2|\sin\dfrac{t}{2}|=2\sin t\cos^2\dfrac{t}{2}\Leftrightarrow|\sin\dfrac{t}{2}|=2\sin\dfrac{t}{2}\cos^3\dfrac{t}{2}$ (*).

*Nếu $t\in[-\dfrac{\pi}{2};0)\Rightarrow(*)\Leftrightarrow\sin\dfrac{t}{2}(2\cos^3\dfrac{t}{2}+1)=0$ vô nghiệm .

* Nếu $t\in[0;\dfrac{\pi}{2}]\Rightarrow(*)\Leftrightarrow\sin\dfrac{t}{2}(2\cos^3\dfrac{t}{2}-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\\ \sin\dfrac{t}{2}=0\end{array}\right.$

+) Với $\cos\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow\sin\dfrac{t}{2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}}$ (do $t\in[0;\dfrac{\pi}{2}]\Rightarrow\sin\dfrac{t}{2}\ge 0$)

$\Rightarrow x=\sin t=2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

+) Với $\sin\frac{t}{2}=0\Rightarrow t=0\Rightarrow x=\sin t=0$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1};\ x=0$.

Chú ý : * Ở trên ta thực hiện phép đặt $x=\sin t$, ta cũng có thể đặt $x=\cos t$ tuy nhiên nếu đặt $x=\cos t$ thì sẽ dẫn đến bài toán biến đổi phức tạp hơn.

* Vì $t\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\Rightarrow\frac{t}{2}\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ nên ta chưa khẳng định được $\sin\frac{t}{2}$ dương hay âm, do đó khi đưa ra khỏi căn thức thì ta phải có trí tuyệt đối.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}=\frac{2}{|x-1|}$.

Giải: ĐK: $0\le x\le 2$.

Ta thấy $0\le\sqrt{2x-x^2}\le 1$, nên ta đặt $\sqrt{2x-x^2}=\cos t,\ t\in[0;\frac{\pi}{2}]\Rightarrow|x-1|=\sin t$

Phương trình trở thành: $\sqrt{1-\cos t}+\sqrt{1+\cos t}=\frac{2}{|\sin t|}$

$\Leftrightarrow 2(1+\sin t)=\frac{4}{\sin^2 t}\Leftrightarrow\sin^3 t+\sin^2 t-2=0\Leftrightarrow\sin t=1\Leftrightarrow\cos t=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x-x^2}=0\Leftrightarrow x=0,x=2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0,x=2$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^3-3x=\sqrt{x+2}$.

Giải: ĐK: $x\ge -2$

* Với $x>2\Rightarrow x^3-3x=x+x(x^2-4)>x>\sqrt{x+2}\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Với $-2\le x\le 2$, đặt $x=2\cos t,\ t\in[0;\pi]$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$8\cos^3 t-6\cos t=\sqrt{2+2\cos t}\Leftrightarrow\cos 3t=\cos\frac{t}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{4\pi}{5};\ t=\frac{4\pi}{7}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=2;x=\cos\frac{4\pi}{5};x=\cos\frac{4\pi}{7}$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $64x^3-112x^2+56x-7=2\sqrt{1-x}$.

Giải: ĐK: $x\le 1$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Nếu $x \le 0 \Rightarrow VT < 0$ mà $VP \ge 0$ nên phương trình vô nghiệm. Do vậy ta chỉ giải phương trình khi $0 < x \le 1$. Do vậy ta có thể đặt $x = \cos^2 t,\ \ t \in [0;\frac{\pi}{2})$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7 = 2\sin t$ (*).

Mặt khác $\cos 7t = 64\cos t^7 - 112\cos^5 t + 56\cos^3 t - 7\cos t$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \cos 7t = 2\sin t\cos t \Leftrightarrow \cos 7t = \sin 2t = \cos(\frac{\pi}{2} - 2t) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \\ t = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right. .$$

Vì $t \in [0;\frac{\pi}{2})$ nên ta có các nghiệm $t = \frac{\pi}{18}; t = \frac{5\pi}{18}; t = \frac{3\pi}{10}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = \cos^2\frac{\pi}{18}; x = \cos^2\frac{5\pi}{18}; x = \cos^2\frac{3\pi}{10}$.

Chú ý : Ta có sự biểu diễn $\cos nx$ qua cosx như sau:

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} a_{n,k}.\cos^{n-2k} x$$. Trong đó $a_{n,k} = (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-1-2k} C_{n-k}^k$.

Ví dụ 7: Giải phương trình : $2x + \sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{1-x^2}$.

Giải: ĐK : $x \ne \pm 1$.

Đặt $x = \tan t,\ \ t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}); t \ne \pm\frac{\pi}{4}$. Phương trình đã cho trở thành

$$2\tan t + \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}}{1-\tan^2 t} \Leftrightarrow \frac{2\sin t + 1}{\cos t} = \frac{1}{\cos t.\cos 2t} \Leftrightarrow \cos 2t(2\sin t + 1) = 1$$

$$(1-2\sin^2 t)(2\sin t + 1) = 1 \Leftrightarrow 2\text{sint}(2\sin^2 t + \sin t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

* $\sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = \tan t = 0$.

* $\sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 0$ và $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

1) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2})$

2) $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x \quad (x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4})$.

3) $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}[\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{(1+x)^3}] = 2 + \sqrt{1-x^2}$

4) $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

5) $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1 - 2x^2 \quad (x = \frac{1}{\sqrt{2}}; x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.

6) $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

7) $\sqrt{1-x^2} = (\frac{2}{3} - \sqrt{x})^2$.

8) $729x^4 + 8\sqrt{1-x^2} = 36$.

9) $\frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

10) $\sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} - 3\sqrt{(x+1)(8-x)} = 3$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{(3+x)(6-x)}$.
Phương trình này chúng ta đã có cách giải ở trên. Ta thấy VT của phương trình trên là tổng của hai căn thức, còn VP chứa tích của hai căn thức đó và ta nhận thấy hai căn thức ở VT có quan hệ tổng bình phương của chúng bằng 9, do đó nếu ta đặt $a=\sqrt{x+3}$, $b=\sqrt{6-x}$ thì ta có được hệ phương trình $\begin{cases} a+b=3+ab \\ a^2+b^2=9 \end{cases}$. Đây là hệ đối xứng loại I, giải hệ này ta được $\begin{cases} a=0 \\ b=3 \end{cases}$ V $\begin{cases} a=3 \\ b=0 \end{cases}$.

* $a=3 \Leftrightarrow x=0$.
* $a=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Nhận xét: Dạng tổng quát của phương trình trên là:

$$F(f(x),\sqrt[n]{a+f(x)},\sqrt[m]{b-f(x)})=c.$$

Để giải phương trình này ta đặt: $u=\sqrt[n]{a+f(x)},\ v=\sqrt[m]{b-f(x)}$, lúc đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} f(u,v)=c \\ u^n+v^m=a+b \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được u, v. Từ đây ta có được x.

Chú ý : Để tìm x ta chỉ cần giải một trong hai phương trình: $\sqrt[n]{a+f(x)}=u$ hoặc $\sqrt[m]{b-f(x)}=v$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$.
Giải: ĐK: $x\le 12$.
Đặt $u=\sqrt[3]{24+x};\ v=\sqrt{12-x}\Rightarrow u\le\sqrt[3]{36},\ v\ge 0$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u+v=6 \\ u^3+v^2=36 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} v=6-u \\ u^3+(6-u)^2=36 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} v=6-u \\ u(u^2+u-12)=0\ (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có ba nghiệm : $u=0;u=-4;u=3$ thỏa mãn $u\le\sqrt[3]{36}$.
Từ đây ta tìm được: $x=-24;x=-88;x=3$.
Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-24;x=-88;x=3$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{17-x}=3$.
Giải: ĐK: $0\le x\le 2$.
Đặt $a=\sqrt[4]{x};\ b=\sqrt[4]{17-x};\ a,b\ge 0$. Ta có hệ phương trình

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^4+b^4=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ [(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^2b^2-18ab+32=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \ \text{V} \ ab=16 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{V} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=16 \end{array}\right.$.
- Với $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=16 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai ngiệm $x=1; x=16$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=3$.

Giải: Đặt $a=\sqrt[3]{2-x}$; $b=\sqrt[3]{7+x}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+b^2-ab=3 \\ a^3+b^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-3ab=3 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{V} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}.$$

Từ đây giải ra ta được $x=1$ và $x=-6$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $2x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Giải:

Đặt $y=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow y^3+1=2x$ vậy ta có hệ phương trình $:\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$

$$x^3-y^3=2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0 \Leftrightarrow x=y$$

(Do $x^2+xy+y^2+2=(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2+2>0$)

$$\Leftrightarrow x^3+1=2x \Leftrightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x=1; x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=1; x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Chú ý : Dạng tổng quát của bài toán trên là: $\left(f(x)\right)^n+b=a\sqrt[n]{af(x)-b}$, để giải phương trình này ta đặt $t=f(x); y=\sqrt[n]{af(x)-b}$ ta có hệ: $\begin{cases} t^n+b=ay \\ y^n+b=at \end{cases}$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Ví dụ 6: Giải phương trình : $2x^2+4x=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$.

Giải: ĐK: $x\ge -3$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2(x+1)^2-2=\sqrt{\frac{(x+1)+2}{2}}\Leftrightarrow (x+1)^2-1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{2}+1}$.

Đặt $t=x+1; y=\sqrt{\frac{x+1}{2}+1}=\sqrt{\frac{t}{2}+1}\Rightarrow y^2-1=\frac{t}{2}$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} t^2-1=\frac{1}{2}y \\ y^2-1=\frac{1}{2}t \end{cases}\Rightarrow (t-y)(t+y+\frac{1}{2})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=y \\ y=-t-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

* $t=y\Leftrightarrow t^2-1=\frac{t}{2}\Leftrightarrow 2t^2-t-2=0\Leftrightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ (thỏa đk $x\ge -3$)

* $y=-t-\frac{1}{2}\Rightarrow (t+\frac{1}{2})^2-1=\frac{t}{2}\Leftrightarrow 4t^2+2t-3=0\Leftrightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{4}$
(thỏa đk $x\ge -3$).

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}; x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{4}$.

Ví dụ 7: Giải phương trình : $4x^2+7x+1=2\sqrt{x+2}$.

Giải: ĐK: $x\ge 2$

Phương trình $\Leftrightarrow (2x+1)^2+3x=2\sqrt{2(2x+1)-3x}$

Đặt $t=2x+1; y=\sqrt{2t-3x}\Rightarrow y^2+3x=2t\Rightarrow$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2+3x=2y \\ y^2+3x=2t \end{cases}\Rightarrow (t-y)(t+y+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=t \\ y=-t-2 \end{array}\right..$$

* $y=t\Leftrightarrow t^2-2t+3x=0\Leftrightarrow 4x^2+3x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right.$.

* $y=-t-2\Rightarrow t^2+3x+2(t+2)=0\Leftrightarrow 4x^2+11x+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{7}{4} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-1; x=-\frac{7}{4}; x=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 8: Giải phương trình: $x^2-x-1000\sqrt{1+8000x}=1000$.

Giải: ĐK: $x\ge -\frac{1}{8000}$

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Đặt $ay+b=\sqrt{1+8000x} \Leftrightarrow a^2y^2+12aby+b^2-1=8000x$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-x-1000(ay+b)=1000 \\ a^2y^2+12aby+b^2-1=8000x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1000(b+1)=1000ay \\ a^2y^2+12aby+b^2-1=8000x \end{cases}.$$

Ta xác định a,b: $\frac{1}{a^2}=\frac{-1}{12ab}=\frac{-1000(b+1)}{b^2-1}=\frac{1000a}{8000} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

ta có hệ: $\begin{cases} x^2-x=2000y \\ y^2-y=2000x \end{cases} \Rightarrow (x-y)(x+y+1999)=0 \Leftrightarrow x=y$ (Do $x+y+1999>0$)

$\Leftrightarrow x^2-2001x=0 \Leftrightarrow x=0; x=2001$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý : * Dạng tổng quát của phương trình trên là: $\sqrt{ax+b}=r(u.x+v)^2+dx+e$, trong đó: $u=ar+d; v=br+e$. Để giải phương trình này ta đặt:

$\sqrt{ax+b}=u.y+v$ và đưa về hệ đối xứng loại II.

* Tương tự ta cũng có lời giải cho phương trình : $\sqrt[3]{ax+b}=r(u.x+v)^3+dx+e$, trong đó: $u=ar+d; v=br+e$. Để giải phương trình này ta đặt:

$\sqrt[3]{ax+b}=u.y+v$ và đưa về hệ đối xứng loại II.

Ví dụ 9: Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25$.

Giải:

Ta có phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-5}=(2x-3)^3-x+2$

Đặt $\sqrt[3]{3x-5}=2y-3 \Rightarrow (2y-3)^2=3x-5$, khi đó ta có hệ phương trình

$\begin{cases} (2x-3)^3=2y-3+x-2 \\ (2y-3)^3=2x-3+x-2 \end{cases} \Rightarrow a^3-b^3=b-a$ (Với $a=2x-3; b=2y-3$)

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow (2x-3)^3=3x-5$

$$\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0 \Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=2; x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 10: Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x^2}=\sqrt{2-x^3}$.

Giải: $x \le \sqrt[3]{2}$

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Đặt $a=\sqrt[3]{2-x^2}$, $a\geq 0 \Rightarrow a^3=2-x^2 \Leftrightarrow a^3+x^2=2$

Mặt khác từ phương trình ban đầu $\Rightarrow a=\sqrt{2-x^3} \Leftrightarrow x^3+a^2=2$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^3+x^2=2 \\ x^3+a^2=2 \end{cases}$ trừ hai phương trình của hệ ta được

$a^3-x^3-(a^2-x^2)=0 \Leftrightarrow (a-x)(a^2+ax+x^2-a-x)=0$ (*)

Ta có: $a^2+ax+x^2-a-x=a^2+(a+x)(x-1)$

* Với $x\geq 1 \Rightarrow a+x>0 \Rightarrow (a+x)(x-1)\geq 0 \Rightarrow a^2+(a+x)(x-1)>0$

* Với $0\leq x<1 \Rightarrow a\geq 1 \Rightarrow a^2+ax+x^2-a-x=a(a-1)+ax+x(a-1)>0$

* Với $x<0 \Rightarrow a+x<0 \Rightarrow (a+x)(x-1)>0 \Rightarrow a^2+(a+x)(x-1)>0$

$\Rightarrow a^2+ax+x^2-a-x>0 \quad \forall x$

Do đo (*) $\Leftrightarrow a=x$ thay vào hệ ta được: $\sqrt{2-x^3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq \sqrt[3]{2} \\ x^3+x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 11: Giải phương trình : $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt[6]{1-x}=1.$

Giải: ĐK: $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leq x\leq 1.$

Đặt $a=\sqrt{1-x^2}, b=\sqrt[4]{x^2+x-1}, c=\sqrt[6]{1-x}; a,b,c\geq 0$, ta có hệ phương trình :

$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^4+c^6=1 \\ a,b,c\geq 0 \end{cases}$. Vì $\begin{cases} a,b,c\geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow 0\leq a,b,c\leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2\leq a \\ b^4\leq b \\ c^6\leq c \end{cases} \Rightarrow a^2+b^4+c^6\leq 1.$

$\Rightarrow$ hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=a^2 \\ b=b^4 \\ c=c^6 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 12: Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2}=(2-\sqrt{x})^2$.

Giải: ĐK: $0\leq x\leq \sqrt{2}$.

Đặt $a=\sqrt{x}; b=2-\sqrt{x}$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=2 \\ a^4+b^4=2 \end{cases}$ (I)

Áp dụng BĐT $\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$, ta có:

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

$$\frac{a^4+b^4}{2}\ge\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^4=1\Rightarrow a^4+b^4\ge 2$$

Vậy (I) $\Leftrightarrow a=b=1\Leftrightarrow x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 13: Giải phương trình : $x=\sqrt{3-x}\sqrt{4-x}+\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}+\sqrt{3-x}\sqrt{5-x}$.

Giải: ĐK: $0\le x\le 3$.

Đặt $a=\sqrt{3-x};b=\sqrt{4-x};c=\sqrt{5-x};\ a,b,c\ge 0$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}ab+bc+ca=3-a^2\\ab+bc+ca=4-b^2\\ab+bc+ca=5-c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+c)(a+b)=3\\(b+c)(b+a)=4\\(c+a)(c+b)=5\end{cases}\Rightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=2\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\sqrt{\frac{3}{5}}\\b+c=2\sqrt{\frac{5}{3}}\\c+a=\sqrt{\frac{15}{4}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{23}{4\sqrt{15}}\\b=\frac{17}{4\sqrt{15}}\\c=\frac{7}{4\sqrt{15}}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{671}{240}$$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{2x+15}=32x^2+32x-20\quad (x=\frac{1}{2};x=\frac{-9-\sqrt{221}}{16})$

2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x(1-x)^2}+\sqrt[4]{(1-x)^3}=\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2(1-x)}$ (ĐS: $x=0;x=1;x=\frac{1}{2}$)

3) $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$.

4) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$

5) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$

6) $\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}$

7) $\sqrt[4]{17-x^8}-\sqrt[3]{2x^8-1}=1$

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Phương pháp lượng liên hợp

Ta biết $x = x_0$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D_f \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$.

Mà theo định lí Bơzu nếu x=a là nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $P(x) = (x-a)P_1(x)$

Từ đó ta có nhận xét: Nếu x_0 là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì ta có thể đưa phương trình $f(x) = 0$ về dạng $(x - x_0)f_1(x) = 0$ và khi đó việc giải phương trình $f(x) = 0$ quy về giải phương trình $f_1(x) = 0$. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải phương trình : $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$.

Giải: ĐK: $x \geq 2$.

Ta thấy x=3 là một nghiệm của phương trình (ta nghĩ đến x=3 vì khi đó x-2 và x+6 là những số chính phương) do đó ta có thể đưa phương trình về dạng: $(x-3)f_1(x) = 0$ nên ta biến đổi phương trình như sau: $2(x-3) + (\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2}) = 0$, vấn đề còn lại của chúng ta là phải phân tích $\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2}$ ra thừa số (x-3) (Chú ý khi x=3 thì $\sqrt{x+6} = 3\sqrt{x-2}$), vì định lí Bơzu chỉ áp dụng cho đa thức nên ta phải biến đổi biểu thức này về dạng có mặt đa thức, tức là ta đưa về dạng $(x+6) - 9(x-2) = -8(x-3)$ điều này giúp ta liên tưởng đến đẳng thức $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ nên ta biến đổi :

$$\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2} = \frac{(\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2})(\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2})}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}} = \frac{-8(x-3)}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}}$$

Suy ra phương trình $\Leftrightarrow (x-3)(2 - \frac{8}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}}) = 0$ đến đây ta chỉ cần giải phương trình: $2 - \frac{8}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} = 4$ phương trình nay có một nghiệm $x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 3$ và $x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$.

Qua ví dụ trên ta thấy để bỏ căn thức ta có thể sử dụng hằng đẳng thức

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$

hai biểu thức $(a-b)$ và $(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$ ta gọi là hai biểu thức liên hợp của nhau. Nên phương pháp trên ta gọi là phương pháp nhân lượng liên hợp.

Ví dụ 2: Giải phương trình : $\frac{x^2}{(1 + \sqrt{1+x})^2} > x - 4$.

Giải: ĐK: $x \geq -1$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Ta thấy $(1+\sqrt{1+x})^2(1-\sqrt{1+x})^2 = x^2$ nên ta nhân lượng liên hợp ở VT

* Với $x=0$ bất phương trình trở thành: $0>-4$ (đúng) $x=0$ là một nghiệm bpt.

* Với $x\neq 0 \Rightarrow 1-\sqrt{1+x}\neq 0$ nên

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \frac{x^2(1-\sqrt{1+x})^2}{x^2} > x-4 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{1+x}+1+x > x-4 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}<3 \Leftrightarrow x<8$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm bất phương trình : $-1\leq x<8$.

Nhận xét: Ở trên ta nhân liên hợp với mục đích là trục căn thức ở mẫu. Khi nhân cả tử và mẫu ở VT với biểu thức $1-\sqrt{1+x}$ thì biểu thức đó phải khác không nên ta phải chia làm trường hợp như trên.

Ví dụ 3: Giải phương trình : $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} = x^2-6x+11$.

Giải: ĐK: $2\leq x\leq 4$

Ta nhận thấy phương trình có nghiệm $x=3$, đồng thời với $x=3$ thì $\sqrt{x-2}=\sqrt{4-x}=1$

Nên ta biến đổi như sau:

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1+\sqrt{4-x}-1 = x^2-6x+9 \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1} = (x-3)^2$$

$$(x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}-(x-3)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{4-x}+1)}-(x-3)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{3(3-x)}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{4-x}+1)\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}}-(x-3)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(\frac{-3}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{4-x}+1)\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=3$$

(Vì $\dfrac{-3}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{4-x}+1)\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}}-1<0$)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x=3$.

Chú ý : * Trong cách trên chúng ta không nhân liên hợp ngày ở VT mà chúng ta thêm -1 vào mỗi căn thức rồi mới nhân liên hợp, cách làm vậy là để xuất hiện thừa số chung x-3 ở cả hai vế.

* Cách giải trên chưa phải là cách giải hay nhất đối với bài toán trên nhưng nó rất tự nhiên. Cách giải hay nhất đối với bài toán đó là cách đánh giá hai vế, cụ thể:

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

$VT \le \sqrt{2(x-2+4-x)} = 2$ (*) còn $VP = (x-3)^2 + 2 \ge 2$ (**). Nên phương trình $\Leftrightarrow VT = VP = 2 \Leftrightarrow x = 3$. Tuy nhiên trong nhiều bài toán thì việc sử dụng lượng liên hợp sẽ cho chúng ta lời giải tối ưu nhất. Ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 4: Giải phương trình : $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$.

Giải: ĐK: $2 \le x \le 4$.

Mới nhìn vào phương trình ta sẽ nghĩ có thể giải phương trình này bằng cách đánh giá ! Nhưng ta không thể giải theo cách đánh giá vì $VP \ge 0$! Tuy nhiên phương trình trên vẫn có nghiệm $x = 3$ nên ta giải phương trình trên bằng cách nhân lượng liên hợp

$PT \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 + \sqrt{4-x} - 1 = 2x^2 - 5x - 3$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{x-3}{\sqrt{4-x}+1} = (x-3)(2x+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1} = 2x+1 \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} \le 1$; $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1} \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow VT(*) \le 2 - \sqrt{2}$.

Mặt khác $x \ge 2 \Rightarrow VP(*) = 2x + 1 \ge 5 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 3$.

Nhận xét : * Ta có dạng tổng quát của phương trình trên là:

$\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = (b-a)x^2 - (\dfrac{b^2-a^2}{2} - \sqrt{\dfrac{b-a}{2}})x - (\dfrac{a+b}{2} - 2)\sqrt{\dfrac{b-a}{2}}$ (ĐK: $a + 2 \le b$).

* Qua bốn ví dụ trên ta thấy trong phương pháp này việc dự đoán nghiệm của phương trình là khâu quan trọng, từ việc đoán nghiệm này ta mới định hướng được các phép biến đổi.

Ví dụ 5: Giải phương trình : $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = \dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$.

Giải: ĐK $0 < x \le 1$.

Ta thấy phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$ nên ta phân tích ra thừa số .

Ta có: $PT \Leftrightarrow (1+x^2)\sqrt{1-x} = (2x+x^2)\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2(\sqrt{1-x} - \sqrt{x}) + (\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{x}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} + \frac{1-x-4x^3}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} + \frac{(1-2x)(2x^2+x+1)}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}} = 0$$

$\Leftrightarrow (1-2x)(\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} + \dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (Do biểu thức trong dấu () >0).

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 6: Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}$

Giải: Do $VT\ge 1$ nên $\Rightarrow VP\ge 1\Leftrightarrow x\ge -1$.

Ta thấy nếu $2x^2=x+1$ thì hai vế của phương trình bằng nhau nên ta phân tích ra thừa số $2x^2-x-1$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{x+2})+(\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{x+1})=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(2x^2+1)(x+2)}+\sqrt[3]{(x+2)^2}}+\frac{2x^2-x-1}{\sqrt[3]{4x^4}+\sqrt[3]{2x^2(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=0$$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0$ (do $x\ge -1$ nên khi đặt $2x^2-x-1$ làm thừa số thì biểu thức trong dấu () luôn dương).

$\Leftrightarrow x=-1;x=-\frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý : Bài toán trên có thể giải bằng cách đánh giá như sau

* Nếu $2x^2=x+1\Leftrightarrow x=-1;x=-\frac{1}{2}$ thì hai vế cảu phương trình bằng nhau.

* Nếu $2x^2>x+1\Rightarrow VT<VP\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Nếu $2x^2<x+1\Rightarrow VT>VP\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow x^2-2x-7+3(x+2)-(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}=0$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-7+(x+2)(3-\sqrt{x^2-2x+2})=0\Leftrightarrow x^2-2x-7-\frac{(x+2)(x^2-2x-7)}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x-7)(1-\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}+3})=0\Leftrightarrow (x^2-2x-7)(\frac{\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}+3})=0$$

$x^2-2x-7=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{7}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét: Qua những ví dụ trên ta thấy sau khi tạo ra thừa số chung, thì ta tìm cách chứng minh biểu thức trong dấu () còn lại luôn âm hoặc luon dương. Tuy nhiên không phải bài nào cũng xảy ra trường hợp đó. Ta xét bài toán sau.

Ví dụ 8: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$.

Giải: ĐK $x\le 12$.

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+24}-3)+(\sqrt{12-x}-3)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt[3]{(x+24)^2}+3\sqrt[3]{x+24}+9}+\frac{3-x}{\sqrt{12-x}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{12-x}-\sqrt[3]{(x+24)^2}-3\sqrt[3]{x+24}-6)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{12-x}-\sqrt[3]{(x+24)^2}-3\sqrt[3]{x+24}-6=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Kết hợp với phương trình ban đầu ta có

$(*)\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+24)^2}+4\sqrt[3]{x+24}=0 \Leftrightarrow x=-24, x=-88$ thử lại ta thấy hai nghiệm này đều thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-88; x=-24; x=3$.

Nhận xét: Để giải phương trình (*) ta phải kết hợp với phương trình ban đầu. Ta chú ý rằng phép biến đổi này là phép biến đổi hệ quả do đó sau khi giải xong ta phải thử lại các nghiệm để loại đi những nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 9: Giải phương trình: $2\sqrt{x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+20}$.

Giải: ĐK $\left[\begin{array}{l} x\le 2 \\ x\ge 10 \end{array}\right.$.

Để đơn giản ta đặt $a=\sqrt{x^2-7x+10}; b=\sqrt{x^2-12x+20} \Rightarrow 2a-b=x$ **(I)**

Ta thấy phương trình có nghiệm x=1.Ta biến đổi như sau:

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2-7x+10}-(x+1)\right)=\sqrt{x^2-12x+20}-(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-18(x-1)}{\sqrt{x^2-7x+10}+x+1}=\frac{-16(x-1)}{\sqrt{x^2-12x+20}+x+2}$$

(Vì 2 phương trình $\sqrt{x^2-7x+10}+x+1=0$ và $\sqrt{x^2-12x+20}+x+2=0$ vô nghiệm).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{9}{a+x+1}=\dfrac{8}{b+x+2} \quad \textbf{(II)} \end{array}\right..$$

Kết hợp **(I)** và **(II)** ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 2a-b=x \\ 8a-9b=x+10 \end{cases} \Rightarrow 5a=4x-5$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x^2-7x+10}=4x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{4} \\ x^2-15x+25=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{15\pm 5\sqrt{5}}{2}.$$

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Thay vào phương trình ban đầu ta thấy chỉ có nghiệm $x=\dfrac{15+5\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=\dfrac{15+5\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập:

Giải các phương trình và bất phương trình sau:

1) $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$ ($x=1$) 2) $\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}+\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}=6$ ($x=\dfrac{3}{2}$)

3) $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}\ge 2(x+1)$ (ĐS: $x\le -1$)

4) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0$ (ĐS: x=8)

5) $2\sqrt{x^2+3}-\sqrt{8+2x-x^2}=x$

6) $2x^2-11x+21=3\sqrt[4]{4x+4}$

7) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}+2=3x$

8) $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$

9) $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{16x^2-59x+149}=5-x$ ($x=5$;

10) $2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4}$ (x=3)

11) $x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4}$ (x=3)

12) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$

13) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$

14) $\sqrt[4]{17-x^8}-\sqrt[3]{2x^8-1}=1$

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Phương pháp đánh giá

Cách 1: Tìm một nghiệm và chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}=6$ (1).

Giải: Điều kiện $x \le 2$.
Với phương trình vô tỉ dạng này ta thường dự đoán nghiệm là các giá trị của x mà biểu thức dưới căn thức nhận giá trị là một số chính phương. Nhận thấy nghiệm của (1) phải lớn hơn 1. Bằng cách thử ta thấy rằng PT có một nghiệm là $x=\frac{3}{2}$

Ta chứng minh đó là nghiệm duy nhất của phương trình (1) . Thật vậy

*Với $x<\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{6}{3-x}>4\Rightarrow\sqrt{\frac{6}{3-x}}>2$ và $\sqrt{\frac{8}{2-x}}>\sqrt{\frac{8}{2-\frac{3}{2}}}=4$

$\Rightarrow\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}>6\Rightarrow$ (1) vô nghiệm trong khoảng $(-\infty;\frac{3}{2})$.

* Với $\frac{3}{2}<x<2$ chứng minh tương tự, ta có: $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}<6\Rightarrow(1)$ vô nghiệm trong khoảng $(\frac{3}{2};2)$.

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{2}$.

Nhận xét: *Ta thấy giải phương trình bằng cách đánh giá này quan trọng là ta đoán được nghiệm của của nó. Để đoán nghiệm ta nên chỉ ra khoảng chứa nghiệm và xét trường hợp đặc biệt để tìm ra nghiệm trong đó.
* Bài toán trên còn có thể giải bằng cách dựa vào tính đơn điệu của hàm số. Ta có VT là một hàm số đồng biến.

Ví dụ 2: Giải Phương trình: $3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(1+\sqrt{1+x+x^2})=0$ (2).

Giải:

$PT\Leftrightarrow 3x(2+\sqrt{(3x)^2+3})+(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})=0$

$\Leftrightarrow 3x(2+\sqrt{(3x)^2+3})=-(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})$.

Từ (2) ta thấy PT chỉ có nghiệm khi $x\in(-\frac{1}{2};0)$ và nhận thấy nếu $:3x=-2x-1$

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$ thì biểu thức trong căn ở hai vế bằng nhau.Vậy $x=-\frac{1}{5}$ là một nghiệm của PT(2) . Ta chứng minh $x=-\frac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất của PT(2). Thật vậy

* Với $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{5}$ ta có: $3x<-2x-1<0 \Rightarrow (3x)^2>(2x+1)^2$

$\Rightarrow 2+\sqrt{(3x)^2+3}>2+\sqrt{(2x+1)^2+3}$

Từ đó suy ra:

$3x(2+\sqrt{(3x)^2+3})<-(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})$

$\Leftrightarrow 3x(2+\sqrt{(3x)^2+3})+(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})<0$

Vậy (2) không có nghiệm trong $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{5})$.

*Chứng minh tương tự ta cũng đi đến (2) không có nghiệm trong $(-\frac{1}{5};0)$.

Vậy PT (2) có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{5}$.

Chú ý : 1) Bài toán trên có thể giải theo nhiều cách khác nhau.

C 2. Đặt $a=3x, b=-(2x+1) \Rightarrow a,b<0$ và phương trình trở thành $f(a)=f(b)$, trong đó $f(t)=2t+t\sqrt{t^2+3}$ có $f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0$ nên f(t) là hàm đồng biến, do đó $f(a)=f(b) \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$.

C 3. Nhân lượng liên hợp.

2) Thông thường những bài toán giải theo cách này thì ta có thể giải bằng cách sử dụng hàm số. Tuy nhiên cách giải trên lại phù hợp với những HS chưa học khái niệm đạo hàm .

Cách 2: Đánh giá hai vế

Xét PT: $f(x)=g(x)$ xác định trên D

Nếu $\begin{cases} f(x)\ge m(x) \\ g(x)\le m(x) \end{cases} \forall x\in D$ thì PT: $f(x)=g(x)$ với $x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=m(x) \\ g(x)=m(x) \end{cases}$.

Trong cách đánh giá này ta thường dùng các bất đẳng thức quen thuộc (như BĐT Cauchy, BĐT Bunhiacovski, BĐT chứa trị tuyệt đối…)để đánh giá hai.

Sau đây là một số thí dụ minh họa.

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x^4-2x^2\sqrt{x^2-2x+16}+2x^2-6x+20=0$.

Giải:

Ta có PT $\Leftrightarrow x^4-2x^2\sqrt{x^2-2x+16}+x^2-2x+16+x^2-4x+4=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-\sqrt{x^2-2x+16})^2+(x-2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-\sqrt{x^2-2x+16}=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

Giải:

PT $\Leftrightarrow x^2-6x+9+x+1-4\sqrt{x+1}+4=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(\sqrt{x+1}-2)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 5: Giải phương trình : $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$.

Giải: ĐK $x \ge \frac{1}{2}$.

Với $x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2-1} \ge 0 \\ \sqrt{4x-1} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1} \ge 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$.

Ví du 6: Giải phương trình:

$$\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4(2x^2-4x+1) \quad \textbf{(3).}$$

Giải: Điều kiện $0 \le x \le 2$

Đặt $t=(x-1)^2$, ta có $0 \le t \le 1$. PT (3) trở thành:

$\sqrt{1+\sqrt{1-t}}+\sqrt{1-\sqrt{1-t}}=2t^2(2t-1)$. Nhận thấy $t \ge \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế và rút gọn ta được :

$$1+\sqrt{t}=2t^4(2t-1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^3\sqrt{t}}=2(2t-1)^2$$

Vì $t \le 1 \Rightarrow \frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^3\sqrt{t}} \ge 2 \ge 2(2t-1)^2$. Từ đó suy ra $t=1 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy nghiệm của PT (3) là: $x=1$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}=2$.

Giải:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

$$VT \ge 2\sqrt[4]{(2x^2+1-x)(2x^2+1+x)} = 2\sqrt[4]{(2x^2+1)^2-x^2} = 2\sqrt[4]{4x^4+3x^2+1} \ge 2$$

Nên PT $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x^2-x+1}=\sqrt{2x^2+x+1}\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 8: Giải phương trình : $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

Giải: ĐK $2 \le x \le 4$.

Áp dụng BĐT $a+b \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$, ta có: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \le \sqrt{2(x-2+4-x)}=2$.

Mặt khác $x^2-6x+11=(x-3)^2+2 \ge 2$.

Do đó PT $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2\\ (x-3)^2+2=2\end{cases} \Leftrightarrow x=3$ là nghiệm của PT đã cho.

Nhận xét :

Tương tự ta có bài tổng quát sau: $\sqrt{f(x)-a}+\sqrt{b-f(x)}=g^2(x)+\sqrt{2(b-a)}$, trong đó $b>a$. Khi đó việc giải PT này quy về giải hệ: $\begin{cases}f(x)=\dfrac{a+b}{2}\\ g(x)=0\end{cases}$.

Ví dụ 9: Giải bất phương trình : $\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{x+1}{4}<\sqrt{2x-1+\dfrac{(x+1)^2}{8}}$.

Giải: ĐK: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có:

$$VT=1.\sqrt{x-\frac{1}{2}}+1.\frac{x+1}{4} \le \sqrt{2[x-\frac{1}{2}+(\frac{x+1}{4})^2]}=\sqrt{2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}}=VP$$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \sqrt{x-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{x+1}{4} \Leftrightarrow x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2+2x+1}{16} \Leftrightarrow x^2-8x+24=0$ VN_0.

Vậy nghiệm của BPT đã cho là: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 10: Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)$ (*)

Giải: Điều kiện: $x \ge 1 \cup x \le -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Ap dụng BĐT Bunhia cho hai bộ số (1,1,-x) và $(\sqrt{3x^2-1},\sqrt{x^2-x},\sqrt{x^2+1})$ ta có

$VT(*)\le\sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}$ .Dấu "=" xảy ra khi x=-1

Do $x\ge 1 \cup x\le -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $5x^2$-x >0 . Ap dụng BĐT Côsi ta có

$$VP(*)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[5x^2-x+2(x^2+2)\right]\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{(5x^2-x)2(x^2+2)}$$

$=\sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$ và $x=\frac{4}{3}$

Từ đó ta có nghiệm của PT (*) là x=-1

Ví dụ 11: Giải bất phương trình :

$$\sqrt[4]{(4-x)(x-2)}+\sqrt[4]{4-x}+\sqrt[4]{x-2}+6x\sqrt{3x}\le x^3+30.$$

Giải: ĐK $2\le x\le 4$

Ví dụ 12: Giải phương trình: $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}$ (1).

Giải: ĐK: $\left[\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{15}}{6}\le x\le 0\\ \frac{1}{2}\le x\le\frac{3+\sqrt{15}}{6}\end{array}\right.$.

Áp dụng BĐT Bunhicovski ta có:

$VT(1)\le\sqrt{2(2x^2-x+1+3x-3x^2)}=\sqrt{2(1+2x-x^2)}=\sqrt{2[2-(1-x)^2]}\le 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Mặt khác : $VT(1)=(x-1)^2+2\ge 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 13: Giải phương trình:

$$\sqrt{13x^2-6x+10}+\sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}}+\sqrt{17x^2-48x+36}=\frac{1}{2}(36x-8x^2-21)\ (2).$$

Giải: Ta có

$$VT(2)=\sqrt{(3x+1)^2+(2x-3)^2}+\sqrt{(2x-\frac{5}{2})^2+(x-\frac{3}{2})^2}+\sqrt{x^2+(4x-6)^2}\ge$$

$$\ge|3x+1|+\left|2x-\frac{5}{2}\right|+|x|\ .$$

$\Rightarrow VT(2)\ge\left|3x+1+2x-\frac{5}{2}+x\right|=\left|6x-\frac{3}{2}\right|\ge 6x-\frac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{3}{2}$

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Mặt khác: $VP(6) = \frac{1}{2}\left[12x - 3 - 2(4x^2 - 12x + 9)\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[12x - 3 - 2(2x-3)^2\right] \le \frac{1}{2}(12x - 3) = 6x - \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$ (f)

Từ đó ta có nghiêm của PT (2) là $x = \frac{3}{2}$.

Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$;2) $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 4$

3) $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$

4) $(x+2)\sqrt{x+1} = 2x+1$

5) $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$

6) $32x^2 - 4x + 1 = \sqrt[3]{4x(8x+1)}$

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Phương pháp hàm số:

<u>Định lí 1</u>: Nếu hàm số y=f(x) luôn đb (hoặc luôn ngb) thì số nghiệm của pt : f(x)=k Không nhiều hơn một và f(x)=f(y) khi và chỉ khi x=y

<u>Định lí 2</u>: Nếu hàm số y=f(x) luôn đb (hoặc luôn ngb) và hàm số y=g(x) luôn ngb (hoặc luôn đb) trên D thì số nghiệm trên D của pt: f(x)=g(x) không nhiều hơn một

<u>Định lí 3</u>: Cho hàm số y=f(x) có đạo hàm đến cấp n và pt $f^{(k)}(x)=0$ có m nghiệm, khi đó pt $f^{(k-1)}(x)=0$ có nhiều nhất là m+1 nghiệm

Định lí 4: Nếu hàm số y=f(x) luôn đồng biến(hoặc luôn nghịch biến) trên D thì $f(x)>f(y)\Leftrightarrow x>y\ (x<y)$.

Các ví dụ:

<u>Ví dụ 1</u>: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4$

2) $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4$.

3) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}$

Giải:

1) Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}$, ta có:

$f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}+\dfrac{1+\dfrac{7}{2\sqrt{7x+2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}}>0$ nên hàm số f(x) luôn đồng biến.

Mặt khác: $f(1)=4\Rightarrow pt\Leftrightarrow f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1$.

Vậy x=1 là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}=4-x\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Với $f(x)=\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}$ có $f'(x)=\dfrac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-1}}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}>0$ nên f(x) là hàm đồng biến và $g(x)=4-x$ là hàm nghịch biến

Mà $f(1)=g(1)=3$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x=1.

3) Đặt $u=\sqrt[3]{x+1},\ v=\sqrt[3]{2x^2}$ thì phương trình đã cho trở thành

$\sqrt[3]{u^3+1}+u=\sqrt[3]{v^3+1}+v\Leftrightarrow f(u)=f(v)$, trong đó $f(t)=\sqrt[3]{t^3+1}+t$

created using BCL easyPDF Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

Ta có: $f'(t)=\frac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3+1)^2}}+1>0$ nên f(t) là hàm đồng biến

Do đó: $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow 2x^2=x+1\Leftrightarrow x=1,x=-\frac{1}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=1,x=-\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2*:* Giải các bất phương trình sau:

1) $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4$

2) $3\sqrt{3-2x}+\frac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x\le 6$

3) $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}\le 4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

4) $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}<2\sqrt{3}+\sqrt{4-x}$

Giải:1) Đk: $x\ge\frac{1}{5}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}$, ta có $f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0\quad\forall x\ge\frac{1}{5}$.

Mà $f(1)=4\Rightarrow$ bpt $\Leftrightarrow f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow x\ge 1$.

Vậy Bpt đã cho có nghiệm là $x\ge 1$.

2) Đk: $\frac{1}{2}<x\le\frac{3}{2}$. Bpt $\Leftrightarrow 3\sqrt{3-2x}+\frac{5}{\sqrt{2x-1}}\le 2x+6\Leftrightarrow f(x)\le g(x)$ (*)

Trong đó: $f(x)=3\sqrt{3-2x}+\frac{5}{\sqrt{2x-1}}$, có $f'(x)=\frac{-3}{\sqrt{3-2x}}-\frac{5}{(\sqrt{2x-1})^3}<0\Rightarrow f(x)$

là hàm đồng biến, còn $g(x)=2x+6$ là hàm đồng biến và $f(1)=g(1)=8$

*Nếu $x>1\Rightarrow f(x)<f(1)=8=g(1)<g(x)\Rightarrow$ (*) đúng

*Nếu $x<1\Rightarrow f(x)>f(1)=8=g(1)>g(x)\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của Bpt đã cho là: $1\le x\le\frac{3}{2}$.

3) Đk: $x\ge\frac{1}{2}$.

Khi đó: Bpt $\Leftrightarrow(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1}-3)\le 4$ (*)

*Nếu $\sqrt{2x-1}-3\le 0\Leftrightarrow x\le 5\Rightarrow$ (*) luôn đúng.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image

*Nếu $x > 5$, ta xét hàm số $f(x) = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3)$ có:

$f'(x) = (\frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+6}})(\sqrt{2x-1} - 3) + \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}} > 0$ nên f(x) là hàm đồng biến và $f(7) = 4$ nên $(*) \Leftrightarrow f(x) \le f(7) \Leftrightarrow x \le 7$.

Vậy nghiệm của Bpt đã cho là: $\frac{1}{2} \le x \le 7$.

4) Đk: $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16 \ge 0 \\ 4 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 4.$

Khi đó, Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) < 2\sqrt{3}$ (*)

Trong đó: $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ có

$f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0$ nên f(x) là hàm đồng biến

Mà ta có: $f(1) = 2\sqrt{3} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của Bpt đã cho là: $-2 \le x < 1$.

created using
BCL easyPDF
Printer Driver
Click here to purchase a license to remove this image