GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Cao Minh Quang, GV Toán trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long

*****

Phương trình (đại số) là bài toán thường xuất hiện trong các kì thi tuyển sinh, các kì thi học sinh giỏi. Có rất nhiều phương pháp giải phương trình như dùng các phép biến đổi đại số để đưa phương trình về dạng tích, dạng đa thức, dùng bất đẳng thức, dùng tính chất đơn điệu của hàm số, lượng giác hóa …

Bài viết sau trình bày phương pháp giải phương trình (đại số) bằng cách giải hệ phương trình.

Bài toán 1. Giải phương trình

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2.$$

Lời giải. Điều kiện $x\ge 6$.

Đặt $a=\sqrt{x+2}, b=\sqrt{x-6}\left(a,b\ge 0\right)$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a-b&=2\\a^2-b^2&=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=2\\a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+2}=3\\\sqrt{x-6}=1\end{cases}.$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $x=7$. So sánh với điều kiện, ta nhận nghiệm $x=7$.

Bài toán 2. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2}.$$

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt[3]{x-1}, b=\sqrt[3]{x-3}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\a^3-b^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\a^2+ab+b^2=\sqrt[3]{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\\left(a-b\right)^2+3ab=\sqrt[3]{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\ab=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-\sqrt[3]{2}\end{cases}\vee\begin{cases}a=-\sqrt[3]{2}\\b=0\end{cases}$$

Với $a=0, b=-\sqrt[3]{2}$, ta được $x=1$.

Với $a=\sqrt[3]{2}, b=0$, ta được $x=3$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1, x=3$.

Bài toán 3. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4.$$

Lời giải. Điều kiện $15\le x\le 97$

Đặt $a=\sqrt[4]{97-x}, b=\sqrt[4]{x-15}\left(a,b\ge 0\right)$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=4\\a^4+b^4=82\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2=82\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\a^2b^2-32ab+87=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\ab=3\end{cases}\vee\begin{cases}a+b=4\\ab=29\end{cases}.$$

- $\begin{cases}a+b=4\\ab=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\vee\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$. Khi đó $x=16$ (nhận).
- $\begin{cases}a+b=4\\ab=29\end{cases}$ (Hệ phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=16$.

Bài toán 4. Giải phương trình

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1.$$

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}, b=\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=1\\a^5+b^5=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\\left(a^3+b^3\right)\left(a^2+b^2\right)-a^2b^2\left(a+b\right)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\\left[\left(a+b\right)^2-3ab\right]\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]-a^2b^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\a^2b^2-ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ab=0\end{cases}\vee\begin{cases}a+b=1\\ab=1\end{cases}$$

- $\begin{cases}a+b=1\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\vee\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$.

  Khi đó $x=\frac{1}{2}$ hoặc $x=-\frac{1}{2}$.
- $\begin{cases}a+b=1\\ab=1\end{cases}$ (Hệ phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{2}$.

Bài toán 5. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt{\frac{1}{2}-x}=1.$$

Lời giải. Điều kiện $x \le \frac{1}{2}$.

Đặt, $a=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}, b=\sqrt{\frac{1}{2}-x}\left(b\ge 0\right)$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a^3+\left(1-a\right)^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a^3+a^2-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}.$$

Từ đó, ta suy ra $x=-\frac{1}{2}, x=\frac{1}{2}, x=-\frac{17}{2}$.

So sánh điều kiện ban đầu, ta nhận các nghiệm

$$x=-\frac{1}{2}, x=\frac{1}{2}, x=-\frac{17}{2}.$$

Bài toán 6. Giải phương trình

$$-x^2+2=\sqrt{2-x}.$$

Lời giải. Điều kiện $x\le 2$.

Đặt $y=\sqrt{2-x}\left(y\ge 0\right)$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -x^2+2=y \\ -y^2+2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=2 \\ x^2-y^2=x-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}\left(i\right) \vee \begin{cases} x^2+y=2 \\ x+y=1 \end{cases}\left(ii\right).$$

Ở hệ phương trình (i), ta nhận được $x=1$ (loại nghiệm $x=-2$ vì khi đó $y=-2<0$).

Ở hệ phương trình (ii), ta nhận được $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

So sánh với điều kiện ban đầu, ta nhận nghiệm

$$x=1,\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán 7. Giải phương trình

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$$

Lời giải.

Đặt $y=\sqrt[3]{2x-1}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2y\left(1\right) \\ x^3-y^3=2\left(y-x\right)\left(2\right) \end{cases}$$

$\left(2\right)\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2+2\right)=0$. Ta nhận thấy rằng

$$x^2+xy+y^2+2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+2>0$$

Do đó $x-y=0$ hay $x=y$. Thế vào phương trình (1)

$$x^3-2x+1=0\Leftrightarrow x=1\vee x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\vee x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1, x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 8. Giải phương trình

$$x.\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30.$$

Lời giải.

Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} xy\left(x+y\right)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\left(x+y\right)=30 \\ \left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy\left(x+y\right)=30 \\ \left(x+y\right)^3=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$, $x=2$.

Để kết thúc bài viết, xin nêu một số bài tập tự luyện.

Giải các phương trình sau

1. $x^2-\sqrt{x+5}=5$.
2. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2}$.
3. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{2x+1}$.
4. $\sqrt[3]{-x-1}+\sqrt{x+2}=1$.
5. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$.
6. $\sqrt[4]{57-x}+\sqrt[4]{x+40}=5$.
7. $\left(x+3\right)^4+\left(x+5\right)^4=2$.
8. $x^2+\sqrt[3]{\left(16-x^3\right)^2}=8$.

……………………………………………………

LỜI GIẢI CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. $x^2-\sqrt{x+5}=5$

Lời giải. Điều kiện $x\ge -5$

Đặt $y=\sqrt{x+5}\left(y\ge 0\right)$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2-y=5\\ y^2-x=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y=5\\ \left(x-y\right)\left(x+y+1\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y=5\\ x=y\end{cases}\left(I\right)\vee\begin{cases}x^2-y=5\\ y=-1-x\end{cases}\left(II\right).$$

Giải hệ (I), ta được $x=y=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Giải hệ (II), ta được $x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2},y=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

hoặc $x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2},y=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Kết hợp điều kiện ban đầu, nhận nghiệm

$$x=\frac{1+\sqrt{21}}{2},\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

2. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2}$

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt[3]{x-1},b=\sqrt[3]{x-3}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=\sqrt[3]{2}\\ a^3-b^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt[3]{2}\\ \left(a-b\right)\left[\left(a+b\right)^2-ab\right]=\sqrt[3]{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\ \left(a-b\right)^2+3ab=\sqrt[3]{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\ ab=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-\sqrt[3]{2}\end{cases}\vee\begin{cases}a=-\sqrt[3]{2}\\ b=0\end{cases}$$

Với $a=0,b=-\sqrt[3]{2},$ ta được $x=1$.

Với $a=\sqrt[3]{2},b=0,$ ta được $x=3$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1,x=3$.

3. $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{16+x}=4$

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt[3]{12-x},b=\sqrt[3]{16+x}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=4\\ a^3+b^3=28\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\ ab=3\end{cases}$$

Với $a=1,b=3,$ ta được $x=11$.

Với $a=3,b=1,$ ta được $x=-15$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=11,x=-15$.

4. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{2x+1}$

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt[3]{x-2},b=\sqrt[3]{x+3}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=\sqrt[3]{a^3+b^3}\\ b^3-a^3=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab\left(a+b\right)=0\\ b^3-a^3=5\end{cases}$$

Với $a=0,b=\sqrt[3]{5},$ ta được $x=2$.

Với $a=-\sqrt[3]{5},b=0,$ ta được $x=-3$.

Với $a=-\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}},b=\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}},$ ta được $x=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=2,x=-3,x=-\dfrac{1}{2}$.

5. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$

Lời giải. Điều kiện $x\ge 8$

Đặt $a=\sqrt[4]{97-x},b=\sqrt[4]{x-15}\left(a,b\ge 0\right)$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a-b=2\\ a^4-b^4=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=4\\ \left(a+b\right)\left(a^2+b^2\right)=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\ a^2b^2-32ab+87=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\ ab=3\end{cases}\vee\begin{cases}a+b=4\\ ab=29\end{cases}.$$

- $\begin{cases}a+b=4\\ ab=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}\vee\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$. Khi đó $x=16$ (nhận).
- $\begin{cases}a+b=4\\ ab=29\end{cases}$ (Hệ phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=16$.

6. $\sqrt[4]{57-x}+\sqrt[4]{x+40}=5$

Lời giải. Điều kiện $57\ge x\ge -40$

Đặt $a=\sqrt[4]{57-x},b=\sqrt[4]{x+40}\left(a,b\ge 0\right)$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=5\\ a^4+b^4=97\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ \left(25-2ab\right)^2-2a^2b^2=97\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ a^2b^2-50ab+264=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ ab=6\end{cases}\vee\begin{cases}a+b=5\\ ab=44\end{cases}.$$

- $\begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$. Khi đó $x = 41$ (nhận).
- $\begin{cases} a+b=5 \\ ab=44 \end{cases}$ (Hệ phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 41$.

7. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$

Lời giải.

Đặt $a = x+3, b = x+5$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -a+b=2 \\ a^4+b^4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=2 \\ \left[(-a+b)^2+2ab\right]^2 - 2a^2b^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=2 \\ a^2b^2+8ab+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=2 \\ ab=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} -a+b=2 \\ ab=-7 \end{cases}$$

- $\begin{cases} -a+b=2 \\ ab=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$. Khi đó $x = -1$.
- $\begin{cases} -a+b=2 \\ ab=-7 \end{cases}$ (Hệ phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$.

8. $x^2 + \sqrt[3]{(16-x^3)^2} = 8$

Lời giải.

Đặt $y = \sqrt[3]{(16-x^3)}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x^3+y^3=16 \end{cases}.$$

Đặt $t = (x+y)$, ta có

$$t^3 = (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y) =$$

$$= 16 + 3t.\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2} = 16+3t.\frac{t^2-8}{2}$$

Do đó $t^3 - 24t + 32 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t^2+4t-8) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-2+2\sqrt{3} \\ t=-2-2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

- $t = 4$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

- $t = -2+2\sqrt{3}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=-2+2\sqrt{3} \\ xy=4-4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}-1+\sqrt[4]{12} \\ y=\sqrt{3}-1-\sqrt[4]{12} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{3}-1-\sqrt[4]{12} \\ y=\sqrt{3}-1+\sqrt[4]{12} \end{cases}$$

- $t = -2-2\sqrt{3}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=-2-2\sqrt{3} \\ xy=4+4\sqrt{3} \end{cases}$$ (Hệ phương trình vô nghiệm)

Kết luận. Phương trình có 3 nghiệm

$$x = 2; x = \sqrt{3}-1+\sqrt[4]{12}; x = \sqrt{3}-1-\sqrt[4]{12}.$$

……………………………………………………