Trần Thành Minh - Phan Lưu Biên – Trần Quang Nghĩa

TỔ HỢP & XÁC SUẤT

I. TỔ HỢP

§1. Hai qui tắc đếm cơ bản

A. Tóm tắt giáo khoa

1. Qui tắc cộng :

Giả sử một công việc có thể được tiến hành theo môt trong k phương án A_2 , A_2 , . . . ,A_k .Phương án A_1 có thể thực hiện bởi n_1 cách,phương án A_2 có thể thực hiện bởi n_2 cách , . . . , phương án A_k có thể thực hiện bởi n_k cách .Khi đó công việc có thể thực hiện bởi $n_1 + n_2 + . . . + n_k$ cách

2. Qui tắc nhân

Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn A_1 , A_2 , . . .,A_k .Công đoạn A_1 có thể thực hiện theo n_1 cách ,công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách , . . . ,công đoạn A_k có thể thực hiện theo n_k cách .Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n_1.n_2. . .n_k$ cách

B.Giải toán

Dạng 1 :Đếm số phần tử của tập hợp sử dụng qui tắc cộng

Ví dụ 1 : Trên kệ sách có 12 quyển sách tham khảo Toán 11 và 6 quyển sách tham khảo Lý 11.Hỏi một học sinh có bao nhiêu cách chọn một trong hai loại sách nói trên

Giải
Học sinh có hai phương án chọn .Phương án 1 là chọn một quyển sách Toán 11,phương án này có 12 cách chọn
Phương án 2 là chọn một quyển sách Lý 11,phương án này có 6 cách chọn
Vậy học sinh có : 12 + 6 cách chọn một trong hai lại sách nói trên.

Ví du 2 : Cho tập hợp E = $\left\{a,b,c\right\}$ .Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp con khác r rỗng của E.

Giải
Phương án 1 : có 3 cách chọn một tập con của E gồm một phần tử
Phương án 2 : có 3 cách chọn một tập con của E gồm 2 phần tử
Phương án 3 : có một cách chọn một tập con của E gồm 3 phần tử
Vậy có 3 + 3 + 1 = 7 tập con khác rỗng của tập E

Dạng 2 :Đếm số phần tử của tập hợp sử dụng qui tắc nhân

Ví dụ 3 : Một lớp học có 40 học sinh.Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban điều hành lớp gồm một lớp trưởng,một lớp phó và một thủ quỹ.Hỏi có bao nhiêu cách chọn biết rằng mỗi học sinh đều có thể làm một nhiệm vụ

Giải
Có 40 cách chọn một lớp trưởng
Sau khi chọn xong lớp trưởng có 39 cách chọn một lớp phó
Sau khi chọn xong một lớp trưởng và một lớp phó ,có 38 cách chọn một thủ quỹ
Vậy có tất cả 40.39.38 = 58.280 cách chọn ban điều hành lớp

Ví dụ 4 : Từ trường Lê Hồng Phong đến trường Nguyễn Thị Minh Khai có 4 con đường đi và từ trường Nguyễn Thị Minh Khai đến trường Lê Quí Đôn có 3 con đường đi.Hỏi có bao nhiêu cách đi của một học sinh trường Lê Hồng Phong muốn đến rủ một học sinh của trường Nguyễn Thị Minh Khai cùng đến trường THPT Lê Quí Đôn tham dự lễ hội?

Giải
Có 4 con đường đi từ trường Lê Hồng Phong đến trường Nguyễn Thị Minh Khai và có 3 con đường đi từ trường Nguyễn Thị Minh Khai đến đường Lê Quí Đôn ,như vậy có 2.3 = 12 cách đi từ trường Lê Hồng Phong đến trường Lê Quí Đôn qua ngõ trường Nguyễn Thị Minh Khai

Ví dụ 5 : Cho tập hợp E = $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ .Từ các phần tử của E có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau:

Giải
Gọi số đó là x = $\overline{a_1a_2a_3a_4}$
x là số chẵn nên có 4 cách chọn số $a_4 \in \{ 2,4,6,8\}$
Vì các số khác nhau nên có 8 cách chọn số a_3 , có 7 cách chọn số a_2 và có 6 cách chọn số a_1
Vậy theo qui tắc nhân thì có 2.8.2.6 = 1344 số tự nhiên được thành lập

C. Bài tập rèn luyện :

2.1 .Từ TP.Hố Chí Minh đi đến TP. Nha Trang có thể đi bằng ô tô , tàu hỏa , hay tàu thủy .Mỗi ngày có 6 chuyến ô tô, có 4 chuyến tàu hỏa và 3 chuyến tàu thủy.Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn để đi từ TP.Hồ Chí Minh đến Nha Trang?

2..2. Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ .

a) Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một học sinh nam hay nữ dự trại hè của trường.Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

b) Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một học sinh nam và một họcsinh nữ dự lễ hội của trường bạn .Có bao nhiêu các chọn?

2..3. Cho tập hợp E = $\{2,4,6\}$ Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên khác nhau có những chữ số khác nhau chọn từ các phần tử của E.

2.4. Trong cuộc thi vấn đáp về môn sử , giám khảo soạn 10 câu hỏi về sử Việt Nam, 6 câu hỏi về sử thế giới .Mỗi thí sinh rút thăm một câuhỏi .Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng chọn một câu hỏi?

2.5. Có tất cả bao nhiêu số lẻ nhỏ hơn 80?

2.6 Giả sử có 2 đường nối từ tỉnh A đến tỉnh B và có 3 đường nối từ tỉnh B đến tỉnh C.Chúng ta muốn đi từ tỉnh A sang tỉnh C qua ngã tỉnh B và trở về theo ngã đó .Có tất cả mấy hành trình đi về nếu :

a) phải dùng cùng một đường để đi và về

b) dùng đường nào cũng được để đi và về

c) phải dùng những đường khác nhau làm đường đi và đường về trên cả hai chặn A – B và B – C ?

2.7. Có tất cả mấy số có thể thành lập được với các chữ số : 2.2.6.8 nếu :

a) số đó lớn hơn 200 và nhỏ hơn 600

b) số đó có 3 chữ số khác nhau

2.8. Biển số xe máy , nếu không kể mã số vùng , gồm có 6 kí tự .Trong đó kí tự ở vị trí thứ nhất là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái),ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập hợp $\{1.2.3.4.5.6.7.8.9\}$,ở bốn vị trí kế tiếp là bốn chữ số chọn trong tập hợp $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ Hỏi nếu không kể mã số vùng thì có thể làm được bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

2.9. Có bao nhiêu số tự nhiên :

a) có 4 chữ số mà cả 4 chữ số là số lẻ ?

b) có 5 chữ số mà các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?

2.10. Người ta ghi nhãn các chiếc ghế ngồi trong một rạp hát bằng hai ký tự :ký tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái) và ký tự ở vị trí thứ hai là một số nguyên dương 1,2 , . . . , 30. Hỏi có tất cả bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau trong rạp hát?

D. Hướng dẫn – Đáp số

2.1 Theo qui tắc cộng ta có : 6 + 4 + 3 = 13 sự lựa chọn

2.2 Lớp học có 20 nam và 15 nữ
a) Nếu chọn một nam hay một nữ thì theo qui tắc cộng có 20 + 15 = 35 cách chọn
b) Nếu chọn một nam và một nữ thì theo qui tắc nhân có 20.15 = 300 cách chọn

2.3 Có 3 số tự nhiên khác nhau có một chữ số
Có 6 số tự nhiên khác nhau có hai chữ số khác nhau
Có 6 số tự nhiên khác nhau có ba chữ số khác nhau
Vậy có tất cả 3 + 6 + 6 = 15 số tự nhiên

2.4.Thí sinh có 10 cách chọn một câu hỏi Sử Việt Nam hay 6 cách chọn một câu hỏi Sử Thế giới .Vậy có 10 + 6 = 16 cách chọn một câu hỏi.

2.5. Số phải tìm có một chữ số : 5 số (chọn một trong 5 số lẻ 1.2.2.2.9)
Số phải tìm có hai chữ số x = $\overline{a_1a_2}$. Vì x là số lẻ nên có 5 cách chọn cho chữ số a_2 , x nhỏ hơn 80 nên có 7 cách chọn cho chữ số a_1 (chọn trong các số 1,2,3,4,5,6,7) .Do đó có 2.7 = 35 cách chọn số lẻ có hai chữ số
Vậy có 5 + 35 = 40 số lẻ nhỏ hơn 80.

2.6. Có 2 con đường đi từ A đến B và 3 con đường đi từ B đến C , do đó theo qui tắc nhân có 2.3 = 6 hành trình đi từ A đến C qua ngã B
a) nếu dùng cùng một đường để đi và về thì có 6 cách chọn
b) nếu dùng đường nào cũng được để đi và về thì có 6. 6 = 36 hành trình
c) nếu dùng những đường khác nhau làm đường đi và đường về trên cả hai chặn A – B và B - C thì có 6.2 = 12 hành trình đi và về vì có 6 cách chọn đường đi nhưng đường về chỉ có 2 cách chọn đường về từ C – B và một cách chọn đường về B – A.

2.7. a) Số tự nhiên lớn hơn 200 và nhỏ hơn 600 có ba chữ số $\overline{a_1a_2a_3}$
Vì chỉ được chọn trong các số 2. .4 .6 .8 nên có hai cách chọn a_1 là số 2 và 4 và các chữ số không khác nhau nên có 4 cách chọn a_2 và 4 cách chọn a_3
Vậy có tất cả 2.2.4 = 32 số lớn hơn 200 và nhỏ hơn 600

b) Số tự nhiên có ba chữ số khác nhau $\overline{a_1a_2a_3}$ nên có 4 cách chọn a_1 , 3 cách chọn a_2 và 2 cách chọn a_3 .Vậy có 2.2.2 = 24 số gồm ba chữ số khác nhau

Bảng chữ số xe máy không kể mã vùng hiện nay có dạng F 5 – 6202

- Có 24 cách chọn một chữ cái ở vị trí đầu
- Có 9 cách chọn một chữ số cho vị trí thứ hai (không có số 0)
- Có 10 cách chọn một chữ số cho mỗi vị trí trong bốn vị trí còn lại (có số 0)

Vậy theo qui tắc nhân có : 22.9.10.10.10.10 = 2 160 000 biển số xe

2.9 a) Có 5 chữ số lẻ là 1, 3 , 5 , 7 , 9 .Số phải tìm gồm 4 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$

Các chữ số không khác nhau nên mỗi chữ số a_i có 5 cách chọn một trong 5 số lẻ .Vậy theo qui tắc nhân có : 2.2.2.5 = 625 số phải tìm

b) Số phải tìm gồm 5 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_1 \neq 0$ và theo yêu cầu bài toán thì $a_1 = a_5$; $a_2 = a_4$ .Như vậy có 9 cách chọn chữ số a_1 và a_5 ; có 10 cách chọn a_2 và a_4 và có 10 cách chọn số chính giữa a_3 .Vậy theo qui tắc nhân có : 9.10.10 = 900 số phải tìm.

2.10 Nhãn của ghế có dạng A12 chẳng hạn

Có 24 cách chọn một chữ trong 24 chữ cái

Có 30 cách chọn một số nguyên dương trong tập hợp $\{1, 2, ..., 30\}$

Vậy theo qui tắc nhân có : 22.30 = 720 nhãn

§ 2. HOÁN VỊ , CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

A.Tóm tắt giáo khoa :

Hoán vị :

Định nghĩa : Cho tập hợp A có n phần tử . Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự ,ta được một hoán vị các phần tử của tập A

Ví dụ : Cho tập hợp A = $\{a, b, c\}$ .Các hoán vị của A là các bộ ba thứ tự (a,b,c) ; (a, c ,b) ; (b.a.c) ; (b.c.a) ; (c,a,b) ; (c.b.a)

b) Số các hoán vị : Cho số nguyên dương n .Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là : $\boxed{\mathbf{P_n = n(n-1)(n-2)...2.1 = n!}}$ (1)

Ví dụ : Số hoán vị của tập hợp A = $\{a, b, c\}$ gồm 3 phần tử là

3! = 1.2.3 = 6

Chỉnh hợp :

Định nghĩa : Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. . Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hởp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là chỉnh hợp chập k của A)

Ví dụ : Cho tập hợp A = $\{a,b,c\}$ .Các chỉnh hợp chập 2 của A là :

(a,b) ; (b,a) ; (a,c) ; (c,a) ; (b,c) ; (c.b)

b) Số các chỉnh hợp : Cho các số nguyên n và k với $1 \le k \le n$.Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là :

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)} \quad (2)$$

Ví dụ : Một lớp học có 40 học sinh.Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một học sinh làm lớp trưởng , một học sinh làm lớp phó và một học sinh làm thủ quỹ.Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Giải: Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 3 học sinh trong số 40 học sinh làm 3 chức vụ phân biệt (có thứ tự) .Vậy có tất cả :

A_{40}^3 = 40.39.38 = 59 280 cách chọn khác nhau

Ghi chú :1/ Theo định nghĩa ta thấy một hoán vị của tập hợp n phần tử là một chỉnh hợp chập n của tập hợp đó A_n^n = n!

2/ Công thức (2) có thể viết dưới dạng $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$ (3)

với qui ước 0! = 1

Tổ hợp :

a) Định nghĩa : Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A)

Như vậy một tổ hợp chập k của A là một cách chọn k phần tử của A (không quan tâm đến thứ tự)

Ví dụ : Cho tập hợp A = $\{a,b,c\}$ .Các tổ hợp chập 2 của A là :

$\{a,b\}$; $\{a,c\}$; $\{b,c\}$

b) Số các tổ hợp : Cho các số nguyên n và k với $1 \le k \le n$. Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là :

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}} \quad (4)$$

Ghi chú : Với $1 \le k \le n$ ta có thể viết công thức (4) dưới dạng :

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \quad (5) \text{ với qui ước } C_n^0 = 1$$

c) H ai công thức cơ bản về tổ hợp

$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$ với mọi số nguyên n và k thỏa $0 \le k \le n$

$\boxed{C_{n+1}^{k} = C_n^k + C_n^{k-1}}$ với mọi số nguyên n và k thỏa $1 \leq k \leq n$

Ví dụ : Trong mặt phẳng cho 5 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng
a) Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nối liền các điểm đó?
b) Hỏi có bao nhiêu tam giác mà đỉnh là các điểm đó?

Giải
a) Một đoạn thẳng nối liền 2 điểm chọn trong 5 điểm cho
Vậy có $C_5^2 = \dfrac{5.4}{2!} = 10$ đoạn thẳng
b) Một tam giác được tạo ra bởi 3 điểm chọn trong 5 điểm đã cho.
Vậy có : $C_5^3 = \dfrac{5.4.3}{3!} = 10$ tam giác

B. Giải toán :

Dạng 1 : Bài toán sắp xếp các phần tử theo thứ tự : dùng chỉnh hợp hay hoán vị

Ví dụ 1 : Một nhóm học sinh gồm 7 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh đó vào một ghế dài sao cho :

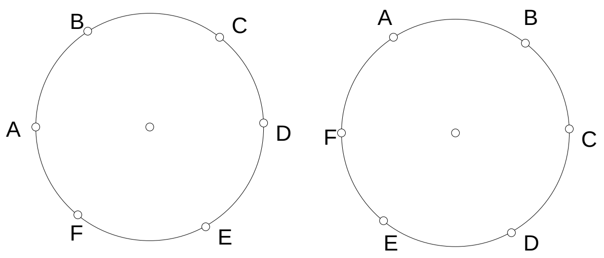
a) Học sinh nam phải ngồi liền nhau và
b) Nhóm 4 học sinh nữ ngồi chính giữa

Giải
a) Bảy học sinh nam ngồi liền nhau xem như một vị trí x nên ta sắp xếp x và 4 nữ là một hoán vị 5 phần tử : có 5! cách
Sau đó sắp xếp 7 nam sinh trong vị trí x là một hoán vị 7 phần tử : có 7! cách .Vậy theo qui tắc nhân có 5!.7! = 604800

b) Bốn học sinh nữ ngồi chính giữa nên chiếm một vị trí y cố định nên sắp 7 học sinh trên 7 chỗ : có 7! cách
Sau đó hoán vị 4 nữ sinh trong vị trí y : có 4! cách
Vậy có 4!.7! = 120960 cách

Ví dụ 2 : Có bao nhiêu cách xếp 6 người vào 6 ghế xếp theo bàn tròn nếu không có sự khác biệt giữa các ghế này?

Giải



Hình dưới đây cho ta thấy hai lối xếp đặt giống hệt nhau,mặc dầu A thật sự ngồi ở ghế khác.Như vậy trong việc ngồi xung quanh bàn tròn ,có một người ngồi tự do và 5 người còn lại chia nhau ngồi 5 ghế còn lại.

Vậy có tất cả 5! = 120 cách xếp 6 người ngồi vào 6 ghế của bàn tròn.

Ví dụ 3 : Có thể thành lập bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhác nhau và trong đó nhất thiết phải có chữ số 8 ?

Giải

Xét tập hợp các số tự nhiên E = $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và số gồm 5 chữ số : x = $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

- Dạng $a_1 = 8$ thì có $m_1 = A_9^4 = 9.8.2.6 = 3024$ số
- Dạng $a_1 \neq 0$ và 8 thì
  - * có 8 cách chọn $a_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$
  - * có 4 cách chọn một trong bốn chữ số a_2 , a_3 , a_4 , a_5 bằng 8
  - * lập 3 chữ số còn lại trong tập hợp E \ $\{a_1, 8\}$: có $A_8^3 = 8.2.6 = 336$

  Do đó có $m_2 = 8.2.336 = 10\ 752$ số dạng này

Vậy số gồm 5 chữ số khác nhau và trong đó nhất thiết phải có chữ số 8 là :

$m_1 + m_2 = 3024 + 10752 = 13776$ số

Ví dụ 4 : Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau,mỗi dãy gồm 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường Lê Hồng Phong và 6 học sinh trường Trần Đại Nghĩa vào bàn nói trên.hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau : a) Bất cứ hai học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau. b) Bất cứ hai học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường nhau.

Giải

Bước 1 : xếp chỗ cho hai nhóm học sinh ngồi cạnh nhau hoặc đối diện thì khác trường với nhau thì có hai cách : (P là học sinh Lê Hồng Phong và N là học sinh Trần Đại Nghĩa)

P N P N P N	N P N P N P
N P N P N P	P N P N P N

Bước 2 : Trong nhóm học sinh P có 6! cách sắp xếp 6 em vào 6 chỗ ngồi
Trong nhóm học sinh N có 6! cách sắp xếp 6 em vào 6 chỗ ngồi
Vậy có 2 . 6! . 6! = 1 036 800 cách

b) Học sinh thứ nhất trường P có 12 cách chọn ghế ngồi trước
Sau đó chọn một trong 6 học sinh trường N ngồi đối diện với học sinh trường P thứ nhất : có 6 cách chọn
Học sinh thứ hai của trường P còn 10 chỗ để ngồi : có 10 cách chọn chỗ ngồi cho học sinh thứ hai trường P . Chọn một trong 5 học sinh còn lại của trường N ngồi đối diện với học sinh thứ hai của trường P : có 5 cách
Tiếp tục như cách trên ta có :
$12 \times 6 \times 10 \times 5 \times 8 \times 4 \times 6 \times 3 \times 4 \times 2 \times 1 \times 1$ = 33 177 600 cách

Ví dụ 5 : Cho tập hợp số : E = $\{0,1,2,3,4,5\}$ .Hỏi có thể thành lập bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau và không chia hết cho 3

Giải

- Số gồm 3 chữ số khác nhau thành lập từ các chữ số của E kể cả số 0 ở vị trí hàng trăm là : $A_6^3 = 120$
- Số gồm 3 chữ số khác nhau thành lập từ các chữ số của E mà số 0 đứng ở vị trí hàng trăm là $A_5^2 = 20$
- Số chia hết cho 3 khi tổng các chữ số chia hết cho 3 .Như vậy trong tập E các tập con các chữ số sau đây có tổng chia hết cho 3 : {0,1,2} ; {0,2,4} ; {0 ,4 ,5} ; {0,1,5 ; {1,2,3} ; {2,3,4} ; {1,3,5} .
  Do đó có 2.3! – 2.2! = 36 số chia hết cho 3

Vậy có tất cả : 120 – 20 – 36 = 64 số phải tìm

Ví dụ 6 : Cho tập hợp $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

a) Có bao nhiêu tập con X của tập A thỏa mãn điều kiện X chứa 1 và không chứa 9 ?
b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chũ số đôi một khác nhau lấy từ tập A mà không bắt đâu bởi 135 ?

Giải

a) Xét tập hợp B = $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ .Vì tập X không chứa 9 nên X\$\{1\}$ là tập con của B .Như vậy mỗi tập con của B hợp với $\{1\}$ thì được tập X là tập con của A chứa 1 và không chứa 9 .Vậy số tập con X thỏa mãn điều kiện bài toán là $2^7 = 128$

b) Xét số x = $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ A .Vì x là số chẵn nên có 4 cách chọn chữ số $a_5 \in \{2,4,6,8\}$.Sau khi chọn a_5 thì còn lại 8 chữ số của A để chọn các số còn lại nên có A_8^4 = 8.2.6.5 = 1680

Do đó có 4 × 1680 = 6720 số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau .

Mặt khác số x bắt đầu bởi 135 gồm có 5 × 4 = 20 số

Vậy số các số x thỏa mãn bài toán là 1680 – 20 = 1660

Dạng 2 : Bài toán chọn các phần tử không phân biệt thứ tự :dùng tổ hợp

Ví dụ 7 : a) Có tất cả bao nhiêu đường chéo trong một tứ giác lồi n cạnh?
b) Đa giác lồi nào có số cạnh và số đường chéo bằng nhau?

Giải

a) Đa giác lồi n cạnh gồm có n đỉnh.Do đó có tất cả $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng nối liền các đỉnh này.Các đoạn thẳng này gồm các cạnh và các đường chéo

Vậy số đường chéo là $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

b) Số cạnh và số đường chéo bằng nhau khi : $\frac{n(n-3)}{2}$ = n

Do đó n(n – 3) = 2n hay n – 3 = 2 (vì n > 0)

Vậy n = 5 .Suy ra ngủ giác lồi có số cạnh và số đường chéo bằng nhau

Ví dụ 8 : Một nhóm giáo viên gồm có 16 người trong đó có 2 cặp vợ chồng. Hiệu trưởng muốn chọn 8 giáo viên vào hội đồng giáo dục nhà trường.Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu hội đồng này phải có một cặp vợ chồng ?

Giải

Có 2 cách chọn một cặp vợ chồng và số giáo viên còn lại ngoài 2 cặp vợ chồng là12 ,hiệu trưởng phải chọn 6 giáo viên trong 12 người này .

Có tất cả C_{12}^6 = 924 cách chọn

Vậy có tất cả 2 . 924 = 1848 cách chọn thành viên của hội đồng.

Ví dụ 9 : Giáo viên chủ nhiệm muốn chia 10 học sinh thành 3 nhóm, một nhóm gồm 5 học sinhlàm công tác xã hội,một nhóm gồm 3 học sinh làm vệ sinh và một nhóm gồm 2 học sinh giữ trật tự. Hỏi có mấy cách chia?

Giải

Chọn 5 học sinh trong 10 học sinh có $C_{10}^{5} = 252$

Khi chọn xong nhóm thứ nhất ,giáo viên chọn 3 học sinh trong 5 học sinh còn lại nên có $C_{5}^{3} = 10$ cách chọn

Khi chọn xong hai nhóm này thì còn lại 2 học sinh cho nhóm thứ ba

Vậy có tất cả 252 . 10 = 2520 cách chọn.

Ví dụ 10 : Từ một nhóm học sinh gồm 8 nam và 6 nữ ,giáo viên muốn chọn một tổ công tác gồm 6 học sinh.Hỏi có bao nhiêu cách chọn biết rằng tổ công tác phải có nam và nữ

Giải

Chọn 6 học sinh trong 14 học sinh thì có C_{14}^{6} cách chọn

Số cách chọn 6 học sinh nam trong 8 học sinh nam là C_{8}^{6}

Số cách chọn 6 học sinh nữ trong 6 học sinh nữ là 1

Vậy số cách chọn tổ công tác gồm 6 học sinh phải có nam và nữ là :

$C_{14}^{6} - C_{8}^{6} - 1 = 3003 - 28 - 1 = 2974$ cách chọn

Dạng 3 : Phương trình , bất phương trình chứa P_n , A_n^k ; C_n^k

Áp dụng công thức chỉnh hợp và tổ hợp A_n^k ; C_n^k cần chú ý n , k $\in$N và k $\le$ n để chọn nghiệm

Ví dụ 11 : Giải phương trình : $P_x . A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$, trong đó P_x là số hoán vị của x phần tử và A_x^2 là số chỉnh hợp chập 2 của x phần tử

Giải

Ta có $P_x = x!$ và $A_x^2 = x(x-1)$ .Do đó

$P_x . A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x) \Leftrightarrow x!.x(x-1) + 72 = 6[x(x-1) + 2x!]$ với $x \ge 2$ và x nguyên dương

$\Leftrightarrow x![x(x-1) - 12] = 6x^2 - 6x + 72 \Leftrightarrow x!(x^2 - x - 12) = 6(x^2 - x - 12) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 12)(x! - 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 12 = 0 \\ x! = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \text{ hay } x = -3(loai) \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là x = 3 và x = 4

Ví dụ 12 : Giải phương trình : $C_{x+1}^2 + 2C_{x+2}^2 + 2C_{x+3}^2 + C_{x+4}^2 = 149$
(x là số nguyên dương , C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử)

Giải
Ta có : $C_{x+1}^2 + 2C_{x+2}^2 + 2C_{x+3}^2 + C_{x+4}^2 = 149$ với x là số nguyên dương .
$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)x}{2!} + \dfrac{2(x+2)(x+1)}{2!} + \dfrac{2(x+3)(x+2)}{2!} + \dfrac{(x+4)(x+3)}{2!} = 149$
$\Leftrightarrow$ $x^2 + x + 2(x^2 + 3x + 2) + 2(x^2 + 5x + 6) + x^2 + 7x + 12 = 298$
$\Leftrightarrow$ $6x^2 + 24x - 270 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + 4x - 45 = 0$ $\Leftrightarrow$ x = 5 hay x = -9 (loại)
Vậy nghiệm của phương trình là x = 5

Ví dụ 13 : Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$
(trong đó A_n^k và C_n^k lần lượt là số tổ hợp và số tổ hợp chập k của n phần tử)

Giải
Ta có : $A_x^y = \dfrac{x!}{(x-y)!}$ và $C_x^y = \dfrac{x!}{y!(x-y)!}$ với x , y là số nguyên dương và x $\geq$ y

Do đó $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x^y = 20 \\ C_x^y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)} = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y! = 2 \\ x(x-1) = 20 \end{cases}$ Vậy x = 5 và y = 2

Ví dụ 14 : Giải bất phương trình : $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$

Giải
Điều kiện x là số nguyên $\geq$ 2
Ta có $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30 \Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)x}{2!}$ + 3x(x-1) < 30
$\Leftrightarrow$ $x^2 + x + 3x^2 - 3x - 30 < 0$ $\Leftrightarrow$ $4x^2 - 2x - 30 < 0$ $\Leftrightarrow$ $2x^2 - x - 15 < 0$
$\Leftrightarrow$ -5/2 < x < 3 Vậy nghiệm của bất phương trình là x = 2

Dạng 4 : Chứng minh một đẳng thức,một bất đẳng thức chứa A_n^k ; C_n^k

Ví dụ 15 : Chứng minh rằng : $A_{n+k}^{n+1} + A_{n+k}^{n+2} = k^2 A_{n+k}^{n}$

Giải

Ta có : $A_{n+k}^{n+1} + A_{n+k}^{n+2} = \dfrac{(n+k)!}{(k-1)!} + \dfrac{(n+k)!}{(k-2)!} = \dfrac{(n+k)!(1+k-1)}{(k-1)!} = \dfrac{k(n+k)!}{(k-1)!}$

$$= \frac{k^2(n+k)!}{k!} = k^2.A_{n+k}^{n}$$

Ví dụ 16 : Chứng minh rằng : $C_{2n}^2 = 2C_n^2 + n^2$

Giải

Ta có : $C_{2n}^2 = \dfrac{2n(2n-1)}{2!} = \dfrac{2n(n+n-1)}{2!} = \dfrac{2n^2 + 2n(n-1)}{2!} = n^2 + 2C_n^2$

Ví dụ 17 : Chứng minh rằng với $0 \le k \le n$ thì : $C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le (C_{2n}^n)^2$

Giải

Xét dãy số $u_k = C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n > 0$

Ta có : $\dfrac{u_k}{u_{k+1}} = \dfrac{C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n}{C_{2n+k+1}^n.C_{2n-k-1}^n} = \dfrac{\dfrac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}.\dfrac{(2n-k)!}{n!(n-k)!}}{\dfrac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)!}.\dfrac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!}}$

$$= \frac{n+k+1}{2n+k+1}.\frac{2n-k}{n-k} = \frac{2n^2+(k+2)n-k^2-k}{2n^2-(k-1)n-k^2-k} > 1$$

vì $[2n^2 + (k+2)n - k^2 - k\} - [2n^2 - (k-1)n - k^2 - k] = (2k+1)n > 0$

Do đó $u_k > u_{k+1}$ .Vậy dãy số u_k giảm nên ta có $u_k \le u_0 = C_{2n}^n.C_{2n}^n = (C_{2n}^n)^2$

Suy ra : $C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le (C_{2n}^n)^2$

Dạng 5 : Tính tổng của các số tự nhiên thỏa điều kiện cho trước

Ví dụ 18 : Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau lấy từ số 1,2,3,4,5,6. Tính tổng của các số này

Giải
Một số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau lấy từ 1,2,3,4,5,6 là một hoán vị của 6 chữ số này .Vậy có $P_6 = 6! = 720$ số
Để tính tổng số các số này ta nhận thấy mỗi số x = 243165 liên kết với một số duy nhất x' = 534612 mà tổng các chữ số theo hàng đơn vị,chục,trăm, nghìn, chục nghìn,trăm nghìn đều bằng 7
Do đó x + x' = 777 777 .Như vậy 720 số trên được chia thành ½(720) = 360 cặp (x ; x') .Vậy tổng các số tự nhiên này là :
S = 360 × 777 777 = 279 999 720

Ví dụ 19 : Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 10 000 mà tổng các chữ số bằng 3?

Giải
Số tự nhiên nhỏ hơn 10 000 mà tổng các chữ số bằng 3 có thể thành lập được từ số 0000 (4 con số 0) bằng cách thay thế một số 0 duy nhất bởi số 3 hoặc một số 0 bởi số 1 và một số 0 bời số 2 hoặc ba số 0 bởi 3 số 1nên chỉ có các trường hợp sau :
a) Một trong các chữ số bằng 3 thì các chữ số khác phải bằng 0.Vậy có $C_4^1 = 4$ số
b) Số gồm một số 1 và một số 2 là $2 \times C_4^2$ = 12 số
c) Số gồm 3 số 1 là C_4^3 = 4
Vậy có tất cả 4 + 12 + 4 = 20 số thỏa điều kiện bài toán

Ví dụ 20 : Cho E = $\{0,1,2,3\}$ Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau lấy từ E. Tính tổng của các số này.

Giải
Số có 3 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$
Số các số tự nhiên gồm 3 số khác nhau lấy từ E là A_4^3= 2.2.2 = 24 số
trong đó số các số mà $a_1 = 0$ là A_3^2 = 2.2 = 6
Vậy có 24 – 6 = 18 số thỏa mãn bài toán
Ta có A_3^2 số mà số hàng đơn vị là 0 hay 1,2,3 .Do đó tổng các chữ số hàng đơn vị của những số trên là A_3^2 (0 + 1+ 2 +3) = 36
Vậy tổng các chữ số trên là 36 (1 + 10 + 100) = 3996 (kể cả số dạng $a_1 = 0$)
Nếu $a_1 = 0$ thì số các chữ số hàng đơn vị là 1 hay 2 hay 3 là 3 nên tổng các chữ số hàng đơn vị của tất cả số trên mà $a_1 = 0$ là 3(1 + 2 + 3) = 18

Vậy tổng các chữ số dạng $\overline{0a_2a_3}$ là 18(1 + 10) = 198

Suy ra tổng các số thỏa mãn bài toán là : 3996 – 198 = 3798

C. Bài tập rèn luyện :

2.11. Có bao nhiêu cách xếp 7 bạn Giáp . Ất , Bính , Đinh, Mậu . Kỷ . Canh ngồi vào một ghế dài sao cho :

a) Ất ngồi giữa

b) Giáp và Canh ngồi hai đầu ghế

2.12 . Có bao nhiêu cách xếp 4 nam sinh và 3 nữ sinh ngồi vào một dãy 7 ghế biết rằng :

a) họ ngồi chỗ nào cũng được

b) nam sinh ngồi gần nhau và nữ sinh ngồi gần nhau

c) chỉ có nữ sinh ngồi gần nhau

2.13 .Có15 con ngựa tham dự cuộc đua .Nếu không kể trường hợp có hai con ngựa về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất,nhì,ba?

2.14. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội bóng trong một giải có 8 đội bóng tham dự?

2.15. Có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau các mẫu tự trong từ NGHIEM trong đó hai nguyên âm phải đứng đầu và cuối

2.16. Trong 120 hoán vị của từ NGHIA là những từ gồm 5 mẫu tự ,được sắp xếp theo thứ tự a,b,c... như trong từ điển.Hỏi mẫu tự cuối cùng của từ 80 là gì?

2.17. Trong một buổi tiệc mỗi ông bắt tay với các người khác trừ vợ mình,các bà không người nào bắt tay nhau.Biết có tất cả 15 cặp vợ chồng tham dự tiệc,hỏi có tất cả bao nhiêu cái bắt tay của 30 người này?

2.18. Trong hệ trục tọa độ Oxy,chọn 8 điển trên trục Ox và 5 điểm trên trục Oy.Nối một điểm trên trục Ox tới một điểm trên trục Oy ta được 40 đoạn .Hỏi trong 40 đoạn này có tối đa bao nhiêu giao điểm trong phần tư thứ nhất của góc Oxy?

2.19. Trong lớp học có 25 học sinh nam và 15 học sinh nữ.Giáo viên chủ nhiệm chọn 10 học sinh trong đó có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ đi tham gia chiến dịch mùa hè xanh của Thành Đoàn tổ chức.Hỏi có bao nhiêu cách chọn

2.20. Một bài kiểm tra toán có 20 câu trắc nghiệm ,mỗi câu có 4 phương án trả lời.Hỏi bài kiểm tra này có bao nhiêu phương án trả lới?

2.21 . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

2.22 Một nhóm cựu học sinh trường LHP gồm 60 người.
a) Có bao nhiêu cách chọn 4 người vào ban chấp hành?
b) Có bao nhiêu cách chọn một trưởng ban, một phó trưởng ban ,một tổng thư ký và một thủ quỹ

2.23. Giải phương trình $24(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}) = 23A_x^4$ trong đó A_n^p ; C_n^p lần lượt là số chỉnh hợp và số tổ hợp n chập p

2.24 . Giải phương trình : $C_x^3 - C_x^2 = \dfrac{x^3 - 6x^2}{6} + 5$

2.25. Giải phương trình : $C_{2x+4}^{3x-1} = C_{2x+4}^{x^2-2x+3}$

2.26. Giải bất phương trình : $C_{x+2}^{x-1} + C_{x+2}^{x} > \dfrac{5}{2}A_x^2$

2.27. Giải bất phương trình : $\dfrac{P_{x+5}}{(x-k)!} \leq 60A_{x+3}^{k+2}$ trong đó x là ẩn số

2.28. Chứng minh rằng : $C_{n+k}^{k}.C_n^p = C_{n+k}^{p+k}.C_{p+k}^{k}$ với $0 \leq p \leq n$

2.29. Tính tổng S = $\dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + ... + \dfrac{1}{A_n^2}$

2.30. Chứng minh rằng $P_n - P_{n-1} = (n-1) P_{n-1}$ Suy ra
tổng $S = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + nP_n$

D . Hướng dẫn - đáp số :

2.11 a) Ất ngồi giữa thì còn 6 ghế hoán vị cho 6 người.Vậy có $P_6 = 6! = 720$ cách xếp chỗ ngồi
b) Giáp và Canh ngồi hai đầu ghế nên có 2 cách xếp cho 2 bạn này.Còn lại hoán vị 5 bạn trên 5 chỗ nên có $P_5 = 5! = 120$ cách xếp
Vậy có $2 \times 120 = 240$ cách xếp chỗ ngồi

2.12. Xếp 4 nam sinh và 3 nữ sinh vào 7 ghế :

a) Nếu họ ngồi chỗ nào cũng được thì có 7! = 5040 cách xếp
b) Nếu nam sinh ngồi gần nhau và nữ sinh ngồi gần nhau thì có $2 \times 4! \times 3! = 288$ cách xếp
c) Nếu chỉ có nữ sinh ngồi gần nhau thì trường hợp có thể là :
(nam,nữ,nữ,nữ,nam.nam,nam) hay (nam,nam.nữ,nữ,nữ,nam,nam)
hay (nam,nam.nam.nữ,nữ,nữ,nam)
Vậy có $3 \times 4! \times 3! = 432$ cách xếp

2.38.Có $A_{15}^3 = 2730$ kết quả có thể xảy ra

2.14. Có 8! = 40320

2.15. Từ NGHIEM có hai nguyên âm là E và I nên có hai cách xếp đừng đầu và cuối , cón lại bốn phụ âm ta có 4! = 24 cách xếp
Vậy có 2 × 24 = 28 cách xếp khác nhau

1.1. Từ NGHIA gồm 5 mẫu tự được xếp theo thứ tự như trong từ điển :
A, G , H , I , N
Ta có 4! = 24 từ đầu tiên bằng mẫu tự A ,24 từ tiếp theo bằng mẫu tự G,24 từ sau bắt đầu với mẫu tự H.Do đó từ 80 bắt đầu với mẫu tự I ,và nó là từ thứ 80 – 72 = 8 bắt đầu bằng I .Bắt đầu IA ta có 3! = 6 từ , sáu từ sau bắt đầu IG là IGAHN , IGANH, . . .Vậy H là mẫu tự cần tìm

1.2. Trong buổi tiệc nếu 30 người đều bắt tay nhau thì có $C_{30}^2 = \dfrac{30.29}{2} = 435$ cái bắt tay .Trong số này có $C_{15}^2 =$ 105 cái bắt tay giữa các bà và 15 cái bắt tay giữa cặp vợ chồng
Vậy có : 435 – 105 – 15 = 315 cái bắt tay

1.3. Một giao điểm trong góc phần tư thứ nhất được xác định duy nhất bằng cách chọn 2 điểm trên Ox và 2 điểm trên Oy .Số giao điểm tối đa đạt được khi không có 3 đoạn nào trong 40 đoạn đồng qui.
Vậy có $C_8^2 \times C_5^2 = 28 \times 10 = 280$ giao điểm tối đa

1.4. Có $C_{25}^6 \times C_{15}^4$ cách chọn

1.5. Có 20 × 4 = 80 phương án trả lời // 4^{20} phương án trả lời chứ ?

1.6. Số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ .Số chia hết cho 5 là số có $a_5 = 0$ hay 5

- Nếu $a_5 = 0$ thì có A_9^4 số chia hết cho 5
- Nếu $a_5 = 5$ thì $A_9^4 - A_8^3$ số chia hết cho 5

Vậy có 2 $A_9^4 - A_8^3$ = 6048 – 336 = 5712 số chia hết cho 5

1.7. Có C_{60}^4 cách chọn 4 người vào ban chấp hành
Có A_{60}^4 cách chọn trưởng ban,phó trưởng ban,thư ký và thủ quỹ

1.8. Ta có $24(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}) = 23A_x^4$

$\Leftrightarrow 24\left(\dfrac{(x+1)!}{(x+1-3)!} - \dfrac{x!}{(x-4)!(x-x+4)!}\right) = 23\dfrac{x!}{(x-4)!}$ với $x \geq 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1$ (loại) và $x = 5$

2.24 Ta có $C_x^3 - C_x^2 = \dfrac{x^3 - 6x^2}{6} + 5 \iff \dfrac{x!}{3!(x-3)!} - \dfrac{x!}{2!(x-2)!} = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 30}{6}$

$\iff$ x(x – 1)(x – 2) – 3x(x – 1) = $x^3 - 6x^2 + 30$ với x $\geq$ 3

$\iff$ 5x = 30 $\iff$ x = 5

2.25. Ta có $C_{2x+4}^{3x-1} = C_{2x+4}^{x^2-2x+3} \iff \dfrac{(2x+4)!}{(3x-1)!(5-x)!} = \dfrac{(2x+4)!}{(x^2-2x+3)!(1-x^2+4x)!}$

$\iff$ (3x – 1)!(5-x)! = $(x^2 - 2x + 3)!(1 - x^2 + 4x)!$ với 1 $\leq$ x $\leq$ 5

$\iff$ x = 1 , x = 2

2.26.Ta có $C_{x+2}^{x-1} + C_{x+2}^{x} > \dfrac{5}{2}A_x^2 \iff C_{x+3}^{x} > \dfrac{5}{2}A_x^2$ với x $\geq$ 2

$\iff$ (x + 1)(x + 2)(x + 3) > 15x(x – 1)

$\iff$ $x^3 - 9x^2 + 26x + 6 > 0$ $\iff$ $x(x^2 - 9x + 26) + 6 > 0$ luôn luôn đúng với mọi x ≥ 2 .Vậy nghiệm của bất phương trình là x $\in$ N , x$\geq$ 2

2.27 Ta có : $\dfrac{P_{x+5}}{(x-k)!} \leq 60A_{x+3}^{k+2} \iff \dfrac{(x+5)!}{(x-k)!} \leq 60\dfrac{(x+3)!}{(x+1-k)!}$

$\iff$ (x + 4)(x + 5)(x + 1 –k) $\leq$ 60 với k $\leq$ x

- Với x $\geq$ 4 thì bất phương trình vô nghiệm vì (4 +4)(4 + 5) = 72 > 60 và x + 1 – k > 1
- Lấy x $\in \{0,1,2,3\}$ ta thấy các cặp (n;k) sau đây thỏa bất phương trình :(0 ; 0) , (1 ; 0) , (1 ; 1) , (2 ; 2) , (3 ; 3)

2.28. Để chứng minh : $C_{n+k}^{k}.C_n^p = C_{n+k}^{p+k}.C_{p+k}^{k}$

Ta xét : $C_{n+k}^{p+k}.C_{p+k}^{k} = \dfrac{(n+k)!}{(p+k)!(n-p)!}.\dfrac{(p+k)!}{k!(p)!} = \dfrac{(n+k)!}{k!n!}.\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$= C_{n+k}^{k}.C_n^k$

2.29 Tính tổng S = $\dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + ... + \dfrac{1}{A_n^2}$

$= \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n-1)}$ với n $\geq$ 2

mà $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$

Do đó S = $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ = 1 - $\dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$

1.1. Ta có $P_n - P_{n-1}$ = n! – (n-1)! = (n - 1)! (n – 1) = (n – 1) P_{n-1}

Do đó lần lượt thay n = 1 ,2 ,3 , ... , n vào hệ thức trên ta được :

$P_1 = 1$

$P_2 - P_1 = 1P_1$

$P_3 - P_2 = 2P_2$

. . . .

$P_{n-1} - P_{n-2} = (n-2)\, P_{n-2}$

$P_n - P_{n-1} = (n-1)\, P_{n-1}$

Cộng theo vế ta được :

$$P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + (n-1)\, P_{n-1}$$

§3. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TON (NEWTON)

A.Tóm tắt giáo khoa

1. **Công thức nhị thức Niu-ton**

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots.. + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots. + C_n^n b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k\end{aligned}}$$

trong đó $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ là số tổ hợp n chập k

Đặc biệt : $\boxed{(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots. + C_n^k x^k + \ldots. + C_n^n x^n}$

Cho x = 1 ta được tổng các hệ số các số hạng trong công thức nhị thức Niu-ton hay số các tập con của một tập hợp có n phần tử :

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots. + C_n^n = 2^n}$$

2. **Tam giác Pa-xcan (Pascal)**

Do tính chất : $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ nên các hệ số của các số hạng trong nhị thức Niu-ton có thể trình bày dưới dạng sau đây :

$(a+b)^0$					1				
$(a+b)^1$				1		1			
$(a+b)^2$			1		2		1		
$(a+b)^3$	1			3		3		1	
$(a+b)^4$	1	4			6		4		1

. . . .

Bảng số này do nhà toán học Pháp Pa-xcan thiết lập vào năm 1653 và ta gọi là tam giác Pa-xcan . Tam giác này được thiết lập như sau :

Đỉnh được ghi là số 1

Hàng thứ nhất : $1 = C_1^0$ $1 = C_1^1$

Hàng thứ hai : $1 = C_2^0$ $2 = C_2^1$ $1 = C_2^2$

Hàng thứ ba : $1 = C_3^0$ $3 = C_3^1$ $3 = C_3^2$ $1 = C_3^3$

Nếu biết hàng thứ k thì hàng thứ k + 1 tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ k rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số trên .Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng

B. Giải toán

Dạng 1 : Tìm một hệ số của số hạng trong khai triển nhị thức Niu-ton

Ví dụ 1 : Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$

Giải

Hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$ là

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{11.12.13.14.15}{1.2.3.4.5} = 231$$

Ví dụ 2 : Trong khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}\right)^{10} = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{10}x^{10}$. Tìm hệ số a_k lớn nhất ($0 \le k \le 10$)

Giải

Theo công thức Niu-ton ta có :

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}(1+2x)^{10} = \frac{1}{3^{10}}[C_{10}^0 + C_{10}^1(2x) + C_{10}^2(2x)^2 + ... + C_{10}^{10}(2x)^{10}]$$

Do đó $a_k = \frac{2^k}{3^{10}}C_{10}^k$ với k = 0 , 1 , 2 , . . ., 10

Như vậy a_k lớn nhất khi $\begin{cases} a_k > a_{k-1} \\ a_k > a_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^k.10!}{k!(10-k)!} > \dfrac{2^{k-1}.10!}{(k-1)!(10-k+1)!} \\ \dfrac{2^k.10!}{k!(10-k)!} > \dfrac{2^{k+1}.10!}{(k+1)!(10-k-1)!} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{k} > \dfrac{1}{11-k} \\ \dfrac{1}{10-k} > \dfrac{2}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < \dfrac{22}{3} \\ k > 19 \end{cases}$$ Vậy k = 7 vì $0 \le k \le 10$

Hệ số a_k lớn nhất = $\frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$

> **Ví dụ 3** : Tính hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức Niu-ton của $(1 + x)^n$,
> $n \in N^*$, biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển trên bằng 1024

Giải

Theo công thức khai triển ta có

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n x^n$$

Cho x = 1 ta được $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n = 1024 = 2^{10}$ Vậy n = 10

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là $C_{10}^5 = 252$

Dạng 2 :Tính các tổng số $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$ bằng khai triển Niu-ton

Khai triển $(1 + x)^n$ và cho x nhận một hay hai giá trị thích hợp

> **Ví dụ 4** : Cho n là sô nguyên dương hãy tính các tổng số :
> A = $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ...$
> B = $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ...$

Giải

Khai triển $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n x^n$

Cho x = 1 ta được A + B = 2^n

Cho x = - 1 ta đước A – B = 0

Vậy A = B = $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$

> **Ví dụ 5** : Cho n là số nguyên dương chẵn, hãy tính các tổng số :
> A = $C_n^0 + 3.C_n^1 + 3^2 C_n^2 + ... + 3^n C_n^n$
> B = $C_n^0 + 3^2 C_n^2 + 3^4 C_n^4 + ... + 3^n C_n^n$
> C = $2.C_n^1 + 3^3 C_n^3 + 3^5 C_n^5 + ... + 3^{n-1} C_n^{n-1}$

Giải

Khai triển $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n x^n$

Cho x = 3 ta được A = $C_n^0 + 3.C_n^1 + 3^2C_n^2 + ... + 3^nC_n^n$ = 4^n = B + C

Cho x = - 3 ta được $C_n^0 - 3C_n^1 + 3^2C_n^2 - 3^3C_n^3 + 3^4C_n^4 - ... - 3^{n-1}C_n^{n-1} + 3^nC_n^n$ = $(-2)^n$

Do đó B – C = 2^n vì n là số chẵn

Vậy B = $\dfrac{4^n + 2^n}{2}$ và C = $\dfrac{4^n - 2^n}{2}$

Dạng 3 : Rút gọn tổng các số hạng dạng $C_m^hC_n^{k-h}$

với $0 \le h \le m$; $h \le k$; $k - h \le n$ và k không đổi

Ví dụ 6 : Cho $5 \le k \le n$ và n , k $\in$ N ,chứng minh rằng :

$$C_n^k + 5C_n^{k-1} + 10C_n^{k-2} + 10C_n^{k-3} + 5C_n^{k-4} + C_n^{k-5} = C_{n+5}^k$$

Giải

Ta có $(1 + x)^5 = C_5^0 + xC_5^1 + x^2C_5^2 + x^3C_5^3 + x^4C_5^4 + x^5C_5^5$

$= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^kx^k + ... + C_n^nx^n$

Do đó : $(1 + x)^{n+5} = (1 + x)^n .(1 + x)^5$,ta xét số hạng x^k trong khai triển này ở hai vế và cho x = 1 ta được : $C_n^k + 5C_n^{k-1} + 10C_n^{k-2} + 10C_n^{k-3} + 5C_n^{k-4} + C_n^{k-5} = C_{n+5}^k$

C. Bài tập rèn luyện

2.31 Tính hệ số x^8 trong khai triển đa thức $[1 + x^2(1 - x)]^8$

2.32 Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu-ton của

$\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với x > 0

2.33 Với n là số nguyên dương , gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n(x + 2)^n$ .Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$

2.34 Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu-ton của $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$ với n là số nguyên dương , x > 0, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử.

2.35 Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + 2^nC_n^n = 243$

2.36 Chứng minh rằng : $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$ với $4 \le k \le n$

2.37 Chứng minh rằng :

$$C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + \ldots + C_m^mC_n^{k-m} = C_{m+n}^k \quad \text{với } m \le k \le n$$

2.38 Chứng minh đẳng thức :

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + C_{2n}^4 3^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n}+1)$$

2.39 Chứng minh :

$$C_{2006}^0.C_{2006}^{2005} + C_{2006}^1.C_{2005}^{2004} + \ldots + C_{2006}^k.C_{2006-k}^{2005-k} + \ldots + C_{2006}^{2005}.C_1^0 = 1003.2^{2006}$$

2.40 Chứng minh rằng :

$$C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n-2} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} - 2 \quad \text{với } n \ge 2$$

D. Hướng dẫn hay đáp số :

2.31 Trong khai triển nhị thức : $[1 + x^2(1 - x)]^8$ ta thấy x^8 có trong số hạng

$[x^2(1 - x)]^3 = x^6(1 - 3x + 3x^2 - x^3)$ với hệ số là $3C_8^3 = 168$

$[x^2(1 - x)]^4 = x^8(1 - 2x + x^2)^2$ với hệ số là $C_8^4 = 70$

Vậy hệ số của x^8 trong khai triển trên là : 168 + 70 = 238

2.32 Ta biết số hạng thứ k + 1 trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là :

$$a_{k+1} = C_7^k(x^{\frac{1}{3}})^{7-k}.(x^{\frac{-1}{4}})^k = C_7^k.x^{\frac{7-k}{3}-\frac{k}{4}}$$

Do đó a_{k+1} không chứa x trong khai triển khi $\dfrac{7-k}{3} - \dfrac{k}{4} = 0 \Leftrightarrow 28 - 7k = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy số hạng khọng chứa x trong khai triển là $a_5 = C_7^4 = 35$

2.33. Ta có $(x^2 + 1)^n = C_n^0x^{2n} + C_n^1x^{2n-2} + C_n^2x^{2n-4} + \ldots + C_n^n$

và $(x + 2)^n = C_n^0x^n + 2C_n^1x^{n-1} + 2^2C_n^2x^{n-2} + 2^3C_n^3x^{n-3} + \ldots + 2^nC_n^n$

Ta nhận thấy khi n = 1 và n = 2 thì không thỏa điều kiện bài toán.

Với $n \ge 3$ thì $x^{3n-3} = x^{2n}.x^{n-3} = x^{2n-2}.x^{n-1}$

Do đó hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n(x + 2)^n$

là $a_{3n-3} = 2^{2.}C_n^0.C_n^3 + 2C_n^1.C_n^1$. Như vậy :

$$a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow \frac{2n(2n^2 - 3n + 4)}{3} = 26n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = \dfrac{-7}{2} \end{array}\right.$$

Vậy n= 5 vì n là nguyên dương

2.34 Ta có $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3) \Leftrightarrow \dfrac{(n+4)!}{3!(n+1)!} - \dfrac{(n+3)!}{3!n!} = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow$ (n + 4)(n + 2) – (n + 2)(n + 1) = 42 $\Leftrightarrow$ 3(n + 2) = 42

$\Leftrightarrow$ n + 2 = 14 $\Leftrightarrow$ n = 12

Do đó : Trong khai triển nhị thức $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n = \left(x^{-3} + x^{\frac{5}{2}}\right)^{12}$,số hạng thứ k là

$C_{12}^{k}(x^{-3})^{k}.(x^{\frac{5}{2}})^{12-k}$ Vậy số hạng chứa x^8 khi $-3k + \dfrac{5(12-k)}{2} = 8$ hay k = 4

Vậy hệ số của x^8 trong khai triển trên là $C_{12}^{4} = 495$

2.35 Ta có khai triển $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$

Cho x = 2 ta được : $3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 243 = 3^5$

Vậy n = 5

2.36. Ta có : $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

và $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$

Do đó $(1 + x)^{n+4} = (1 + x)^n.(1 + x)^4$,ta xét số hạng x^k trong khai triển này ở hai vế và sau đó cho x = 1 ta được :

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^{k} \text{ với } 4 \le k \le n$$

2.37. Ta có : $(1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \ldots + C_m^m x^m$

và $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$

Do đó : $(1 + x)^m .(1 + x)^n = (1 + x)^{m+n}$, xét hệ số x^k ở hai vế ta được :

$$C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \ldots + C_m^m C_n^{k-m} = C_{m+n}^{k} \quad \text{với } m \le k \le n$$

1.1. Xét hai khai triển nhị thức :

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (1)$$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế với vế ta được :

$$(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n})$$

Thay x = 3 ta có :

$$4^{2n} + (-2)^{2n} = 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n})$$

Vậy : $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + C_{2n}^4 3^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n} + 1)$

1.2. Xét số hạng : $C_{2006}^{k}C_{2006-k}^{2005-k}=\dfrac{2006!}{k!(2006-k)!}.\dfrac{(2006-k)!}{(2005-k)!}=\dfrac{2006.2005!}{k!(2005-k)!}$

$= 2006.C_{2005}^{k}$

Do đó S = $C_{2006}^{0}.C_{2006}^{2005}+C_{2006}^{1}.C_{2005}^{2004}+...+C_{2006}^{k}.C_{2006-k}^{2005-k}+...+C_{2006}^{2005}.C_{1}^{0}$

$= 2006(C_{2005}^{0}+C_{2005}^{1}+...+C_{2005}^{k}+...+C_{2005}^{2005})$

Mà $(1+x)^{2005}=C_{2005}^{0}+C_{2005}^{1}x+...+C_{2005}^{2005}x^{2005}$

Cho x = 1 ta được : $2^{2005}=C_{2005}^{0}+C_{2005}^{1}+...+C_{2005}^{2005}$

Vậy S = $2006.2^{2005} = 1002.2^{2006}$

1.3. Xét khai triển $(1-x)^{2n}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}-...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Thay x = 1 ta được : 0 = $C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}-...+C_{2n}^{2n}$

$\Leftrightarrow C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+...+C_{2n}^{2n-1}$

Vậy $C_{2n}^{2}+C_{2n}^{4}+...+C_{2n}^{2n-2}=C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+...+C_{2n}^{2n-1}-2$ vì $C_{2n}^{0}=C_{2n}^{2n}=1$

E. Câu hỏi trắc nghiệm cuối chương

Câu 1 : Một buổi tiệc có 50 người dự.Khi tan tiệc họ bắt tay nhau thì số các bắt tay là :

a) 100 b) 1235 c) 2450 d) đáp số khác

Câu 2 : Cho tập hợp E = $\{a,b,c,d\}$.Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

a) Tập hợp $\{a,b,c\}$ là một chỉnh hợp 4 chập 3
b) Cặp thứ tự (a,a) là một chỉnh hợp 4 chập 2
c) Bộ 3 thứ tự (a.c.d) là một chỉnh hợp 4 chặp 3
d) Hai chỉnh hợp (a,b,c) và (b,c,a) giống nhau

Câu 3 : Có tất cả bao nhiêu số chẵn có thể thành lập được từ các chữ số 2.4.6.8 biết rằng số đó gồm 3 chữ số khác nhau

a) 24 b) 32 c) 64 d) số khác

Câu 4 :Từ TP.Hồ Chí Minh đến Nha Trang có thể đi bằng ôtô,tàu hỏa,tàu thủy hoặc máy bay.Mỗi ngày có 6 chuyền ôtô, 4 chuyến tàu hỏa,3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay.hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn phương tiện đi từ TP.HCM đến Nha Trang?

a) 144 b) 15 c) 24 d) số khác

Câu 5 : Một người có 5 áo sơ mi khác nhau và 4 quần khác nhau .Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn một bộ đồ (một áo và một quần)

a) 9 bộ b) 10 c) 20 d) số khác

Câu 6 : Có bao nhiêu số gồm 4 chữ số $x=\overline{abcd}$ thỏa ba điều kiện sau :

(1) 4000 < x < 6000
(2) x là bội số của 5
(3) 3 ≤ b < c ≤ 6

a) 12 b) 24 c) 32 d) 64

Câu 7 : Hệ số của x^4 trong khai triển $(2x - 3)^6$ là :

a) 240 b) 480 c) – 2160 d) 2160

Câu 8 : Một bài kiểm tra toán gồm 30 câu .Mỗi câu có 4 phương án trả lời.Hỏi bài kiểm tra đó có bao nhiêu phương án trả lới?

a) 120 b) 80 c) 60 d) số khác

Câu 9 : Giả sử có 12 vận động viên bơi lội tham gia cuộc thi.Nếu không có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả nhất,nhì,ba?

a) 44 b) 132 c) 1320 d) số khác

Câu 10 : Trong mặt phẳng cho 12 điểm mà không có 3 điểm nào thẳng hàng.Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh chọn trong 12 điểm này?

a) 220 b) 208 c) 44 d) số khác

Câu 11 : Trong mặt phẳng cho 12 điểm phân biệt.Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp 12 điểm này?

a) 66 b) 132 c) 24 d) số khác

Câu 12 : Tổng số các hệ số của tất cả các số hạng trong khai triển nhị thức $(2x - 3y)^{20}$ là :

a) 2^{20} b) -1 c) 1 d) số khac

Câu 13 : Có bao nhiêu số lẻ gồm 2 chữ số và nhỏ hơn 80?

a) 40 b) 45 c) 35 c) số khác

Câu 14 : Một lục giác không có một đôi cạnh nào song song cả.Có tất cả bao nhiêu đường thẳng góc kẻ từ một đỉnh đến một cạnh không qua đỉnh đó?

a) 24 b) 25 c) 30 d) 20

Câu 15: Một học sinh viết 6 lá thư gởi cho 6 người bạn.Sau khi bỏ 6 lá thư vào 6 phong bì và dán lại thì học sinh đó mới nhớ là mình quên viết địa chỉ.Nếu bây giờ mới viết địa chỉ thì có bao nhiêu trường hợp trong đó có 3 địa chỉ viết đúng lá thư mình gởi?

a) 30 b) 40 c) 45 d) 50

Câu 16: Cho tập hợp E gồm có 10 phần tử.Có bao nhiêu tập con của E mà số phần tử lớn hơn 6?

a) 172 b) 174 c) 176 d) số khác

Câu 17 : Bất phương trình $\dfrac{A_{n+3}^3}{(n+1)!} < \dfrac{2}{n!}$ có bao nhiêu nghiệm?

a) 1 b) 2 c) 3 d) vô nghiệm

Câu 18 : Cho $C_{12}^{n+3} = C_{12}^{n-1}$ thì số tổ hợp n chập 4 bằng:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 8

Câu 19 : Số hạng không chứa x trong khai triển của nhị thức : $(x^2 + \dfrac{1}{x^3})^{10}$ là :

a) 200 b) 210 c) 220 d) số khác

Câu 20 : Trong khai triển nhị thức :

$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{2n} x^{2n}$ thì tổng các số hạng $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n}$ bằng bao nhiêu?

a) $\frac{3^n+1}{2}$ b) $\frac{2^n+1}{2}$ c) $\frac{3^n}{2}$ d) 3^n

Bảng trả lời :

1b	2c	3a	4a	5c	6b	7d	8a	9c	10a
11b	12c	13c	14a	15b	16c	17d	18b	19b	20a

Hướng dẫn giải:

1b Số bắt tay là : $C_{50}^2 = \frac{50.49}{2} = 1235$

2c Cho tập hợp E = $\{a,b,c,d\}$.Một chỉnh hợp 4 chập 3 là (a,c,d) đúng

3a Có tất cả 4 .3 .2 = 24 số

4a Có 6.2.2.2 = 144 sự lựa chọn

5c Có 20 bộ đồ

6b Xét số $x = \overline{abcd}$.

- Điều kiện (1) 4000 < x < 6000 thì có 2 cách chọn a là a = 4 hay 5
- Điều kiện (2) : x chia hết cho 5 thì có 2 cách chọn d là d = 0 hay 5
- Điều kiện (3) : $3 \leq b < c \leq 6$ thì ta có : nếu b= 3 thì c = 4 , 5 , 6
  nếu b = 4 thì c = 5, 6 và nếu b= 5 thì c= 6

Vậy có tất cả 2.2.6 = 24 số thỏa 3 điều kiện

7d Ta có : $(2x-3)^6 = C_6^0(2x)^6 + C_6^1(2x)^5(-3) + C_6^2(2x)^4(-3)^2 + ... + C_6^6(-3)^6$

Vậy hệ số của x^4 là $2^{2}.(-3)^2.\ C_6^2$ = 16.9.15 = 2160

8a Có 30 . 4 = 120 phương án trả lời

9c Có A_{12}^3 = 12.11.10 = 1320

10a Số tam giác là $C_{12}^3 = \frac{12.11.10}{1.2.3} = 220$

11b Số vectơ là A_{12}^2 = 12.11 = 132

12c Cho x = y = 1 ta được tổng các hệ số là $(-1)^{20} = 1$

13c Số nhỏ hơn 80 có dạng x = $\overline{ab}$

- với a = 1,2,3,4,5,6,7 nên có 7 cách chọn chữ số a
- x là số lẻ nên b = 1,3,5,7,9 .có 5 cách họn chữ số b

Vậy có 2.5 = 35 số lẻ nhỏ hơn 80

14a Lục giác có 6 đỉnh và 4 cạnh không qua một đỉnh cho sẵn.Như vậy ứng với mỗi đỉnh ,có 4 đường thẳng góc .Vậy có tất cả 6.4 = 24 đường thẳng góc

15b Có 3 địa chỉ đúng trong 6 địa chỉ .Do đó có tất cả $C_6^3 = 20$ cách chọn 3 địa chỉ đúng

Ứng với một địa chỉ đúng ,chỉ có 2 địa chỉ viết sai.Ví dụ :

- o Địa chỉ phải viết : 12 3
- o Địa chỉ viết sai : 2 3 1 hoặc 3 1 2

Vậy có tất cả 20.2 = 40 trường hợp có thể xảy ra

16c Tập E gồm có 10 phần tử

- Số tập con của E có 7 phần tử là $C_{10}^7 = C_{10}^3 = \dfrac{10.9.8}{1.2.3} = 120$
- Số tập con của E có 8 phần tử là $C_{10}^8 = C_{10}^2 = 45$
- Số tập con của E có 9 phần tử là $C_{10}^9 = C_{10}^1 = 10$
- Số tập con của E có 10 phần tử là : 1

Vậy số tập con của E có số phần tử lớn hơn 6 là : 120 + 45 + 10 + 1 = 176

17d Ta có : $\dfrac{A_{n+3}^3}{(n+1)!} < \dfrac{2}{n!} \Leftrightarrow \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+1)!} < \dfrac{2}{n!} \Leftrightarrow (n+3)(n+2) < 2$

$\Leftrightarrow n^2 + 5n + 4 < 0 \Leftrightarrow -4 < n < -1$ Mà n là số nguyên dương

Vậy bất phương trình vô nghiệm

18 b Ta có : $C_{12}^{n+3} = C_{12}^{n-1} \Leftrightarrow n + 3 = 12 – (n – 1)$ (theo tính chất của C_n^k)

Vậy n = 5 Do đó số tổ hợp 5 chập 4 bằng số tổ hợp 5 chập 1 là 5

19b Trong khai triển $(x^2 + \dfrac{1}{x^3})^{10}$ thì số hạng thứ k + 1 là :

$C_{10}^k (x^2)^{10-k}.(x^{-3})^k = C_{10}^k x^{20-5k}$. Số hạng không chứa x khi 20 – 5k = 0

Vậy k = 4 .Suy ra hệ số của số hạng không chứa x là $C_{10}^4 = 210$

20a Trong khai triển $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n}$

- Cho x = 1 ta được : $3^n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}$ (1)
- Cho x = -1 ta được : $1^n = a_0 – a_1 + a_2 – a_3 + \ldots + a_{2n}$ (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta được :

$$3^n + 1 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})$$

Vậy $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = \dfrac{3^n + 1}{2}$

II.XÁC SUẤT

§ 1. Biến cố và xác suất của biến cố

A. Tóm tắt giáo khoa

1. Biến cố

a) Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu :
Một phép thử ngẫu nhiên (ký hiệu T) là một thí nghiệm hay một hành động mà có thể lập đi lập lại nhiều lần trong các điều kiện giống nhau, kết quả của nó không dự đoán trước được và có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra.
Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử gọi là không gián mẫu của phép thử, ký hiệu Ω
Ghi chú : Trong bài này ta thường dùng các từ :

- Đồng xu là đồng tiền kim loại có 2 mặt,trên một mặt có ghi giá trị của đồng tiền gọi là mặt ngửa (N) , mặt kia là mặt sấp (S)
- Con súc sắc là một khối lập phương mà 6 mặt lần lượt có 1 , 2 , 3 . . . 6 chấm.Mặt có k chấm gọi là mặt k chấm
- Cỗ bài tú lơ khơ gồm 32 quân bài chia thành 4 chất : cơ , rô (màu đỏ) ,chuồn .bích (màu đen).Mỗi chất có 13 quân bài là : 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A (J đọc là bồi,Q đọc là đầm ,K đọc là già,A đọc là ách hay xì)

Ví dụ : Gieo một con súc sắc là một thí nghiệm ngẫu nhiên
Không gian mẫu là tập hợp $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) Biến cố liên quan đến phép thử
Một biến cố A liên quan tới phép thử T là một tập con Ω_A của không gian mẫu Ω của phép thử đó . Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T thuộc tập Ω_A.Mỗi phần tử của Ω_A được gọi là một kết quả thuận lợi cho A

2. Xác suất của biến cố :
a) Định nghĩa cổ điển : Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hợp hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng.Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả mô tả A thì xác suất của A là một số , ký hiệu là P(A) , được xác định bởi công thức :

$$\boxed{P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}}$$

trong đó $|\Omega_A|$ và $|\Omega|$ lần lượt là số phần tử của tập Ω_A và Ω

- Biến cố chắc chắn (luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T) có xác suất bằng 1 .
- Biến cố không thể (không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T) có xác suất bằng 0

Ví dụ 1 : Gieo một đồng xu thì không gian mẫu là $\Omega = \{N, S\}$.Xác suất để mặt N là $\frac{1}{2}$

Ví dụ 2 : Gieo một con súc sắc thì không gian mẫu là $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Biến cố $A = \{2, 4, 6\}$ (số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn)

Xác suất để mặt xuất hiện là số chẵn bằng : P(A) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 3 : Chọn ngẫu nhiên 2 lá bài trong cỗ bài 52 lá thì số phần tử của không gian mẫu Ω là C_{52}^2 = 1326 (số tổ hợp 52 chập 2)

Biến cố Ω_A được đúng một là xì (ách) (cơ,rô,chuồn,bích) là 2.51

Vậy xác suất của biến cố A là P(A) = $\frac{4.51}{1326} = 0,15$

b) Định nghĩa thống kê của xác suất

- Xét biến cố A liên quan đến phép thử T.Trong N lần thực hiện phép thử T thì số lần xuất hiện biến cố A gọi là tần số của A
- Tỉ số giữa tần số của A với số N gọi là tần suất của A trong N lần thực hiện phép thử T , số này được gọi là xác suất thực nghiệm của A

B.Giải toán

Dạng 1 : Sử dụng công thức $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$

Ví dụ 1 : Gieo một con súc sắc . Tính xác suất để số chấm mặt trên xuất hiện là số lẻ

Giải

Số phần tử của không gian mẫu là 6

Số phần tử của biến cố A (số chấm của mặt trên xuất hiện là số lẻ) là 3

Vậy P(A) = $\frac{3}{6} = 0,5$

Ví dụ 2 : Gieo hai đồng xu cùng một lúc . Tính xác suất để được nhiều nhất một mặt sấp (S).

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{SS, SN, NN, NS\}$ gồm có 4 phần tử

Biến cố được nhiều nhất một mặt S là $A = \{SN, NN, NS\}$

Vậy xác suất $P(A) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Ví dụ 3 : Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 20 . Tính xác suất để số được chọn là số nguyên tố .

Giải
Có 19 cách chọn một số nguyên dương nhỏ hơn 20
Có 7 số nguyên tố nhỏ hơn 20 là : 3,5,7,11,13,17,19
Vậy xác suất để số được chọn là số nguyên tố là P(A) = $\frac{7}{19} = 0{,}37$

Ví dụ 4 : Danh sách lớp học được đáng số thứ tự từ 1 đến 32.Bạn Huy có thứ tự 20.
a) Giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp trả bài.Tính xác suất để Huy được chọn
b) Giáo viên chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trả bài.Tính xác suất để 5 học sinh này có số thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của Huy

Giải
a) Chọn một học sinh trong 35 học sinh thì có 35 cách chọn
Chọn học sinh tên Huy chỉ có một cách chọn
Vậy xác suất Huy được chọn là P = $\frac{1}{35} = 0{,}028$
b) Chọn 5 học sinh trong 35 học sinh thì có $C_{35}^{5} = \frac{35.34.33.32.31}{1.2.3.4.5}$ =324632 cách chọn
Chọn 5 học sinh trong 19 học sinh có số thứ tự nhỏ hơn 20 thì có :
$C_{19}^{5} = \frac{19.18.17.16.15}{1.2.3.4.5} = 7752$
Vậy xác suất để chọn 5 học sinh có số thứ tự nhỏ hơn Huy là :
$P = \frac{7752}{324632} = 0{,}024$

Ví dụ 5 : Chọn ngẫu nhiên một viên bi trong bình đựng 6 bi đen và 4 bi trắng. Tính xác suất để được một bi trắng

Giải
Chọn một viên bi trong bình đựng 10 bi thì có 10 cách chọn
Có 4 cách chọn 1 bi trắng trong 4 bi trắng

Vậy các suất để được một bi trắng là : P = $\frac{4}{10}$ = 0,40

Ví dụ 6 : Chọn ngẫu nhiên 13 quân bài trong cỗ bài 52 lá.Tính xác suất để được 5 lá chuồn, 4 lá cơ , 3 lá rô và 1 lá bích

Giải

- Có C_{52}^{13} cách chọn 13 lá bài trong cỗ bài 52 lá
- Có C_{13}^{5} cách chọn 5 lá chuồn trong 13 lá chuồn
- Có C_{13}^{4} cách chọn 4 lá cơ trong 13 lá cơ
- Có C_{13}^{3} cách chọn 3 lá rô trong 13 lá rô
- Có C_{13}^{1} cách chọn 1 lá bích trong 13 lá bích

Vậy xác suất phải tìm là $P = \frac{C_{13}^{5}.C_{13}^{4}.C_{13}^{3}.C_{13}^{1}}{C_{52}^{13}}$ = 0,005

Ví dụ 7 : Gieo 3 con súc sắc cùng một lúc .Tính xác suất để được tổng số chấm các mặt trên xuất hiện bằng 6

Giải

Số phần tử của không gian mẫu là 6.6.6 = 216

Tổng số chấm các mặt trên xuất hiện bằng 6 là :

(1,1,4) (1,2,3) (1,3,2) (1,4,1) (2,1,3) (2,2,2) (2,3,1) (3,1,2) (3,2,1) (4,1,1)

Vậy xác suất phải tìm là : $P = \frac{10}{216}$ = 0,04

Dạng 2 :Tính xác suất theo tần suất

Ví dụ 1 : Gieo 2 đồng xu 20 lần và thu được kết quảsau :

Biến cố	Tần số xuất hiện
A là $\{N, N\}$	3
B là $\{S, N\}$	5
C là $\{N, S\}$	7
D là $\{S, S\}$	5

Tính xác suất P(A) , P(B) , P(C) , P(D)

Giải

Theo định nghĩa P(A) là tần suất của A .Vậy P(A) $= \frac{3}{20} = 0,15$

P(B) $= \frac{5}{20} = 0,25$ P(C) $= \frac{7}{20} = 0,35$ và P(D) $= \frac{5}{20} = 0,25$

Ví dụ 2 : Gieo con súc sắc 30 lần ta được kết quả như sau :

Số chấm xuất hiện	Tần số
A là số 1	4
B là số 2	6
C là số 3	5
D là số 4	7
E là số 5	5
F là số 6	3

Tính xác suất của các biến cố A,B,C,D,E,F

Giải

Theo định nghĩa ta có : P(A) $= \frac{4}{30} = 0,13$ P(B) $= \frac{6}{30} = 0,2$

P(C) $= \frac{5}{30} = 0,16$ P(D) $= \frac{7}{30} = 0,23$ P(E) = 0,16 P(F) $= \frac{3}{30} = 0,10$

C.Bài tập rèn luyện

2..41 Chọn ngẫu nhiên 3 số trong 50 số tự nhiên 1,2,3, . . . ,50

a) Tính xác suất của biến cố A : trong 3 số đó có và chỉ có 2 bội số của 5

b) Tính xác suất của biến cố B : trong 3 số đó có ít nhất một số chính phương

2..42 Gieo 3 đồng xu cùng một lúc.Tính xác suất để có :

a) hai đồng lật ngửa

b) có ít nhất một đồng lật ngửa

2..43 Gieo 2 con súc sắc cùng một lúc

Tính xác suất của biến cố A : được 2 số chấm xuất hiện khác nhau

Tính xác suất của biến cố B : được tổng số chấm xuất hiện bằng 7

2..44. Một người viết 10 lá thơ và ghi địa chỉ gởi cho các người bạn trên 10 phong bì . Sau đó người ấy bỏ ngẫu nhiên 10 lá thơ trong 10 phong bì.
Tính xác suất để mỗi người bạn đều nhận được là thơ đúng của mình

2.45. Một cuộc xổ số tombola có 100 vé và 10 vé trúng .Chọn ngẫu nhiên 3 vé .

a) Tính xác suất để được đúng một vé trúng
b) Tính xác suất để được ít nhất một vé trúng

2.46. Một bình đựng 5 bi trắng,6 bi đen và 4 bi đỏ.Lấy ngẫu nhiên 3 bi.
a) Tính xác suất để được 3 bi cùng màu
b) Tính xác suất để được 3 bi khác màu

2.47. Một giáo viên phát ngẫu nhiên 10 bài kiểm tra toán cho 10 học sinh

Tính xác suất để mỗi học sinh nhận đúng bài kiểm tra của mình

2..48. Chọn ngẫu nhiên 3 lá bài trong cổ bài 52 lá
a) Tính xác suất để được 3 lá hình
b) Tính xác suất 3 lá xì

D. Hướng dẫn giải hay đáp số
2.41. a) Ta có C_{50}^{3} cách chọn 3 số trong 50 số tự nhiên
Trong các số tự nhiên từ 1 đến 50 có 10 bội số của 5 ,do đó có C_{10}^{2} cách chọn 2 bội số của 2.
Có 40 cách chọn một số không phải bội số của 5
Vậy P(A) = $\dfrac{40.C_{10}^{2}}{C_{50}^{3}}$
b) Trong các số tự nhiên từ 1 đến 50 có 7 số chính phương
Do đó có C_{43}^{3} cách chọn 3 số không có số chính phương
Vậy số cách chọn 3 số trong đó có ít nhất một số chính phương là $C_{50}^{3} - C_{43}^{3}$
Vậy P(B) = $\dfrac{C_{50}^{3} - C_{43}^{3}}{C_{50}^{3}} = 1 - \dfrac{C_{43}^{3}}{C_{50}^{3}}$
1.1 . Gieo 3 đồng xu cùng một lúc thì không gian mẫu gồm 8 phần tử
$\Omega = \{NNN, NNS, NSN, SNN, NSS, SNS, SSN, SSS\}$
a) Biến cố A 2 đồng xu lật ngửa $A = \{NNS, NSN, SNN\}$ có 3 phần tử
Vậy P(A) = $\dfrac{3}{8}$
b) Biến cố B có ít nhất một đồng xu lật ngửa có 7 phần tử
Vậy P(B) = $\dfrac{7}{8}$
1.2 . Gieo 2 con xúc sắc cùng một lúc thì không gian mẫu gồm 6×6 = 36 phần tử .
Biến cố A: được 2 số chấm xuất hiện khác nhau có 30 phần tử

Vậy P(A) = $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$

Biến cố B được tổng số chấm xuất hiện bằng 7

B = $\{(1,6),(2,5),(3,4),(6,1),(5,2),(4,3)\}$

Vậy P(B) = $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

1.3 . Bỏ ngẫu nhiên 100 lá thơ vào 10 phong bì thì có 10! cách bỏ. Chỉ có một trường hợp mỗi người nhận đúng lá thơ của mình Vậy P = $\frac{1}{10!}$

1.4 . Số cách chọn 3 vé trong 100 vé là C_{100}^3

Biến cố A được 1 vé trúng và 2 vé không trúng là $C_{10}^1.C_{90}^2$

Vậy P(A) = $\frac{C_{10}^1.C_{90}^2}{C_{100}^3}$

Biến cố được 3 vé không trúng là C_{90}^3.Do đó biến cố B được ít nhất một vé trúng là $C_{100}^3 - C_{90}^3$ .Vậy P(B) = 1 - $\frac{C_{90}^3}{C_{100}^3}$

2.46. Lấy nhẫu nhiên 3 bi trong bình đựng 15 bi thì không gian mẫu gồm C_{15}^3 phần tử

Biến cố A được 3 bi cùng màu gồm có $C_5^3+C_6^3+C_4^3$ phần tử

Vậy P(A) = $\frac{C_5^3+C_6^3+C_4^3}{C_{15}^3}$

Biến cố B được 3 bi khác màu có $5\times6\times4$ = 120

Vậy P(B) = $\frac{120}{C_{15}^3}$

2.47.. Giáo viên phát ngẫu nhiên 10 bài kiểm tra cho 10 học sinh thì không gian mẫu có 10! phần tử

Xác suất để mỗi học sinh nhận được đúng bài của mình là $P_1=\frac{1}{10!}$

1.0. Chọn 3 lá bài trong cổ bài 52 lá thì số cách chọn là C_{52}^3

a) Cổ bài có 12 lá hình nên số cách chọn 3 lá hình là C_{12}^3

Vậy xác suất để được 3 lá hình là $P=\frac{C_{12}^3}{C_{52}^3}$

b) Cổ bài có 4 lá xì nên số cách chọn được 3 lá xì là C_4^3

Vậy xác suất được 3 lá xì là P' $=\dfrac{C_4^3}{C_{52}^3}$

§2. Các quy tắc tính xác suất

A. Tóm tắt giáo khoa

1. Quy tắc cộng xác suất

a) Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến phép thử T.Nếu biến cố A hoặc biến cố B xảy ra ", kí hiệu là $A\cup B$,được gọi là hợp của hai biến
A và B.Nếu kí hiệu Ω_A và Ω_B lần lượt là các tập hợp mô tả A và B thì tập hợp mô tả biến cố $A\cup B$ là $\Omega_A\cup\Omega_B$

Một cách tổng quát : Cho k biến cố A_1 , A_2 , . . . , A_k cùng liên quan đến phép thử T. Biến cố " có ít nhất một trong các biến cố A_1 , A_2 , . . . , A_kxảy ra " ,kí hiệu là $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k$, được gọi là hợp của k biến cố đó

b) Biến cố xung khắc

Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến phép thử T.Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia
không xảy ra   Hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc nếu và chỉ nếu
$\boxed{\Omega_A\cap\Omega_B=\varnothing}$

c) Quy tắc cộng xác suất

Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là
$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$ (1)

Một cách tổng quát : Cho k biến cố A_1 , A_2 , . . . , A_k đôi một xung khắc
thì ta có : $P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)$ (2)

d) Biến cố đối

Cho biến cố A thì biến cố " Không xảy ra A " ,ký hiệu là $\overline{A}$,được gọi là biến cố đối của A

Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ là : $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$ (3)

2. Quy tắc nhân xác suất

a) Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T .Biến cố " Cả A và B cùng xảy ra" , ký hiệu là A.B ,được gọi là giao của hai biến cố A và B
Nếu Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho AB là $\Omega_A\cap\Omega_B$.

Một cách tổng quát : : Cho k biến cố A_1 , A_2 , . . . , A_k cùng liên quan đến phép thử T . Biến cố " tất cả k biến cố A_1 , A_2 , . . . , A_k đều xảy ra " , ký hiệu là $A_1A_2 . . . A_k$, được gọi là giao của k biến cố đó

b) Biến cố độc lập :

Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T.Hai biến cố này được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

c) Quy tắc nhân xác suất

Cho hai biến cố A và B độc lập với nhau thì ta có :

$$\boxed{P(AB) = P(A).P(B)}$$

Một cách tổng quát : : Cho k biến cố A_1 , A_2 , . . . , A_k độc lập với nhau thì ta có $P(A_1A_2. . . A_k) = P(A_1).P(A_2). . . . P(A_k)$

B. Giải toán

Dạng 1 :Nhận biết biến cố hợp,biến cố xung khắc,biến cố đối,biến cố giao,biến cố độc lập

Ví dụ 1 : Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp 11 D trường LHP.Gọi A là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Văn " và B là biến cố " Bạn đó là học sinh giỏi ngoại ngữ Anh Văn "

a) A và B có phải là hai biến cố xung khắc hay không?
b) Biến cố $A \cup B$ là gì ?

Giải

a) A và B là 2 biến cố không xung khắc vì một học sinh có thể vừa giỏi Văn hoặc vừa giỏi Anh Văn
b) Biến cố $A \cup B$ là " Bạn đó là học sinh giỏi Văn hoặc giỏi Anh Văn"

Ví dụ 2 : Môt hộp đựng 2 bi xanh, 3 bi đỏ và 4 bi vàng.Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi . Gọi A là biến cố "Chọn được 2 bi xanh" , B là biến cố " Chọn được 2 bi đỏ và C là biến cố " Chọn được 2 bi vàng"

a) Các biến cố A,B,C có đôi một xung khắc không?
b) Biến cố " Chọn được 2 viên bi cùng màu là?
c) Hai biến cố E " chọn được 2 bi cùng màu " và F " chọn được 2 bi khác màu là 2 biến cố gì?

Giải

a) Các biến cố A,B,C đôi một xung khắc
b) Biến cố $A \cup B \cup C$ là " chọn được 2 viên bi cùng màu
c) Hai biến cố E và F là 2 biến cố đối vì nếu E xảy ra thì F không xảy ra

Ví dụ 3 : Gieo một con súc sắc liên tiếp hai lần .Gọi A là biến cố "lần gieo thứ nhất được số chẵn",B là biến cố "lần gieo thứ hai được số lẻ" .

a) Hai biến cố A và B độc lập không?
b) Giao của hai biến cố A và B là biến cố gì?

Giải

a) Hai biến cố A và B độc lập vì việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố B
b) Giao của hai biến cố AB là biến cố " lần gieo thứ nhất được số chẵn và lần gieo thứ hai được số lẻ"

Dạng 2 : Dùng quy tắc cộng xác suất $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

với A và B là hai biến cố xung khắc

Ví dụ 4 : Một lớp học 40 học sinh gồm có 15 học sinh nam giỏi toán và 8 học sinh nữ giỏi.Chọn ngẫu nhiên một học sinh.Hãy tính xác suất để chọn được một nam sinh giỏi toán hay một nữ sinh giỏi lý

Giải

Gọi A là biến cố chọn một nam sinh giỏi toán và B là biến cố chọn một nữ sinh giỏi lý thì $A\cup B$ là biến cố chọn một nam sinh giỏi toán hay một nữ sinh giỏi lý.

Ta có P(A) = $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$ và P(B) = $\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$

A và B là hai biến cố xung khắc nên $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{5}=\frac{23}{40}$

Ví dụ 5 : Chọn ngẫu nhiên 8 lá bài trong cổ bài 32 lá.Tính xác suất để được ít nhất 3 lá già

Giải

Gọi A là biến cố chọn được 3 lá già và B là biến cố chọn được 4 lá già thì $A\cup B$ là biến cố chọn được ít nhất 3 lá già

Ta có : P(A) = $\frac{C_4^3.C_{28}^5}{C_{32}^8}$ và P(B) = $\frac{C_4^4.C_{28}^4}{C_{32}^8}$

A và B là hai biến cố xung khắc .

Vậy $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{C_4^3.C_{28}^5+C_4^4.C_{28}^4}{C_{32}^8}=0,04$

Ví dụ 6 : Gieo một con xúc sắc .Gọi A là biến cố được số chẵn và B là biến cố được một bội số của 2.Kiểm lại rằng :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Giải

Ta có A = $\{2,4,6\}$, B = $\{3,6\}$ .Do đó $A \cup B = \{2,3,4,6\}$ và $AB = \{6\}$

Vậy P(A) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, P(B) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ và $P(AB) = \frac{1}{6}$

Suy ra : P(A) + P(B) – P(AB) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{2}{3} = P(A \cup B)$

Một cách tổng quát : A và B là hai biến cố bất kỳ thì ta có :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Ví dụ 7 : Một lớp học gồm 40 học sinh trong đó có : 15 học sinh giỏi toán , 10 học sinh giỏi Lý và 5 học sinh giỏi Toán lẫn Lý.Chọn ngẫu nhiên một học sinh.Hãy tính xác suất để học sinh đó giỏi toán hay giỏi lý

Giải

A là biến cố học sinh giỏi toán

B là biến cố học sinh giỏi lý

Ta có : AB là biến cố học sinh giỏi toán và lý

$A \cup B$ là biến cố học sinh giỏi toán hay lý

Ta có : P(A) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$; P(B) = $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$; $P(AB) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

Vậy $P(A \cup B)$ = P(A) + P(B) – P(AB) = $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 8 : Xét không gian mẫu E và hai biến cố xung khắc A và B biết xác suất P(A) = 0,3 và P(B) = 0,5 . Tính P(AB) ; $P(A \cup B)$; P($\overline{A}$) ; P($\overline{B}$)

Giải

A và B là hai biến cố xung khắc nên P(AB) = 0 và $P(A \cup B)$ = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,5 = 0,8

- $\overline{A}$ là biến cố đối của A nên P($\overline{A}$) = 1 – P(A) = 1 – 0,3 = 0,7
- $\overline{B}$ là biến cố đối của B nên P($\overline{B}$) = 1 – P(B) = 1 – 0,5 = 0,5

Ví dụ 9 : Cho hai biến cố bất kỳ A và B .Chứng minh rằng :

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

Giải

Ta có : $A = (AB) \cup (A\overline{B})$ vì sự xảy ra của A là kết quả của sự xảy ra (của A và của B) hay (sự xảy ra của A và không xảy ra của B)

Mà AB và A$\overline{B}$ là hai biến cố xung khắc

Vậy P(A) = P(AB) + P(A$\overline{B}$)

Dạng 3 : Dùng qui tắc nhân xác suất P(AB) = P(A).P(B)

AB là biến cố cả A và B cùng xảy ra

A và B độc lập với nhau.

Ví dụ 10 : Chọn ngẫu nhiên một lá bài trong cổ bài 32 lá,ghi nhận kết quả rồi trả lại lá bài trong cổ bài và rút một lá bài khác.Tính xác suất để được già bích và già cơ

Giải

Gọi A là biến cố " chọn là bài thứ nhứt là già bích"

B là biến cồ " chọn được lá bài thứ hai là già cơ '

Ta tìm P(AB)

Ta biết A và B là hai biến cố độc lập vì ta trả lại lá bài thứ nhứt trước khi rút lá bài thứ hai. Do đó P(AB) = P(A).P(B)

mà P(A) = $\frac{1}{32}$ và P(B) = $\frac{1}{32}$

Vậy P(AB) = $\frac{1}{32}.\frac{1}{32} = 0{,}09.10^{-2}$

Ví dụ 11 : Một công nhân phải theo dõi hoạt động của hai máy dệt A và B. Xác suất để người công nhân phải can thiệp máy dệt A trong một giờ là 1/7 và máy dệt B trong cùng thời gian trên là 1/2.Tính xác suất để người công nhân không phải can thiệp máy nào trong một giờ

Giải

Xác suất để máy dệt A hư độc lập với xác suất để máy dệt B hư

Ta có P($\overline{A}$) = 1 – P(A) = 1 – 1/7 = 6/7 với $\overline{A}$ là biến cố máy dệt A không hư

và P($\overline{B}$) = 1 – 1/5 = 4/5 với $\overline{B}$ là biến cố máy dệt B không hư

Vậy xác suất để người công nhân không phải can thiệp máy nào trong một giớ là

P($\overline{A}.\overline{B}$) = $\frac{6}{7}.\frac{4}{5} = \frac{24}{35} = 0,69$

Ví dụ 12 : Xác suất để người xạ thủ bắn trúng bia là 0,2.Tính xác suất để trong 3 lần bắn người xạ thủ bắn trúng bia một lần

Giải

A là biến cố người xạ thủ bắn trúng bia

$\overline{A}$ là biến cố người xạ thủ không bắn trúng bia

Ta có P(A) = 0,4 và P($\overline{A}$) = 1 – 0,4 = 0,6

Xác suất để người xạ thủ bắn trúng bia lần 1 vàkhông trúng hai lần sau là

$P_1 = 0,4\times0,6\times0,6 = 0,14$

Tương tự xạ thủ bắn trúng lần 2 ,lần 1 và lần 3 không trúng là $P_2 = P_3 = P_1$

Vậy xác suất để trong 3 lần bắn người xạ thủ bắn trúng một lần là

$P = 0,14 + 0,14 + 0,14 = 0,42$

C.Bài tập rèn luyện

2..49. Gieo môt đồng xu 2 lần liên tiếp.Tính xác suất để có một lần lật ngửa.

2..50. Gieo 3 đồng xu cân đối.Gọi A là biến cố có ít nhất một đồng xu lật ngửa và B là biến cố có đúng 2 đồng xu lật ngửa .

a) Tính xác suất để có ít nhất một đồng xu ngửa

b) Tính P($A\cap B$) và P(B/A)

2..51. Cho P(A) = 2/5 ; P(B) = 5/12 và P(AB) = 1/6 .Hỏi 2 biến cố A và B có :

a) Xung khắc hay không?

b) Độc lập với nhau hay không?

2..52. Gieo hai con súc sắc cân đối.Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 10

2..53. Một bình đựng 3 bi đỏ , 4 bi trắng và 5 bi xanh.Lấy ngẫu nhiên 2 bi.Tính xác suất của các biến cố sau :

A: Lấy được bi đỏ

B : lấy được bi trắng

C : lấy được bi xanh

2.54. Cho hai biến cố A và B biết P(A) = 0,3 ; P(B) = 0,5 và P($A\cap B$) = 0,1

Tính P($A\cup B$) , P($\overline{A}$) , P($\overline{B}$) , P($\overline{A\cap B}$) , P($\overline{A\cup B}$)

2.55 Chọn ngẫu nhiên một lá bài trong cổ bài 32 lá , trả lá bài trong cổ bài và rút lá bài khác .

a) Tính xác suất để hai lá bài rút được là lá già và lá đầm

b) Tính xác suất trong hai lá bài rút được không có lá cơ

2..56. Một bình đựng 2 bi xanh và 4 bi đỏ.Lần lượt lấy một bi liên tiếp 3 lần và mỗi lần trả lại bi đã lấy vào bình.

a) Tính xác suất để được 3 bi xanh

b) Tính xác suất để được 3 bi đỏ

c) Tính xác suất để được 3 bi không cùng một màu

2..57. Trong một nhà máy có 3 máy dệt .Trong một ngày, xác suất để máy thứ nhất bị sự cố là 0,05 , xác suất để máy thứ hai bị sự cố là 0,10 và xác suất để máy thứ ba bị sự cố là 0,15 . Tính xác suất để trong một ngày này :

a) chỉ có một máy bị sự cố

b) chỉ có hai máy bị sự cố

c) không có máy nào bị sự cố

2..58. Bình U_1 đựng 3 bi đỏ và 7 bi đen và bình U_2 4 bi đỏ và 6 bi đen
Lấy ngẫu nhiên 2 bi của U_1 và 1 bi của U_2
Gọi A là biến cố được 3 bi đỏ , B là biến cố được 3 bi mà tất cả không cùng màu và C là biến cố được bi đỏ lấy từ bình U_2

a) Tính P(A)

b) Tính xác suất để được 3 bi cùng màu

c) Tính P(C/B)

2.59. Một bình đựng 5 bi trắng và 4 bi đỏ.Ta lần lượt lấy một bi 3 lần liên tiếp theo luật : nếu bi lấy được là đỏ thì trả lại bi này vào bình còn nếu lấy được bi trắng thì không trả lại bi này vào bình.Gọi E_k ($1 \le k \le 3$) là biến cố chỉ được bi trắng trong lần lấy thứ k .

a) Tính xác suất của E_1

b) Tính xác suất của E_2 và E_3 .Suy ra xác suất lấy được chỉ một bi trắng trong 3 lần lấy

c) Biết rằng ta lấy được đúng một bi trắng, tính xác suất để bi trắng này lấy được trong lần lấy thứ 3

2.60. Một lớp học có 30 học sinh trong đó có 10 nữ sinh.Giáo viên hỏi bài một cách ngẫu nhiên 3 học sinh

a) Tính xác suất biến cố A : chỉ có 2 trong 3 học sinh được hỏi bài có đúng 2 nam sinh

b) Tính xác suất biến cố B : 3 học sinh được hỏi bài cùng giới tính

c) Tính xác suất biến cố C : có nhiều hơn một nữ sinh trong 3 học sinh được hỏi bài

D. Hướng dẫn giải hay đáp số

2.49 Gọi A là biến cố được lần thứ nhất ngửa

B là biến cố lần 2 ngửa

A và B là hai biến cố độc lập.

$A\overline{B}$ là biến cố lần 1 ngửa và lần 2 sấp

$\overline{A}B$ là biến cố lần 1 sấp và lần 2 ngửa

Xác suất để một lần lật ngửa là P = P(A) × P($\overline{B}$) + P($\overline{A}$)×P(B)

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 0.5$$

2.50. Gieo 3 đồng xu thì không gian mẫu là

E = $\{NNN, NNS, NSN, SNN, NSS, SNS, SSN, SSS\}$

a) Xác suất để ít nhất một đồng xu lật ngửa là P(A) = $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

b) Ta có P(B) = $\frac{3}{8}$.

A và B là hai biến cố độc lập nên P($A\cap B$) = P(A).P(B) = $\frac{7}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{21}{64}$

Ta có P(B/A) = $\dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{\frac{21}{64}}{\frac{7}{8}} = \dfrac{3}{8}$

2.51 a) Vì P(AB) = $\frac{1}{6}\neq 0$ nên A và B không xung khắc\

b) Ta có P(A) × P(B) = $\frac{2}{5}\times\frac{5}{12}=\frac{1}{6} = P(AB)$

Vậy A và B là 2 biến cố độc lập

2.52. Gieo hai con súc sắc thì không gian mẫu gồm 36 phần tử . Các trường hợp tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 10 là (4,6) ; (6,4) ; (5,5) .Vậy P(A) = $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

2.53. P(A) = $\frac{3}{12}$ P(B) = $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ P(C) = $\frac{5}{12}$

2.54. Ta có P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(AB) = 0,3 + 0,5 – 0,1 = 0,7

Ta có : P($\overline{A}$) = 1 – P(A) = 1 – 0,3 = 0,7

P($\overline{B}$) = 1 – P(B) = 1 – 0,5 = 0,5

P($\overline{AB}$) = 1 - P(AB) = 1 – 0,1 = 0,9

P($\overline{A\cup B}$) = 1 - P(A ∪ B) = 1 – 0,7 = 0,3

2.55. Trong cổ bài 32 lá có 4 lá già và 4 lá đầm .

Gọi A là biến cố được lá già và B là biến cố được giá đầm

Rút là bài thứ nhất và trả lại vào cổ bài rồi rút lá thứ hai nên hai biến cố A và B độc lập

a) P(AB) = P(A) × P(B) = $\frac{C_4^1}{C_{32}^1} \times \frac{C_4^1}{C_{32}^1} = \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} = \frac{1}{64}$

b) Trong cổ bài 32 lá có 8 lá cơ .Do đó xác suất rút được 2 lá cơ là

$$\frac{8}{32} \times \frac{8}{32} = \frac{1}{16}$$

Vậy xác suất để 2 lá bài rút được không có lá cơ là P = 1 - $\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

1.1 a) P(A) = $\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{27}$

b) P(B) = $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$

c) Xác suất được 3 bi cùng màu là P(A ∪ B) = P(A) + P(B) = $\frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{1}{3}$

Vậy P(C) = 1 - $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

1.2 Các biến cồ độc lập và không xung khắc.

a) Xác suất để một và chỉ một máy bị sự cố là

$P_1 = 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}15 - 2(0{,}05 \times 0{,}10 + 0{,}05 \times 0{,}15 + 0{,}10 \times 0{,}15) + 3(0{,}05 \times 0{,}10 \times 0{,}15) = 0{,}25$

b) Xác suất để chỉ có hai máy bị sự cố là :

$P_2 = 0{,}05 \times 0{,}10 + 0{,}05 \times 0{,}15 + 0{,}10 \times 0{,}15 - 3(0{,}05 \times 0{,}10 \times 0{,}15) = 0{,}025$

c) Xác suất để không có máy nào bị sự cố là

$P_3 = 0{,}95 \times 0{,}90 \times 0{,}85 = 0{,}727$

1.3 . a) Lấy 2 bi từ bình U_1 đựng 10 bi (3 đỏ và 7 đen) và 1 bi từ bình U_2 đựng 10 bi(4 đỏ và 6 đen)

Gọi A là biến cố lấy được 3 bi đỏ.Biến cố A chỉ xảy ra khi ta lấy được 2 bi đỏ bình U_1 và 1 bi đỏ từ bình U_2

Xác suất lấy được 2 bi đỏ từ bình U_1 là : $\frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$

Xác suất lấy được 1 bi đỏ từ bình U_2 là : $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Vậy P(A) = $\frac{1}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{75}$

b) Gọi E là biến cố lấy được 3 bi cùng màu .Biến cố E xảy ra khi ta lấy được 3 bi đỏ hay 3 bi đen

Xác suất lấy được 2 bi đen trong bình U_1 là $\frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

Xác suất lấu được 1 bi đen trong bình U_2 là $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Do đó xác suất lấy được 3 bi đen là $\frac{7}{15} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{25}$

Hai biến cố lấy được 3 bi đỏ và 3 bi đen là hai biến cố xung khắc. Vậy xác suất lấy được 3 bi cùng màu là P(E) = $\frac{2}{75} + \frac{7}{25} = \frac{23}{75}$

B là biến cố được 3 bi không cùng màu , B là biến cố đối của E

Vậy P(B) = 1 – P(E) = $1 - \frac{23}{75} = \frac{52}{75}$

c) C là biến cố được bi đỏ lấy từ bình U_2

Ta có BC là biến cố lấy 3 bi không cùng màu và bi lấy từ U_2 có màu đỏ.

Biến cố BC xảy ra khi :

- lấy được 2 bi đen trong bình U_1 và 1 bi đỏ trong bình U_2 : $\frac{7}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{75}$
- lấy được 1 bi đỏ và 1 bi đen trong bình U_1 và 1 bi đỏ trong bình U_2 : $\frac{7}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{75}$

Hai biến cố này xung khắc nên

$$P(BC) = \frac{14}{75} + \frac{14}{75} = \frac{28}{75}$$

Ta suy ra $P(C/B) = \dfrac{P(BC)}{P(B)} = \dfrac{\frac{28}{75}}{\frac{52}{75}} = \dfrac{7}{13}$

1.4 a) E_1 là biến cố chỉ lấy được bi trắng trong lần lấy thứ 1 ,do đó lần lấy thứ hai và thứ ba là bi đỏ

Vậy $P(E_1) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{8} = \frac{5}{36}$

b) E_2 là biến cố chỉ lấy được bi trắng trong lần lấy thứ 2,do đó lần lấy thứ 1 và lần lấy thứ 3 là bi đỏ

Vậy $P(E_2) = \frac{4}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8} = \frac{10}{81}$

E_3 là biến cố chỉ lấy được bi trắng lần thứ 3 ,do đó lần lấy thứ 1 và thứ 2 là bi đỏ

Vậy $P(E_3) = \frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{9} = \frac{100}{729}$

Gọi F là biến cố chỉ lấy được một bi trắng trong 3 lần lấy thì

$F = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ với E_1 , E_2 , E_3 là 3 biến cố đôi một xung khắc

Vậy $P(F) = P(E_2) + P(E_2) + P(E_3) =$

$$\frac{5}{36} + \frac{10}{81} + \frac{100}{729} = \frac{1165}{2916}$$

c) Gọi G là xác suất lấy được bi trắng trong lần lấy thứ 3 biết rằng lấy được đúng một bi trắng trong 3 lần lấy

Gọi R_1 là biến cố lấy được bi đỏ lần 1, R_2 là biến cố lấy được bi đỏ lần 2 , B_3 là biến cố lấy được bi trắng lần 3

Ta có $P(G) = \dfrac{P(R_1R_2B_3)}{P(F)} = \dfrac{64}{233}$

1.5 a) $P(A) = \dfrac{C_{20}^2 \times C_{10}^1}{C_{30}^3} = \dfrac{190\times 10}{4060} = \dfrac{95}{203}$

b) $P(B) = \dfrac{C_{20}^3}{C_{30}^3} + \dfrac{C_{10}^3}{C_{30}^3} = \dfrac{57}{203} + \dfrac{6}{203} = \dfrac{9}{29}$

c) $P(C) = \dfrac{57}{203} + \dfrac{95}{203} = \dfrac{152}{203}$

§3. Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
§4 . Kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc

A.Tóm tắt giáo khoa

2. Khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc
   Đại lượng X được gọi là một biến ngẫu nhiên rời rạc nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hợp hữu hạn nào đó,và giá trị ấy là ngẫu nhiên,không dự đoán trước được
3. Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
   Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.Để hiểu rõ hơn về X ta thường quan tâm đến xác suất để X nhận giá trị x_k tức là các số $P(X= x_k) = p_k$ với k = 1,2, . . . , n
   Các thông tin về X được trình bày dưới dạng bảng sau đây gọi là bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X

X	x_1	x_2	. . .	x_n
P	p_1	p_2	. . . .	p_n

   Chú ý ta có $p_1 + p_2 + . . . + p_n = 1$

4. Kỳ vọng
   Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.Kì vọng của X, ký hiệu là E(X) ,là một số được tính theo công thức
   $$\boxed{E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + . . . + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$
   với $p_i = P(X = x_i)$, (i = 1, 2 , . . . , n)
   Ý nghĩa : E(X) là một con số cho ta một ý niệm về độ lớn trung bình của X.Do đó kì vọng E(X) còn được gọi là giá trị trung bình của X
   Nhận xét : Kì vọng của X không nhất thiết thuộc tập các giá trị của X
5. Phương sai và độ lệch chuẩn
   a) Phương sai :
      Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạcvới tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
      Phương sai của X , kí hiệu là D(X) , là một số được tính theo công thức
      $$\boxed{\begin{aligned}D(X) &= (x_1-\mu)^2 p_1 + (x_2-\mu)^2 p_2 + ... + (x_n-\mu)^2 p_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 p_i\end{aligned}}$$
      với $p_i = P(X = x_i)$ (i = 1,2, . . . , n) và μ = E(X)

Ý nghĩa : Phương sai là một số không âm,cho ta ý niệm về mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình .Phương sai càng lớn thì độ phân tán này càng lớn

b) Độ lệch chuẩn

Căn số học bậc hai của phương sai,kí hiệu là $\sigma(X)$, được gọi là độ lệch chuẩn của X.Ta có : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$

B. Giải toán

Ví dụ 1 : Gieo đồng xu 5 lần liên tiếp.Ký hiệu X là số lần xuất hiện mặt sấp. Đại lượng X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không? vì sao?

Giải

- Giá trị X $\in \{0,1,2,3,4,5\}$
- Giá trị X là ngẫu nhiên,không dự đóan trước được

Vậy giá trị X là một biến ngẫu nhiên rời rạc

Ví dụ 2 : Một túi đựng 8 bi đỏ và 4 bi trắng .Chọn hú hoạ 3 viên bi.Gọi X là số viên bi trắng trong 3 viên bi được chọn ra . X có phải là biến ngẫu nhiên không?

Giải

- Giá trị X $\in \{0,1,2,3\}$
- Giá trị X là ngẫu nhiên , không dự đoán trước được

Vậy X là một biến ngẫu nhiên rời rạc

Ví dụ 3 : Một nhóm có 8 người trong đó có 5 nam và 3 nữ.Chọn ngẫu nhiên 3 người . Gọi X là số nữ trong 3 người được chọn .Lập bảng phân bố xác suất của X

Giải

Giá trị X $\in \{0,1,2,3\}$ là biến ngẫu rời rạc

Số trường hợp chọn 3 người trong nhóm 8 người là : $C_8^3 = \dfrac{8.7.6}{1.2.3} = 56$

Ta có P(X = 0) là xác suất chọn được 3 nam .số cách chọn 3 nam là

$C_5^3 = \dfrac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ .Vậy P(X = 0) = $\dfrac{10}{56} = 0{,}18$

Ta có P(X = 1) là xác suất chọn được 1 nữ và 3 nam.

Vậy P(X = 1) = $\dfrac{C_3^1.C_5^2}{C_8^3} = \dfrac{3.10}{56} = 0{,}54$

Ta có P(X = 2) là xác suất chọn được 2 nữ và 1 nam.

Vậy P(X = 2) = $\dfrac{C_3^2.C_5^1}{C_8^3} = \dfrac{3.5}{56} = 0,27$

Ta có P(X = 3) là xác suất chọn được 3 nữ.

Vậy P(X = 3) = $\dfrac{C_3^3}{C_8^3} = \dfrac{1}{56} = 0,02$

Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2	3
P	0,18	0,54	0,27	0,02

Ví dụ 4 : Số khách hàng mua xăng tại một trạm bán xăng trong 5 phút là một biến ngẫu nhiên rời rạc X mà bảng phân phối xác suất của X là

X	0	1	2
P	0,1	0,5	0,4

a) Tính xác suất để trong 5 phút trên có nhiều nhất một khách hàng đến mua
b) Tính xác suất để trong 5 phút trên có ít nhất một khách hàng đến mua xăng

Giải

a) Theo bảng phân bố xác suất trên ta có :
Xác suất có nhiều nhất một khách hàng đến mua xăng là
P = 0,1 + 0,5 = 0,6
b) Xác suất để có ít nhất một khách hàng đến mua xăng là P = 1 – 0,1 = 0.9

Ví dụ 5 : Trong cuộc sổ số tombola người ta bỏ trong bình 10 vé trong đó chỉ có 2 vé trúng .Lấy hú họa 2 vé. Gọi X là biến ngẫu nhiên số vé trúng trong 2 vé chọn .Lập bảng phân phối xác suất của X và tính kì vọng của X

Giải

Giá trị của biến ngẫu nhiên X $\in \{0,1,2\}$

Số trường hợp chọn 2 vé trong 10 vé là $C_{10}^2 = 45$

Ta có :

- P(X = 0) = $\dfrac{C_8^2}{45} = \dfrac{28}{45}$
- P(X = 1) = $\dfrac{C_2^1 \times C_8^1}{45} = \dfrac{16}{45}$
- P(X = 2) = $\dfrac{C_2^2}{45} = \dfrac{1}{45}$

Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

Kì vọng : E(X) = $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$ = $0\times\frac{28}{45}+1\times\frac{16}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{18}{45}$ = 0,4

Ví dụ 6 : Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong số các gia đình có 4 con.Gọi X là số con trai trong gia đình đó . Hãy tính kì vọng , phương sai và độ lêch chuẩn của X biết rằng xác suất sinh con trai là 0,5 và hai biến cố sanh trai hay gái độc lập với nhau

Giải
Ta có bảng phân phối xác suất của biến X

X	0	1	2	3	4
P	$C_4^0(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$	$C_4^1(\frac{1}{2})^4=\frac{4}{16}$	$C_4^2(\frac{1}{2})^4=\frac{6}{16}$	$C_4^3(\frac{1}{2})^4=\frac{4}{16}$	$C_4^4(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

Kì vọng E(X) = $0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{4}{16}+2\times\frac{6}{16}+3\times\frac{4}{16}+4\times\frac{1}{16}=2$

Phương sai D(X) = $\sum_{i=0}^{4}(x_i-\mu)^2\,p_i$

$= (0-2)^2.\frac{1}{16} + (1-2)^2.\frac{4}{16} + (2-2)^2.\frac{6}{16} + (3-2)^2.\frac{4}{16} + (4-2)^2.\frac{1}{16}$

= 1

Độ lệch chuẩn $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ **= 1**

C. Bài tập rèn luyện

2..63. Một bình đựng 6 bi trắng , 3 bi đỏ và 2 bi xanh.
Lấy ngẫu nhiên 3 bi của bình
a) Tính xác suất các biến cố sau :

E_1 : Các bi lấy được đều khác màu

E_2 : Các bi lấy được cùng màu

b) Gọi X là biến ngẫu nhiên số bi trắng có được trong lần lấy 3 bi.Lập bảng phân phối xác suất của X.Tính kì vọng của X

2..64. Một bình đựng 5 bi đỏ , 3 bi vàng và 2 bi xanh . Lấy ngẫu nhiên 3 bi trong bình .Gọi A là biến cố được 3 bi đỏ ; B là biến cố được 3 bi cùng màu và C là biến cố được 3 bi khác màu
a) Tính xác suất các biến cố A , B , C
b) Gọi X là biến ngẫu nhiên bằng số màu của mỗi lần lấy 3 bi . Lập bảng phân phối xác suất của X . Tính kì vọng của X

2..65. Một bình đựng 3 bi đỏ , 4 bi trắng và 5 bi xanh.Một người tham gia cuộc chơi như sau : lấy ngẫu nhiên một bi trong bình:
* nếu là bi đỏ thì được 16 ngàn đồng
* nếu là bi trắng thì mất 12 ngàn đồng
* nếu là bi xanh thì bỏ lại vào bình và lấy tiếp bi khác trong bình :
  - nếu là bi đỏ thì được 8 ngàn đồng
  - nếu là bi trắng thì mất 2 ngàn đồng
  - nếu là bi xanh thì không được và không mất

Trước khi chơi người chơi có 12 ngàn đồng.Gọi X là tổng số tiền người đó có sau mỗi lần rút
a) Xác định các giá trị của biến ngẫu nhiên X
b) Lập bảng phân phối xác suất của X
c) Tính kì vọng của X

2..66. Gieo hai con súc sắc cùng một lúc và xét tổng số hai mặt xuất hiện
a) Tính xác suất để tổng số hai nút lớn hơn hay bằng 8
b) Gieo 5 lần liên tiếp hai con súc sắc cùng một lúc .Gọi X là biến ngẫu nhiên bằng số lần được tổng số hai nút lớn hơn hay bằng 8
Lập bảng phân phối xác suất của X và tính kì vọng E(X)

2..67. Chứng minh rằng phương sai của biến ngẫu nhiên X cho bởi công thức

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$$

2..68. Gọi X là số kg cà chua thu hoạch trong một tuần của một nhà vườn ,
X là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất như sau

X	0	1	2	3
P	0,1	O,5	0,3	0,1

Tính kì vọng và phương sai của X

2..69. Một cuộc xổ số gồm 1.000 vé.Có một giải trúng độc đắc 500 ngàn đồng, hai giải trúng 100 ngàn đồng và 50 giải khuyến khích trúng 10 ngàn đồng.Hỏi giá bán mỗi vé số là bao nhiêu để cuộc chơi vô tư (số kì vọng của biến rời rạc)

2..70. Số tai nạn giao thông vào tối chủ nhật ở một thành phố la một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	0	1	2	3	4	5
P	0,2	0,15	0,1	0,3	0,2	0,05

a) Tính xác suất để có ít nhất một tai nạn vào tối chủ nhựt
b) Tính kì vọng , phương sai và độ lệch chuẩn của X

2..71. Xác suất để một người bắn cung bắn trúng hồng tâm là 0,75
a) Tính xác suất để trong 10 lần bắn người đó
A : bắn trúng 7 lần
B : bắn trúng ít nhất một lần
b) Gọi X là biến ngẫu nhiên bằng số lần bắn trúng hồng tâm trong 5 lần bắn .Lập bảng phân bố xác suất của X .Tính E(X) , D(X)

2.72 Một ôtô đến một ngã tư có đèn báo hiệu giao thông. Xác suất để ôtô gặp đèn báo hiệu xanh tại ngã tư này là 0,6
a) Tính xác suất để ôtô lần lượt đến ngã tư này hai lần thì ít nhất có một lần tín hiệu xanh
b) Trong một ngày ôtô qua 5 lần ngã tư này .Gọi X là số lần gặp tín hiệu xanh trong 5 lần qua ngã tư này.Tính phân bố xác suất của X và tính kì vọng

D. Hướng dẫn giải

2.63 a) Ta có $P(E_1) = \dfrac{6\times3\times2}{C_{11}^3} = \dfrac{36}{165} = \dfrac{12}{55}$

$P(E_2) = \dfrac{C_6^3 + C_3^3}{C_{11}^3} = \dfrac{21}{165} = \dfrac{7}{55}$

Vì E_2 xảy ra khi được 3 bi trắng hay 3 bi đỏ
b) Ta có : $X \in \{0,1,2,3\}$

- Biến cố X = 0 xảy ra khi 3 bi lấy được không có bi trắng

Do đó $P(X = 0) = \dfrac{C_5^3}{C_{11}^3} = \dfrac{10}{165} = \dfrac{2}{33}$

- Biến cố X = 1 xảy ra khi được 1 bi trắng và 2 bi không trắng

Do đó $P(X = 1) = \dfrac{6\times C_5^2}{C_{11}^3} = \dfrac{4}{11}$

- Biến cố X = 2 xảy ra khi được 2 bi trắng và 1 bi không trắng

Do đó P(X = 2) = $\dfrac{C_6^2 \times 5}{C_{11}^3} = \dfrac{5}{11}$

- Biến cố X = 3 xảy ra khi lấy được 3 bi trắng

Do đó P(X = 3) = $\dfrac{C_6^3}{C_{11}^3} = \dfrac{20}{165} = \dfrac{4}{33}$

Ta có bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{2}{33}$	$\dfrac{4}{11}$	$\dfrac{5}{11}$	$\dfrac{4}{33}$

Kì vọng của X

E(X) = $0 \times \dfrac{2}{33} + 1 \times \dfrac{4}{11} + 2 \times \dfrac{5}{11} + 3 \times \dfrac{4}{11} = \dfrac{18}{11}$

2.64 a) Ta có P(A) = $\dfrac{10}{120} = \dfrac{1}{12}$

P(B) = $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{120} = \dfrac{11}{120}$ (B xảy ra khi được 3 bi đỏ hay 3 bi vàng)

P(C) = $\dfrac{5 \times 3 \times 2}{120} = \dfrac{1}{4}$

b) Ta có $X \in \{1, 2, 3\}$

Ta có : P(X = 1) = P(B) = $\dfrac{11}{120}$

P(X = 3) = P(C) = $\dfrac{1}{4}$

Ta có: P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1

Do đó P(X = 2) = 1 – ($\dfrac{11}{120} + \dfrac{1}{4}$) = $\dfrac{79}{120}$

Ta có bảng phối phối xác suất của X

X	1	2	3
P	$\dfrac{11}{120}$	$\dfrac{79}{120}$	$\dfrac{1}{4}$

Kì vọng E(X) = $1 \times \dfrac{11}{120} + 2 \times \dfrac{79}{120} + 3 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{259}{120}$

2.65. a) Được bi đỏ thì X = 12 + 16 = 28

Được bi trắng thì X = 12 – 12 = 0

Được bi xanh : - được bi đỏ thì X = 12 + 8 = 20

- được bi trắng thì X = 12 – 2 = 10
- được bi xanh thi X = 12 + 0 = 12

Vậy X $\in \{0, 10, 12, 20, 28\}$

b) P(X = 28) = $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, P(X = 0) = $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, P(X = 20) = $\frac{3\times 5}{12^2} = \frac{5}{48}$,

P(X = 10) = $\frac{4\times 5}{12^2} = \frac{5}{36}$, P(X = 12) = $(\frac{5}{12})^2 = \frac{25}{144}$

X	0	10	12	20	28
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{4}$

c) Kì vọng E(X) = $0\times\frac{1}{3} + 10\times\frac{5}{36} + 12\times\frac{25}{144} + 20\times\frac{5}{48} + 28\times\frac{1}{4} = 12,55$

2.66. Gieo 2 con xúc sắc cùng một lúc ta có các trường hợp sau đây:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Số trường hợp tổng hai nút xuất hiện lớn hơn hay bằng 8 là 15

$$P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Ta có $X \in \{1,2,3,4,5\}$ và P(X = k) = $C_5^k (\frac{5}{12})^k$ với k = 1,2,3,4,5

Vậy E(X) = $5\times\frac{5}{12} = \frac{25}{12}$

2.67. Theo định nghĩa ta có :

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 p_i - 2\mu x_i p_i + \mu^2 p_i) \text{ với } \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2\mu\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p_i$$

vì $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Vậy D(X) = $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$

2.68. E(X) = 1,40 kg cà chua

D(X) = 0,64

2.69. Cuôc chơi vô tư khi giá bán mỗi vé số bằng kì vọng của giải trúng
E(X) = (1/1000)(500 + 2.100 + 50.10) = 1,20
Vậy mỗi vé bán 1200 đồng thì cuôc chơi vô tư

2.70. a) Xác suất để có ít nhất một tai nạn là biến cố đối của biến cố không xảy ra tai nạn nào .Vậy P = 1 – 0,2 = 0,8

b) E(X) = $0\times0{,}2 + 1\times0{,}15 + 2\times0{,}1 + 3\times0{,}3 + 4\times0{,}2 + 5\times0{,}05 = 1{,}05$

D(X) = $0^2\times0{,}2 + 1^2\times0{,}15 + 2^2\times0{,}1 + 3^2\times0{,}3 + 4^2\times0{,}2 + 5^2\times0{,}05 - [E(X)]^2$

= 6,6

σ (X) = $\sqrt{D(X)} = 2{,}56$

2.71. a) P(A) = $C_{10}^{7}\times(0,75)^7\times(0,25)^3 = 0,25$

P(B) = $1 - (0{,}25)^{10} = 1$

b) X $\in \{0,1,2,3,4,5\}$

X	0	1	2	3	4	5
P	$(0{,}25)^5$	$C_5^1\times(0{,}75)\times(0{,}25)^4$	$C_5^2\times(0{,}75)^2\times(0{,}25)^3$	$C_5^3\times(0{,}75)^3\times(0{,}25)^2$	$C_5^4\times(0{,}75)^4\times(0{,}25)$	$(0{,}75)^5$

E(X) = $0\times(0{,}25)^5 + 1\times5\times(0{,}75)\times(0{,}25)^4 + 2\times10\times(0{,}75)^2\times(0{,}25)^3$
$+ 3\times10\times(0{,}75)^3\times(0{,}25)^2 + 4\times5\times(0{,}75)^4\times(0{,}25) + 5\times(0{,}75)^5$

D(X) = $E(X^2) - [E(X)]^2$

2.72. a) P = $1 - (0{,}4)^2 = 0{,}84$

b) Bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X

X	0	1	2	3	4	5
P	0,01	0,07	0,23	0,35	0,26	0,08

E. Câu hỏi trắc nghiệm cuối chương

Câu 1 . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng **?**

(I) Nếu A và B là 2 biến cố đối nhau thì P(A) + P(B) = 1

(II) Nếu P(AB) = 0 thì A và B là hai biến cố xung khắc

(III) Nếu P(A) > 0 và P(B) > 0 thì A và B là hai biến cố độc lập

a) Chỉ (I) b) chỉ (I) và (II)c) chỉ (III) d) cả 3 (I) (II) (III)

Câu 2 . Cho P(A) = 0,4 ; P(B) = 0,5 và P(AB) = 0,3 thì câu nào sau đây đúng?

b) A và B là hai biến cố xung khắc
c) A và B là hai biến cố độc lập
d) A và B là hai biến cố không độc lập và không xung khắc
e) A và B là hai biến cố đối

Câu 3 . Rút ngẫu nhiên một là bài trong cổ bài 32 lá.Xác suất để được lá già hay lá bích là :

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{11}{32}$ c) $\frac{1}{16}$ d) đáp số khác

Câu 4 . Gieo 3 con xúc sắc cùng một lúc.Xác suất để được số 421 là:

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 0,7 d) đáp số khác

Câu 5. Rút ngẫu nhiên 8 là bài trong cổ bài 32 lá thì xác suất để được ít nhất một lá xì là :

a) 0,3 b) 0,5 c) 0,7 d) 0,2

Câu 6 :Xác suất để sanh con trai và con gái bằng nhau .Môt cặp vợ chồng đã có một cháu gái thì xác suất để có cháu gái thứ hai là bao nhiêu?

a) 0,5 b) 0,25 c) 0,4 d) không tính được

Câu 7 Trong trò chơi gieo ngẫu nhiên đồng xu nhiều lần liên tiếp,hỏi phải gieo bao nhiêu lần để xác suất được mặt ngửa nhỏ hơn 1/100

a) 6b) 7 c) 8 d) 9

Câu 8 Trong một nhóm 100 học sinh trong đó 10 học sinh giỏi Toán 8 học sinh giỏi Văn và 2 học sinh vừa giỏi Toán vừa giỏi Văn . Chọn ngẫu nhiên một học sinh .Xác suất để học sinh đó giỏi Văn biết rằng học sinh đó giỏi Toán là :

a) 0,3 b) 0,2 c) 0,4 d) 0,5

Câu 9 : Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất sau:

X	0	1	2	3
P	0,03	0,27	0,48	0,22

Kì vọng E(X) gần bằng số nào sau đây :

a) 1,20 b) 2,1 c) 2,2 d) 1,89

Câu 10 : Gieo ngẫu nhiên một đồng xu . Gọi X là biến ngẫu nhiên bằng số lần mặt ngửa xuất hiện thì phương sai của X là :

a) 0,1 b) 0,3 c) 0,5 d) số khác

Câu 11 : Môt xúc sắc được gieo 6 lần .Xác suất để được một số lớn hơn hay bằng 4 hiện ra ít nhất 5 lần là :

a) $(\frac{1}{2})^6$ b) $6\times(\frac{1}{2})^6$ c) $7\times(\frac{1}{2})^6$ d) số khác

Câu 12 : Trong hệ trục Oxy chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là số nguyên có trị tuyệt đối nhỏ hơn hay bằng 3 .Nếu các điểm đều có cùng xác suất được chọn như nhau thì xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc O nhỏ hơn hoặc bằng 1 là :

a) $\frac{5}{49}$ b) $\frac{5}{81}$ c) $\frac{5}{64}$ d) số khác

Câu 13 . Ba thẻ đánh số 1,2,3 được bỏ vào bình .Rút ra một thẻ và ghi số của nó sau đó trả thẻ này vào bình.Tiến trình được lập lại hai lần nữa.Biết mỗi thẻ đều có cơ hội được rút như nhau . Nếu tổng ba số ghi được ở 3 lần rút là 7 thì các suất để rút được thẻ số 3 hai lần là :

a) 0,4 b) 0,5 c) 0,6 d) số khác

Câu 14 Xác suất để biến cố A xảy ra là 0,75 ; xác suất để biến cố B xảy ra là 0,66.Gọi x là xác suất để cả hai A và B cùng xảy ra.Giá trị nhỏ nhất của x là :

a) 0,41 b) 0,3 c) 0,35 d) 0,2

Câu 15 Gieo một con xúc sắc ba lần liên tiếp biết rằng tổng số trong hai lần gieo đầu bằng số thứ ba .Xác suất để có ít nhất mộtsố 3 xuất hiện là :

a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{7}{15}$

Câu 16 Gieo ngẫu nhiên một con xúc sắc liên tiếp .Xác suất để được số 6 là trong lần gieo thứ 3 là :

a) $(\frac{1}{6})^3$ b) $(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{6}\times(\frac{1}{6})^2$ d) số khác

Câu 17 Giáo viên chủ nhiệm chọn một học sinh trong lớp làm trưởng lớp .Mỗi học sinh đều có cơ hội được chọn ngang nhau và xác suất để một nữ sinh được chọn bằng ¼ xác suất để một nam sinh được chọn .Tỉ số giữa số nam sinh trong lớp và số học sinh của lớp là :

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) số khác

Câu 18 Một túi đựng 36 hạt bắp trắng và 12 hạt bắp vàng .Biết rằng chỉ có ½ số hạt bắp trắng khi rang sẽ nở tung và 2/3 số hạt bắp vàng nở tung .Chọn ngẫu nhiên một hạt bắp trong túi ,đem rang nó nở tung thì xác suất để hạt bắp đã chọn là hạt trắng bằng :

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{9}{13}$ d) $\frac{5}{9}$

Câu 19 Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh trong nhóm 7 học sinh có 2 anh em.

Xác suất để hai anh em được chọn là :

a) 0,29 b) 0,40 c) 0,72 d) 0,15

Câu 20 Một lớp học có 30 học sinh trong đó có 10 nữ sinh.Giáo viên toán chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để hỏi bài.Xác suất để có đúng hai học sinh trong ba học sinh được hỏi bài gần bằng số nào nhất :

a) 0,4 b) 0,45 c) 0,47 d) 0,50

Đáp số

1b	2c	3b	4a	5c	6a	7b	8b	9d	10c
11c	12a	13b	14a	15d	16b	17a	18c	19a	20c

Hướng dẫi giải

1b (I) và (II) đúng

2c A và B là hai biến cố không xung khắc vì P(AB) = 0,3 $\neq 0$

A và B là hai biến cố không độc lập vì P(AB) $\neq P(A)\times P(B)$

3b Được lá già hay lá bích có 11 trường hợp xảy ra.Vậy P = $\frac{11}{32}$

4a Gieo 3 con xúc sắc liên tiếp thì không gian mẫu là 6^3

Số trường hợp xảy ra là số hoán vị $\{1,2,4\}$

Vậy P = $\frac{3!}{6!} = \frac{1}{36}$

5c Xác suất để được 8 lá bài không có lá xì là $P_1 = \frac{C_{28}^8}{C_{32}^8}$

Vậy xác suất để được ít nhất một lá xì là $P = 1 - P_1 = 0,7$

6a Xác suất là 0,5

7b Xác suất để gieo n lần được mặt ngửa là $(\frac{1}{2})^n < 1/100$

Vậy n = 7 vì $(1/2)^7 = 0,0078$

8b P = 0,2

9d E(X) = 1,89

10c D(X) = 0,5

11c Gọi A là biến cố được ít nhất bằng 4 là $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.Trong 6 lần gieo xác suất để A hiện ra 6 lần là $(\frac{1}{2})^6$

Xác suất để được A đúng 5 lần và hỏng một lấn là : $6\times(\frac{1}{2})^5\times\frac{1}{2} = 6\times(\frac{1}{2})^6$

Vậy xác suất để được một số lớn hơn hay bằng 4 ít nhất 5 lần trong 6 lần gieo là

$7\times(\frac{1}{2})^6$

12a Có 7×7 = 49 điểm mà trị tuyệt đối nhỏ hơn hay bằng 3 trong đó 5 điểm cách O một khoảng nhỏ hơn hay bằng 1

Vậy xác suất là $\frac{5}{49}$

13b Tổng số bằng 7 xuất hiện trong các trường hợp (1,3,3) , (3,1,3) , (3,3,1) , (2,2,3) ,(2,3,2) , (3,2,2) .Do đó xác suất để được hai lần thẻ số 3 là $\frac{3}{6}=0,5$

14 a Ta có $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,75 + 0,66 - x$

mà $0,75 \le P(A\cup B) \le 1 \Leftrightarrow 0,75 \le 0,75 + 0,66 - x \le 1$

$\Leftrightarrow 0,41 \le x \le 0,66$

15d Có 15 trường hợp trong đó tổng số trong hai lần gieo đầu bằng số thứ ba :

(1,1,2) ; (2,1,3) ; (3,1,4) ; (4,1,5) ; (5,1,6) ; (1,2,3) ; (2,2,4) ; (3,2,5) ; (4,2,6) ; (1,3,4) ; (2,3,5) ; (3,3,6) ; (1,4,5) ; (2,4,6) ; (1,5,6)

Có 7 lần xuất hiện ít nhất số 3 .Vậy P = $\frac{7}{15}$

16b P = $(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{6}$ (2 lần đầu không được và lần thứ ba được số 6)

17a Gọi s là số học sinh trong lớp và n là số nam sinh thì s – n là số nữ sinh

Theo giả thiết $\frac{s-n}{s}=\frac{1}{4}\times\frac{n}{s}$ Vậy $\frac{n}{s}=\frac{4}{5}$

18c Số hạt bắp nở tung là 26 .Do đó xác suất để số hạt bắp nở tung là hạt trắng là P = $\frac{18}{26}=\frac{9}{13}$

19a Ta có P = $\frac{C_5^2}{C_7^4}=0,29$

20c Ta có : P = $\frac{C_{20}^2\times C_{10}^1}{C_{30}^3}=0,47$