Trần Thành Minh - Phan Lưu Biên – Trần Quang Nghĩa

GIẢI TÍCH 11

Giới hạn của hàm số

www.saosangsong.com.vn

Chương 4 . GIỚI HẠN

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

§1. Dãy số có giới hạn 0

A. Tóm Tắt Giáo Khoa .

1. Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu mọi số hạng của dãy số đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương nhỏ tùy ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi .

2. a) $\lim \frac{1}{n} = 0$ b) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ c) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

d) Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = 0$ có giới hạn 0

e) Nếu $|q| < 1$ thi $\lim q^n = 0$

Định lí : Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Nếu $|u_n| \le v_n$, $\forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$

B. Giải Toán

Dạng toán : Tìm giới hạn 0 của dãy số

Cách 1 : Sử dụng các tiêu chuẩn a, b, c, ,d ,e kết hợp với định lí .

Cách 2 : Dùng định nghĩa

Ví dụ 1 : Chứng minh các dãy số sau có giới hạn là 0 .

a) $u_n = \frac{1}{n^3}$ b) $u_n = \frac{\cos n^2}{\sqrt{n}}$ c) $u_n = \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}{2\sqrt[3]{n^2}}$ d) $u_n = \frac{2\sqrt{6^n}}{2^{2n} + 3^{2n}}$

Giải a) Ta có : Vì $n^3 \ge n$, $\forall n$ nên $0 < u_n = \frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n}$, $\forall n$.

Mà $\lim \frac{1}{n} = 0$, do đó theo định lí trên thì $\lim u_n = 0$

b) Vì $|\cos n^2| \le 1$, $\forall n$ nên $|u_n| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n$

Mà $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, do đó theo định lí trên $\lim u_n = 0$

c) Ta có : $\sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n} \le \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n} = 2\sqrt[3]{n}$, suy ra : $0 < u_n \le \frac{2\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

Mà $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$, do đó theo định lí trên $\lim u_n = 0$

d) Áp dụng bất đẳng thức Cô si : $2^{2n} + 3^{2n} \ge 2.\ \sqrt{2^{2n}.3^{2n}} = 2\sqrt{6^{2n}}$

=> $0 < u_n \le \frac{2\sqrt{6^n}}{2\sqrt{6^{2n}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^n$

Mà $\lim \frac{1}{\left(\sqrt{6}\right)^n} = 0$, do đó theo định lí trên $\lim u_n = 0$

Ví dụ 2 : Dùng định nghĩa**,** chứng minh $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{2(n-7)}{n^2+3} = 0$

Giải Với $n > 7$, ta có : $|u_n| = \frac{2(n-7)}{n^2+3} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$

Với số $\varepsilon > 0$ cho trước , để có $|u_n| < \varepsilon$, ta phải chọn n sao cho : $n > 7$ và $\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > 7$ và $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Như vậy nếu gọi n_0 là số nguyên > 7 và > $\frac{2}{\varepsilon}$, thế thì với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước , ta có : $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n > n_0$. Theo định nghĩa $\lim u_n = 0$

Chẳng hạn với $\varepsilon = 0,001$ thì $n_0 > 7$ và $n_0 > \frac{2}{0,001} = 200$ vậy lấy $n_0 = 201$ (hay một số nguyên bất kì > 200),

C. Bài Tập Rèn Luyện

Chứng minh các dãy số sau có giới hạn là 0 .

4.1. a) $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ b) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ c) $u_n = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ d) $u_n = \frac{n+1}{n^2+3}$

4.2 . $u_n = \frac{n^n(n+2)^n}{(2n+2)^{2n}}$

4.3. $u_n = \frac{15^n}{2^n(9^n+16^n)}$

4.4. $u_n = \left|\frac{\sin n.\cos n}{5\sqrt{n+5}}\right|$

4.5. $u_n = \frac{n^2+3n+6}{n^3}$

4.6. $u_n = \frac{2^n+3^n}{2.5^n}$

D. Hướng Dẫn – Đáp Số

4.1. a) Ta có : $|u_n| = \frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n}$. Mà $\lim\frac{1}{n} = 0$ nên $\lim u_n = 0$

b) $|u_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+2)} < \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$. Mà $\lim\frac{1}{n} = 0$ nên $\lim u_n = 0$

c) Vì $0 < q = \frac{\pi}{4} < 1$ nên $\lim u_n = 0$

d) $|u_n| = \frac{n+1}{n^2+3} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$. Với số $\varepsilon > 0$ cho trước , để có $|u_n| < \varepsilon$, ta phải chọn n sao cho : $\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$. Như vậy nếu gọi n_0 là số nguyên $> \frac{2}{\varepsilon}$, thế thì với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước , ta có : $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n > n_0$. Theo định nghĩa $\lim u_n = 0$

4.2 . $|u_n| = \frac{n^n(n+2)^n}{(2n+2)^{2n}} = \frac{(n^2+2n)^n}{2^n(n+1)^{2n}} \le \frac{(n+1)^{2n}}{2^n(n+1)^{2n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Mà $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

4.3. $|u_n| = \frac{15^n}{2^n(9^n+16^n)} = \frac{3^n.5^n}{2^n(3^{2n}+5^{2n})} \le \frac{\frac{3^{2n}+5^{2n}}{2}}{2^n(3^{2n}+5^{2n})} = \frac{1}{2^{n+1}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (bđt Côsi)

Mà $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

4.4. $|u_n| = \left|\frac{\sin n.\cos n}{5\sqrt{n+5}}\right| \le \frac{1}{5\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$

Mà $\lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

4.5. $\frac{n^2+3n+6}{n^3} \le \frac{n^2+3n^2+6n^2}{n^3} \le \frac{10n^2}{n^3} = \frac{10}{n}$

Ta có với n > 100 thì $10 < \sqrt{n}$, suy ra $u_n \le \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ với n > 10

Mà $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, do đó : $\lim u_n = 0$

4.6. Ta có : $2^n + 3^n \le 3^n + 3^n = 2.3^n$, suy ra : $| u_n | \le \frac{2.3^n}{2.5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$

Mà $\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ vì $0 < \frac{2}{3} < 1$, do đó theo định lí trên $\lim u_n = 0$.

§2. Dãy số có giới hạn

A. Tóm Tắt Giáo Khoa .

1. Định nghĩa : Dãy số (u_n) có **giới hạn là số thực L** nếu $\lim(u_n - L) = 0$

$\lim u_n = L$ (hoặc $u_n \to L$) $\Leftrightarrow \lim(u_n - L) = 0$

2. Định lí 1 : Giả sử $\lim u_n = L$, khi đó :

a) $\lim | u_n | = | L |$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$

b) Nếu $u_n \ge 0$ với $\forall n$ thì $L \ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$

Định lí 2 : Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số . Khi đó :

a) * $\lim(u_n + v_n) = L + M$ * $\lim(u_n - v_n) = L - M$

* $\lim(u_n.v_n) = LM$ * $\lim(cu_n) = cL$

b) Nếu $M \ne 0$ thì $\lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}$

Kết quả :

- $\lim \frac{c}{n^k} = 0$ (c : hằng số ; k : số nguyên dương)
- $\lim \frac{c}{\sqrt[m]{n^k}} = 0$ (c ; hằng số ; k , m : số nguyên dương

3, Cho (u_n) là cấp số nhân với $|q| < 1$ (*cấp số nhân lùi vô hạn)* thì :

$$S = u_1 + u_1q + u_1 q^2 + \ldots = \lim S_n = \frac{u_1}{1-q}$$

B. Giải Toán

Dạng 1 : Tìm giới hạn bằng định nghĩa .

$\lim u_n = L \Leftrightarrow \lim(u_n - L) = 0$

Ví dụ 1 : Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\lim\left(7 - \frac{1}{n^2}\right)$ b) $\lim\left(\frac{2n+\sin n}{n}\right)$

Giải : a) Ta có : $\lim(u_n - 7) = \lim\frac{-1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim u_n = 7$.

b) Ta có : $u_n = 2 + \frac{\sin n}{n} \Rightarrow \lim(u_n - 2) = \lim\frac{\sin n}{n}$

Mà $\begin{cases} \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \\ \lim \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases}$ nên $\lim \dfrac{\sin n}{n} = 0$, suy ra $\lim u_n = 2$

Dạng 2 : Tìm giới hạn của $\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó P(n), Q(n) là hai đa thức theo n

Chia tử và mẫu cho đơn thức có **bậc cao nhất** rồi sử dụng : $\lim \dfrac{c}{n^k} = \lim \dfrac{c}{\sqrt[m]{n^k}} 0$

và các định lí về giới hạn .

Ví dụ 2 : Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 5n - 7}$ b) $\dfrac{(2n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$

c) $\dfrac{2n-13}{(n+5)^2}$

Giải a) Ta có : $u_n = \dfrac{\dfrac{2n^2}{n^2} - \dfrac{n}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3n^2}{n^2} + \dfrac{5n}{n^2} - \dfrac{1}{n^2}}$ (chia tử và mẫu cho n^2) $= \dfrac{2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{3 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{1}{n^2}}$

Vì $\lim(2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}) = \lim 2 - \lim \dfrac{1}{n} + \lim \dfrac{1}{n^2} = 2 - 0 + 0 = 2$

Và $\lim(3 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{7}{n^2}) = \lim 3 + \lim \dfrac{5}{n} - \lim \dfrac{7}{n^2} = 3 + 0 - 0 = 3$

Nên $\lim u_n = \dfrac{2}{3}$

b) Tử và mẫu là các đa thức bậc 3 nên chia tử và mẫu cho n^3 , ta được :

$$u_n = \frac{\left(\dfrac{2n-1}{n}\right).\left(\dfrac{3-n}{n}\right)^2}{\left(\dfrac{4n-5)}{n}\right)^3} = \frac{\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{n} - 1\right)^2}{\left(4 - \dfrac{5}{n}\right)^3}$$

Vì $\lim \left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = \lim 2 - \lim \dfrac{1}{n} = 2$; $\lim \left(\dfrac{3}{n} - 1\right)^2 = \left(\lim \dfrac{3}{n} - \lim 1\right)^2 = (0-1)^2 = 1$

Và $\lim \left(4 - \dfrac{5}{n}\right)^3 = \left(\lim 4 - \lim \dfrac{5}{n}\right)^3 = (4-0)^3 = 64$

Nên $\lim u_n = \dfrac{2.1}{64} = \dfrac{1}{32}$

c) $\lim u_n = \lim \dfrac{\dfrac{2}{n} - \dfrac{13}{n^2}}{\left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^2}$ (chia tử và mẫu cho n^2) $= \dfrac{0}{1^2} = 0$

Dạng 3 : Dạng sử dụng công thức : $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

Ta thường chia tử và mẫu cho lũy thừa a^n với a lớn nhất . Nhớ các quy tắc :

$$a^{n+m} = a^n . a^m \;;\; a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m} \;;\; (a^n)^m = a^{nm} \;;\; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ví dụ 3 : Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\dfrac{5.2^n - 6.3^n}{3.2^n + 2.3^n}$ b) $\dfrac{3^{2n+1} - 15^n + 5^{2n+2}}{4.3^{2n} + 2.15^n + 7.5^{2n-1}}$

Giải a) Ta có : $\lim u_n = \lim \dfrac{\dfrac{5.2^n}{3^n} - \dfrac{6.3^n}{3^n}}{\dfrac{3.2^n}{3^n} + \dfrac{2.3^n}{3^n}} = \lim \dfrac{5\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 6}{3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 2}$ (Chia tử và mẫu cho 3^n)

$= \dfrac{5.0-6}{3.0+2} = -3$ (vì $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ do $0 < \dfrac{2}{3} < 1$)

b) Trước hết ta đưa về các lũy thừa dạng q^n với $|q| < 1$. Ta có :

$$u_n = \frac{3.9^n - 15^n + 25.25^n}{4.9^n + 2.15^n + \frac{7}{5}.25^n}$$

Chia tử và mẫu cho 25^n : $\lim u_n = \lim \dfrac{3.\left(\dfrac{9}{25}\right)^n - \left(\dfrac{15}{25}\right)^n + 25}{4.\left(\dfrac{9}{25}\right)^n + 2.\left(\dfrac{15}{25}\right)^n + \dfrac{7}{5}} = \dfrac{0-0+25}{0+0+\dfrac{7}{5}} = \dfrac{125}{7}$

(vì $\lim\left(\dfrac{9}{25}\right)^n = \lim\left(\dfrac{15}{25}\right)^n = 0$ do $0 < \dfrac{9}{25} < \dfrac{15}{25} < 1$)

Ví dụ 4 : Tính các tổng vô hạn các số hạng của cấp số nhân sau :

a) $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - ....$ b) $S = \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots$ ($x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$)

Giải : a) Áp dụng công thức : $S = \dfrac{u_1}{1-q}$ với $|q| < 1$.

Ta có vì $|q| = \dfrac{1}{2} < 1$ nên $S = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

b) Vì $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ nên $|q| = \sin^2 x \neq 1$ tức $|q| < 1$, do đó

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

*** Dạng 4 : Tìm giới hạn bằng cách thiết lập công thức u_n theo n**

Ví dụ 5 : Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \dfrac{1}{1^2+1} + \dfrac{1}{2^2+2} + \dfrac{1}{3^2+3} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+n}$

Giải Ta rút gọn u_n bằng cách nhận xét số hạng tổng quát

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (1 \leq k \leq n)$$

Suy ra : $u_n = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

=> $\lim u_n = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$

Ví dụ 6 : Cho dãy số u_n định bởi : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$; $n \geq 1$

Chứng minh $u_n = 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $\forall n$. Suy ra $\lim u_n$.

Giải Ta chứng minh $u_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (1) , $\forall n$ băng phương pháp quy nạp .

- Ta có : $u_1 = 2 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1$: vậy (1) đúng khi n = 1
- Giả sử $u_k = 2 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^k$, thế thì theo giả thiết quy nạp : $u_{k+1} = u_k + \left(\frac{1}{2}\right)^k$

⇨ $u_{k+1} = 2 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$: (1) đúng khi n = k + 1

Vậy (1) đúng với $\forall n$. Suy ra :

$$\lim u_n = 2 - 2\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - 0 = 2$$

Ghi chú : Ta có thê thiết lập trực tiếp công thức (1) bằng nhận xét $u_n - u_{n-1}$ là một cấp số nhân công bội $\frac{1}{2}$

C. Bài Tập Rèn Luyện

4.7. Chọn câu đúng : $\lim\frac{3n + \sin(2n+4)}{2n}$

a) 1 b) 2 c) 0 d) $\frac{3}{2}$

4.8. Chọn câu đúng : $\lim\frac{2n-1}{3-n} =$

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 1 d) – 2

4.9. Chọn câu đúng : $\lim\frac{3(2n-1)^2 n}{4(n+7)(3n-1)^2} =$

a) ½ b) $\frac{1}{3}$ c) 0 d) $\frac{3}{4}$

4.10. Chọn câu đúng : $\lim\frac{\sqrt{n^2+n}+3n-1}{\sqrt{n^3+2n^2+1}} =$

a) 4 b)3 c) 0 d) - 1

4.11. Chọn câu đúng : $\lim\frac{3^{n+1}-5^{2n-1}}{2^{n+4}+25^{n-1}} =$

a) – 5 b) – 1/5 c) 3/16 d) đáp số khác

4.12. **Chọn câu đúng :** Tổng vô hạn của cấp số nhân sau - 4 + 2 – 1+ . . .bằng :

a) 16 b) $\frac{16}{3}$ c) 6 d) đáp số khác

4.13. Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\lim\left(3 - \frac{\sin(2n+1)}{\sqrt{n}}\right)$ b) $\lim\left(\frac{2\sqrt{n}+3-\cos n^2}{\sqrt{n}+1}\right)$

4. 14. Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\frac{n^2+2n}{3n^2+n+1}$ b) $\frac{2n^3+n^2}{n^4-3n^2+6}$ c) $\frac{(2n+4)(3n-4)(3n+1)^2}{(2n+5)^3)(5n-2)}$

d) $\frac{\sqrt[3]{n^3-n^2+n}}{\sqrt{n^2-2n+3}+2n-7}$ e) $\frac{\sqrt{n^3-n+7}+n-1}{(2n+1)^2}$

4. 15. Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\dfrac{4.3^n + 7^{n+1}}{2.5^n + 7^n}$ b) $\dfrac{2^n + 3^{n+1}}{5.2^{n+1} - 4.3^n}$

c) $\dfrac{2.3^{2n} + 6^{n+1} - 2^{2n-1}}{(2.3^{n-1} - 3.2^n)^2}$

4. 16. Tính các tổng vô hạn của cấp số nhân sau :

a) 1000 + 100 + 10 + . . . b) $1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \ldots (x \neq k\pi)$

c) $1 - \sqrt{x} + x - \ldots$ d)

4.17. Trong mặt phẳng Oxy , một ốc sên bò từ gốc O theo phương Ox 1 m , rồi quẹo trái theo phương Oy rồi lại quẹo trái theo phương Ox và cứ thế , khoảng cách bò lần sau bằng nữ a khoảng cách trước đó . Hỏi bò mãi thì ốc sên sẽ đến vị trí nào ?

4. 18. Biểu diễn các số thập phân tuần hòan sau đây dưới dạng phân số , ví dụ : $\dfrac{38}{33} = 1,151515\ldots$ là số thập phân tuần hòan có chu kì là 15

a) 0, 123123123. . . b) 1, 272727 . . .

4.19. Cho một góc xOy = 30^0 . Từ điểm A trên Ox với OA = 1 , dựng AA_1 vuông góc Oy . Tiếp theo dựng A_1A_2 vuông góc Ox , rồi A_2A_3 vuông góc Oy và cứ thế mãi mãi .
Tình độ dài đường gấp khúc AA_1A_2 . . .

4.20. Cho hình vuông ABCD có độ dài là 1. Ta nội tiếp trong hình vuông này một hình vuông thứ hai , có đỉnh là trung điểm của các cạnh của nó. Và cứ thế . . . . Tính tổng
chu vi của các hình vuông .

* **4. 21.** Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\dfrac{1+4+\ldots+(3n+1)}{1+6+\ldots+(5n+1)}$ b) $\dfrac{3^n(1+2+2^2+\ldots+2^n)}{2^n(1+3+3^2+\ldots+3^n)}$

c) $\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{3^2-1} + \ldots + \dfrac{1}{n^2-1}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$

* **4. 22.** Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

b) $\dfrac{2}{(2^2-1)^2} + \dfrac{3}{(3^2-1)^2} + \ldots + \dfrac{n}{(n^2-1)^2}$

***4. 23.** Cho dãy số : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$. Tìm công thức tính u_n theo n . Suy ra limu_n.

D. Hướng Dẫn – Đáp Số

4.7. (d) $\lim(u_n - \dfrac{3}{2}) = \lim\dfrac{\sin(2n+4)}{2n} = 0 \Rightarrow \lim u_n = \dfrac{3}{2}$

4.8. (d) $\lim\dfrac{2n-1}{3-n} = \lim\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{3}{n}-1} = \dfrac{2}{-1} = -2$

4.9. (b) $\lim\dfrac{3(2n-1)^2n}{4(n+7)(3n-1)^2}=\lim\dfrac{3(2-\frac{1}{n})^2}{4(1+\frac{7}{n})(3-\frac{1}{n})^2}=\dfrac{3.2^2}{4.1.3^2}=\dfrac{1}{3}$

4.10.(c) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}+3n-1}{\sqrt{n^3+2n^2+1}}=\lim\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\frac{3}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}}$ (chia T và M cho $\sqrt{n^3}$)

$=\dfrac{0}{1}=0$

4.11. (a) $\lim\dfrac{3^{n+1}-5^{2n-1}}{2^{n+4}+25^{n-1}}=\lim\dfrac{3.3^n-\frac{1}{5}.25^n}{16.2^n+\frac{1}{25}.25^n}=\lim\dfrac{3\left(\frac{3}{25}\right)^n-\frac{1}{5}}{16.\left(\frac{2}{25}\right)^n+\frac{1}{25}}=-5$

4.12. (b) Ta có : $8-4+2-1+\ldots=\dfrac{8}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{16}{3}$

4.13. a) Ta có : $\lim(u_n-3)=\lim\dfrac{-\sin(2n+1)}{\sqrt{n}}$

Mà $\begin{cases}\left|\dfrac{-\sin(2n+1)}{\sqrt{n}}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}\\ \lim\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0\end{cases}$ nên $\lim(u_n-3)=0\Rightarrow \lim u_n=3$

b) Ta có : $\lim(u_n-2)=\lim\dfrac{1-\cos n^2}{\sqrt{n}+1}$

Mà $\begin{cases}\left|\dfrac{1-\cos n^2}{\sqrt{n}+1}\right|\le\dfrac{2}{\sqrt{n}}\\ \lim\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0\end{cases}$ => $\lim(u_n-2)=0\Rightarrow\lim u_n=2$

4. 14. a) $\lim u_n=\dfrac{1}{3}$ (Chia tử và mẫu cho n^2)

b) $\lim u_n=0$ (Chia tử và mẫu cho n^4)

c) $\lim u_n=\dfrac{2.3.3^2}{2^3.5}=\dfrac{2}{5}$ (Chia tử và mẫu cho n^4)

d) $\lim u_n=\dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt{1}+2}=\dfrac{1}{3}$ (Chia tử và mẫu cho $n=\sqrt{n^2}=\sqrt[3]{n^3}$)

e) $\lim u_n=\dfrac{\sqrt{0}+0}{2^2}=0$ (Chia tử và mẫu cho $n^2=\sqrt{n^4}$)

4. 15. a) $\lim u_n=\lim\dfrac{4.\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{2.\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=\dfrac{0+7}{0+1}=7$

b) $\lim u_n = \lim \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3}{10.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 4} = \dfrac{0+3}{0-4} = -\dfrac{3}{4}$ c) $\lim u_n = \dfrac{2 + 6.\left(\dfrac{6}{9}\right)^n - \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3} - 3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)^2} = = \dfrac{9}{2}$

4. 16. a) $S = 1000.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{10000}{9}$ b) $S = 1.\dfrac{1}{1-\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

c) $S = 1.\ \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

4. 17. Các hoành độ lần lượt của ốc sên là : 1 , $-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{16};...$ lập thành một cấp số nhân , số hạng đầu 1 , công bội $-\dfrac{1}{4}$. Suy ra hoành độ của ốc sẽ tiến đến vị trí $1.\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$

(m) . Các tung độ của ốc sên là : $\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{16};....$ lập thành một cấp số nhân , số hạng đầu $\dfrac{1}{2}$, công bội $-\dfrac{1}{4}$. Suy ra tung độ của ốc sẽ tiến đến vị trí la : $\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{2}{5}$

Vậy ốc sên sẽ bò đến điểm $\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{2}{5}\right)$

4. 18. Ta viết số thập phân dưới dạng một tổng vô hạn :
0,123 + 0, 123123 + 0, 123123123 . . . .

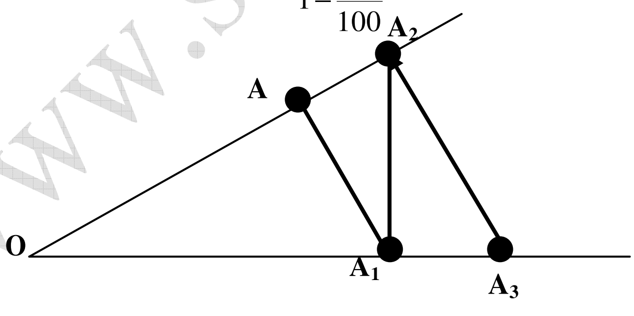
Đây là tổng vô hạn của một cấp số nhân , số hạng đầu 0, 123 , công bội $q = \dfrac{1}{1000}$

, suy ra số đó là : $\dfrac{123}{1000}.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1000}} = \dfrac{123}{999} = \dfrac{41}{333}$

b) Ta có : 1, 272727 . . . = 1 + 0, 27 + 0, 2727 + 0, 272727 + . . .

$$= 1 + \frac{27}{100}.\frac{1}{1-\dfrac{1}{100}} = 1 + \frac{27}{99} = 1 + \frac{3}{11} = \frac{14}{13}$$

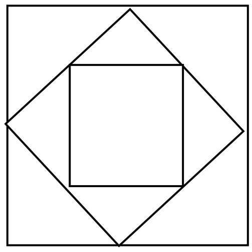
4. 19.



Các tam giác OAA_1 , OA_1A_2 . . . là các tam giác nữ a đều , cho ta : $\dfrac{A_1A_2}{A\ A_1} = \dfrac{A_2A_3}{A_1A_2} = ... = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, suy ra các đoạn AA_1 , A_1A_2, A_2A_3 . . . lập thành một cấp số nhân , số hạng đầu $AA_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.OA = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, công bội $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy độ dài đoạn gấp khúc là : $\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}-3}$

4. 20. Các cạnh hình vuông này bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cạnh hình vuông trước nó . Do đó các chu vi hình vuông lập thành một cấp số nhân số hạng đâu là 4 (chu vi hình vuông ABCD) , công bội là $\frac{1}{\sqrt{2}}$, vậy tổng các chu vi là : 4. $\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4(2+\sqrt{2})$ (m)



***4. 21.** a) Tử là tổng n + 1 số hạng của một cấp số cộng với $u_1 = 1$, d = 3 và mẫu là tổng của n + 1 số hạng của một cấp số cộng với $v_1 = 1$, d' = 5 . Vậy :

$$u_n = \frac{\frac{(n+1)}{2}(2+3n)}{\frac{n+1}{2}(2+5n)} = \frac{2+3n}{2+5n} \Rightarrow \lim u_n = \frac{3}{5}$$

b) Biểu thức trong dấu ngoặc của tử là tổng n + 1 số hạng của một cấp số nhân với $u_1 = 1$, q = 2 và của mẫu là tổng của n + 1 số hạng của một cấp số nhân với $v_1 = 1$, q' = 5 . Vậy : $u_n = \frac{3^n.\frac{1-2^{n+1}}{1-2}}{2^n.\frac{1-3^{n+1}}{1-3}} =$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3}.2$$ (Chia tử và mẫu cho $2^n.3^n$) $\Rightarrow \lim u_n = \frac{4}{3}$

c) $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + ... + \frac{1}{(n-1)(n+1)}$ mà $\frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] \Rightarrow \lim u_n = \frac{3}{4}$$

Ghi chú : Ta biến mõi số hạng của u_n thành hiệu thuộc dạng :

$u_n = (a_1 - a_3) + (a_2 - a_4) + (a_3 - a_5) + (a_4 - a_6) + \ldots + (a_{n-2} - a_n) + (a_{n-1} - a_{n+1})$

$= a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}$

d) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-...-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim u_n = 1$

***4.22.** a) Ta rút gọn u_n theo cách của câu (c) trên đây bằng nhận xét :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{(k(k+1)}.\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Suy ra : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$\Rightarrow \lim u_n = 1$

b) Ta có : $\dfrac{k}{(k^2-1)^2} = \dfrac{k}{(k+1)^2(k-1)^2} - \dfrac{1}{4}.\dfrac{(k+1)^2-(k-1)^2}{(k+1)^2(k-1)^2} = \dfrac{1.}{4}\left(\dfrac{1}{(k-1)^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}\right)$ => u_n =

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{5^2} + ... + \dfrac{1}{(n-2)^2} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n-1)^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) =$

$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ => $\lim u_n = \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{8}$

***4. 23.** Ta có : $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{3}{2}$, $u_3 = \dfrac{3-1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3}$. Ta chứng minh : $u_n = \dfrac{n+1}{n}$, $\forall n$ bằng phương pháp quy nạp

. Suy ra : $\lim u_n = \lim\dfrac{n+1}{n} = 1$

§3. Dãy số dần đến vô cực

A. Tóm Tắt Giáo Khoa .

1. Dãy số dần đến vô cục :

- (u_n) **có giới hạn là +** ∞ nếu mọi số hạng đều **lớn hơn** một số dương lớn tùy ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi .
  Kí hiệu : $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$
- (u_n) **có giới hạn là -** ∞ nếu mọi số hạng đều **nhỏ hơn** một số âm nhỏ tùy ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi .
  Kí hiệu : $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$

CHÚ Ý : (1) $\lim n^k = +\infty$, $\lim \sqrt[m]{n^k} = +\infty$, k , m : số nguyên dương .

(2) Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n \neq 0$, $\forall n$ thì $\lim\dfrac{1}{|u_n|} = +\infty$

(3) Nếu $\lim u_n = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\dfrac{1}{|u_n|} = 0$

(4) Giả sử $\lim u_n = +\infty$ và L > 0 , thế thì :

$\lim v_n$	**L**	**0**	**+ ∞**	**- ∞**
Lim $(u_n + v_n)$	**+ ∞**	**+ ∞**	**+ ∞**	**?**
Lim $(u_n - v_n)$	**+ ∞**	**+ ∞**	**?**	**+ ∞**
$\lim(u_n . v_n)$	**+ ∞**	**?**	**+ ∞**	**- ∞**
$\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	**+ ∞**	**+ ∞ (L > 0) hoặc − ∞ (L<0)**	**?**	**?**
$\lim\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$	**0**	**0**	**?**	**?**

Các trường hợp có dấu ? là các trường hợp ta không thể xác định được giới hạn : dạng $\infty - \infty$, $0.\infty$ và $\dfrac{\infty}{\infty}$ (đã xét một phần ở §2.Dạng 2) , gọi là dạng vô định . Ta thường phải sử dụng các thuật toán để khử các dạng này , được trình bày trong phần sau .

B. Giải Toán

Dạng 1 : (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Ví dụ 1 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\dfrac{(2n-1)(3n+1)^2}{(2n-4)^3}$ b) $\dfrac{4n^2-n-1}{(2n-1)^2(n+6)}$ c) $\dfrac{n^3-n^2+n+8}{2n^2+7n+9}$

Giải : a) Chia tử và mẫu cho n^3 (lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu), ta được :

$$\lim u_n = \lim \frac{(2-\frac{1}{n})(3+\frac{1}{n})^2}{(2-\frac{4}{n})^3} = \frac{2.3^2}{2^3} = \frac{9}{4}$$

b) Chia tử và mẫu cho n^3 (lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu), ta được :

$$\lim u_n = \lim \frac{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{(2-\frac{1}{n})^2(1+\frac{6}{n})} = \frac{0}{2.1} = 0$$

c) Xét $u_n = \dfrac{2n^2+7n+9}{n^3-n^2+n+8} > 0$, $\forall n$

Ta có : $\lim u_n = 0$ (độc giả giải tương tự câu (b) ở trên)

Suy ra : $\lim \dfrac{n^3-n^2-n+8}{2n^2+7n+9} = \lim \dfrac{1}{u_n} = +\infty$

Nhận xét : *Qua các ví dụ trên , nếu tử và mẫu là các đa thức bậc k và m theo n thì :*

$$\lim \frac{a_o n^k + a_1 n^{k-1} + \dots}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \dots} = \begin{cases} \dfrac{a_o}{b_o} & \text{nếu } k = m \\ 0 & \text{nếu } k < m \\ \infty & \text{nếu } k > m \end{cases}$$

Ví dụ 2 : Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}}$ b) $\dfrac{\sqrt{n^3+n+6}-n+6}{2n^2+1}$

Giải a) Chia tử và mẫu cho $n = \sqrt{n^2} = \sqrt[3]{n^3}$, ta được :

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

suy ra : $\lim u_n = \dfrac{\lim \sqrt[3]{8+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\lim \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{1}} = 2$

b) Chia tử và mẫu cho $n^2 = \sqrt{n^4}$, ta được :

$$\lim u_n = \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{6}{n^4}}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{6}{n^4}}}{\lim \sqrt{2+\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$$

Dạng 2 (dạng ∞ - ∞) : Tìm giới hạn của $\sqrt{P(n)}-\sqrt{Q(n)}$ trong đó P(n), Q(n) là hai đa thức cùng bậc theo n

Viết : $\sqrt{P(n)}-\sqrt{Q(n)} = \dfrac{P(n)-Q(n)}{\sqrt{P(n)}+\sqrt{Q(n)}}$, ta đưa về trường hợp của dạng 1.

- Tương tự : $\sqrt[3]{P(n)}-\sqrt[3]{Q(n)}=\dfrac{P(n)-Q(n)}{\sqrt[3]{P(n)^2}+\sqrt[3]{P(n)Q(n)}+\sqrt[3]{Q(n)^2}}$

Ví dụ 3 Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\sqrt{n^2+n+28}-\sqrt{n^2-4n+5}$ b) $\sqrt{4n^2+20n+1}-2n-5$

c) $(\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}-2n+2007)$

Giải a) Ta có :

$$\lim u_n=\lim\frac{(n^2+n+28)-(n^2-4n+5)}{\sqrt{n^2+n+28}+\sqrt{n^2-4n+5}}=\lim\frac{5n+23}{\sqrt{n^2+n+28}+\sqrt{n^2-4n+5}}$$

$$=\lim\frac{5+\frac{23}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{28}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}}=\frac{5-0}{1+1}=\frac{5}{2}$$

b) $$\lim u_n=\lim\frac{(4n^2+20n+1)-(2n+5)^2}{\sqrt{4n^2+1}+2n-5}=\lim\frac{-24}{\sqrt{4n^2+20n+1}+(2n+5)}$$

$$=\lim\frac{\frac{-24}{n}}{\sqrt{4+\frac{20}{n}+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{5}{n}}=\frac{0}{2+2}=0$$

c) $$\text{imu}_n=\lim((\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}-2n)+2007$$

$$=\lim\frac{(8n^3+n^2-1)-(2n)^3}{\sqrt[3]{(8n^3+n^2-1)^2}+2n.\sqrt[3]{(8n^3+n^2-1)^2}+(2n)^2}\quad+2007$$

$$=\lim\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)^2}+2.\sqrt[3]{8+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+4}\ +\ 2007 \text{ (chia tử và mẫu cho } n^2\text{)}$$

$$=\frac{1}{4+4+4}+2007=2007\frac{1}{12}$$

Ví dụ 4 : Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\sqrt{n^3+n}-n+8$ b) $\sqrt{n+7}-\sqrt{3n+2}$ c) $\dfrac{5}{\sqrt{4n-1}-\sqrt{3n+2}}$

Giải :

a) Ta có $\lim u_n=\lim\ \sqrt{n^3}\ (\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{8}{\sqrt{n^3}}\right)$

Vì $\lim\sqrt{n^3}\ =+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{8}{\sqrt{n^3}}\right)=\mathbf{1}$

Do đó $\lim u_n=+\infty$

Ghi chú : Ở câu (a) , tuy là dạng vộ định ∞ - ∞ nhưng dãy số $u_n=\sqrt{n^3+n}$ tiến đến vô cục " nhanh hơn " dãy số $v_n = n - 8$ nên $\lim(u_n - v_n) = +\infty$.

Những giá trị của u_n và v_n tương ứng với các giá trị rất lớn của n trong bảng dưới đây cho thấy điều đó :

N	**100**	**1000**	**10000**
u_n	**1000,04**	**31.622**	**1000000**
v_n	**92**	**992**	**9992**
$u_n - v_n$	**908,04**	**30.630**	**990.008**

So sánh với lim $\sqrt{n^2+n+28}-\sqrt{n^2-4n+5}$ *ở VD1 _câu a) , ta thấy cả u_n và v_n đều tiến tới vô cực với giá trị ngang bằng nhau nên lim(u_n – v_n) = 2, 5 .*

N	**100**	**1000**	**10000**
u_n	**100,637**	**1.000,513**	**10.000,501**
v_n	**98**	**998**	**9998**
$u_n - v_n$	**2,637**	**2,513**	**2,501**

b) limu_n = $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}-\sqrt{3+\frac{2}{n}}\right)$

Vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}-\sqrt{3+\frac{2}{n}}\right)=1-\sqrt{3}<0$ nên $\lim u_n=-\infty$

c) Chia tử và mẫu cho $\sqrt{n}$, $\lim u_n=\dfrac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}-\sqrt{3+\frac{2}{n}}}$

Tử tiến dần đến 0 và có giá trị dương còn mẫu tiến dần đến $\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$, do đó $\lim u_n=+\infty$

Ví dụ 5 : Tìm giới hạn dãy số $\dfrac{n+3-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{4n^2+5}-2n+1}$

Giải : limu_n= $\lim\dfrac{(n+3)^2-(\sqrt{n^2+n})^2}{n+3+\sqrt{n^2+n}}.\dfrac{(\sqrt{4n^2+5}+2n-1}{(\sqrt{4n^2+5})^2-(2n-1)^2}$ (nhân tử và mẫu cho lượng liên hiệp)

$$=\lim\frac{5n+9}{n+3+\sqrt{n^2+n}}.\frac{\sqrt{4n^2+5}+2n-1}{4n+4}$$

$$=\lim\frac{5+\frac{9}{n}}{1+\frac{3}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.\frac{\sqrt{4+\frac{5}{n^2}}+2-\frac{1}{n}}{4+\frac{4}{n}}$$ (Chia tử và mẫu của từng biểu thức phân cho n)

$$=\frac{5}{1+1}.\frac{2+2}{4}=\frac{5}{2}$$

Ghi chú : Ở đây tử và mẫu đều là hiệu của hai dãy số " đồng tài ngang sức " , có nghĩa là giới hạn của hiệu của chúng là một số hữu hạn , cho nên ta phải dùng lượng liên hiệp để tìm giá trị hữu hạn ấy . Còn đối với dãy số trong đó tử hay mẫu là hiệu hai dãy số không " đồng tài ngang sức " , ví dụ : $\dfrac{2n+3-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+5}-2n+1}$ *,* *trong đó giới hạn của tữ và mẫu đều là vô hạn thì ta giải như dạng 1. Cụ thể như sau :*

$$\lim u_n = \lim \frac{2+\frac{3}{n}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}-2+\frac{1}{n}} = \frac{2-\sqrt{1}}{\sqrt{1}-2} = -1$$

Cần nhận biết hai dãy số an + b và an + b', hoặc $an^2 + bn + c$ và $an^2 + b'n + c'$ . . . (tức các đa thức cùng bậc và hệ số của bậc cao nhất bằng nhau) là hai dãy số " đồng tài ngang sức "

C. Bài Tập Rèn Luyện

4.24. Chọn câu đúng : Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào dẫn đến + ∞ ?

(I) $\sqrt{2n+7}-\sqrt{n+4}$ (II) $\frac{(2n^2-3)^2}{(3-n)^3}$

a) Chỉ (I) b) Chỉ (II) c) Cả (I) và (II) d) Không dãy số nào

4.25. Chọn câu đúng : Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào dẫn đến 0 ?

(I) $\frac{3}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+4}}$ (II) $\frac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}}$

a) Chỉ (I) b) Chỉ (II) c) Cả (I) và (II) d) Không dãy số nào.

4.26. Chọn câu đúng : $\lim n(\sqrt{n^4+n+3}-\sqrt{n^4+3n-1})$

a) 0 b) - 2 c) + ∞ d) – ∞

4.27. Chọn câu đúng : $\lim\left(\sqrt{4n^2+2n+7}-2n+3)\right) =$

a) 7/2 b) – 5/2 c) 0 d) + ∞

4.28. Chọn câu đúng : $\lim \frac{\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2+2n+7}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n+3}} =$

a) 0 b) – 1 c) + ∞ d) – ∞

4. 29. Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\frac{2n-4}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$ b) $\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+4}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}}$ d) 2n – 3 - $\sqrt{n^3-n+3}$ e) $\sqrt{n^3}-\sqrt[3]{n^4}$

4.30. Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\sqrt{2n+4}-\sqrt{2n+1}$ b) $n^2-2n\sqrt{n+3}$

c) $(1+n^2)-\sqrt{n^4+3n^2+1}$ d) $\sqrt{4n^2+n-1}-\sqrt{4n^2-3n+6}$

e) n + 2 - $\sqrt[3]{n^3+2n+1}$

4. 31. Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\frac{n-\sqrt{n^2+5}}{2n+1-\sqrt{4n^2+4n+3}}$ b) $\frac{n+\sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$

c) $\frac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{2n-\sqrt{n^2+8n}}$ d) $\frac{n-5-\sqrt[3]{8n^3+n+1}}{n+2-\sqrt{n^2+7}}$

***4. 32.** Tìm giới hạn các dãy số sau :

a) $\frac{\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{2n+3}}{2n+1}$ b)(2n+1)$\left(\sqrt{2n^4-n+1}-\sqrt{2n^4+3n+1}\right)$

c) $(3n-1)\left(\sqrt{n^2+n+7}-\sqrt{n^2+n+2}\right)$ d) $\sqrt{4n^2+n}-\sqrt[3]{8n^3+3n^2}$

e) $\sqrt{4n^2+1}\sqrt[3]{n^3+7}-2n^2+1$

***4.33.** Cho dãy số $u_n = 1 + \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$. Chứng minh $\lim u_n = +\infty$

D. Hướng Dẫn – Đáp Số

4.24.(a) * $\lim u_n = \lim\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{7}{n}}-\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right) = +\infty$

* $\lim u_n = \lim\dfrac{(2-\frac{3}{n^2})^2}{\frac{1}{n}(\frac{3}{n}-1)^3} = -\infty$ vì tử số dần đến 0 với các giá trị âm và mẫu số dần đến 4.

4.25.(d) * $\lim u_n = \lim\dfrac{3(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+4})}{-3} = -\infty$

* $\lim u_n = \lim\dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}}-1\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$

4.26. (b) $\lim u_n = \lim n\dfrac{-2n+4}{\sqrt{n^4+n+3}+\sqrt{n^4+3n+1}}$ **= - 2**

4.27.(a) $\lim\left(\sqrt{4n^2+2n+7}-2n+3)\right) = \lim\dfrac{(4n^2+2n+7)-(2n-3)^2}{\sqrt{4n^2+2n+7}+2n-3} =$

$= \lim\dfrac{14n-2}{\sqrt{4n^2+2n+7}+2n-3} = \dfrac{14}{2+2} = \dfrac{7}{2}$

4.28.(d) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2+2n+7}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n+3}} = \lim\dfrac{-n-8}{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+2n+7}}.\dfrac{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+3}}{4}$

$= \lim\dfrac{-1-\frac{8}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}}.\dfrac{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+3}}{4} = -1.(+\infty) = -\infty$

4. 29. a) $\lim u_n = \lim\dfrac{2-\frac{4}{n}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}} = +\infty$ vì $\lim(2-\frac{4}{n}) = 2$, $\lim(\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = 0$ và $\sqrt[3]{n^2+n+1} > 0,\ \forall n$

.

b) $\lim u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}}-\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right) = +\infty$ vì $\lim\sqrt{n} = \infty$; $\lim\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}}-\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right) = 2-1 = 1$

c) $\lim u_n = \lim\dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}}-\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right)} = 0$ vì giới hạn của mẫu là $+\infty$.

d) $\lim u_n = \sqrt{n^3}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{3}{\sqrt{n^3}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}}) = -\infty$ vì $\lim\sqrt{n^3} = +\infty$ và

$\lim(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{3}{\sqrt{n^3}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}} = 0-1 = -1$

e) Chú ý : $\sqrt{n^3} = \sqrt[6]{n^9}$ và $\sqrt[3]{n^4} = \sqrt[6]{n^8}$, ta được :

$\lim u_n = \lim \sqrt[6]{n^9}\left(1-\sqrt[6]{\frac{1}{n}}\right) = +\infty$

4. 30. a) $\lim u_n = \lim \frac{3}{\sqrt{2n+4}+\sqrt{2n+1}} = 0$

b) $+\infty$

c) $\lim u_n = \lim \frac{-n^2}{1+n^2+\sqrt{n^4+3n^2+1}} = \lim \frac{-1}{\frac{1}{n^2}+1+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = -\frac{1}{2}$

d) $\lim u_n = 1$ e) $\lim u_n = 2$

4. 31. a) $\lim u_n = \lim \frac{-5}{n+\sqrt{n^2+5}}.\frac{2n+1+\sqrt{4n^2+4n+3}}{-2} = \lim \frac{5}{2}.\frac{2+\frac{1}{n}+\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}} = 5$

b) $\lim u_n = \lim \frac{n^3-(n^3-1)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3-1}+\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}.\frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{n^4+1-n^4}$

$= \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^2}} = \frac{2}{3}$

c) $\lim u_n = \lim \frac{2-\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{2-\sqrt{1+\frac{8}{n}}} = 0$

d) $\lim u_n = \lim \frac{1-\frac{5}{n}-\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{1+\frac{2}{n}-\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}} = -\infty$ vì $\lim T = 1 - 2 = -1 < 0$ và $\lim M = 0$ và $M > 0$, $\forall n$ (T : tử , M : mẫu)

***4. 32.** a) $\lim u_n = \lim \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$

b) $\lim u_n = \lim(2n+1)\frac{-4n}{\sqrt{2n^4-n+1}+\sqrt{2n^4+3n+1}} = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$

c) $\lim u_n = \lim(3n-1)\frac{5}{\sqrt{n^2+n+7}+\sqrt{n^2+n+2}} = \frac{15}{2}$

d) *Ở đây* $\sqrt{4n^2+n}$ *" đồng tài ngang sức" với* $\sqrt{4n^2} = 2n$, *còn* $\sqrt[3]{8n^3+3n^2}$ *thì " đồng tài ngang sức" với* $\sqrt[3]{8n^3} = 2n$

$$\lim u_n = \lim\left(\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+3n^2}\right)\right)$$

$$= \lim\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}+\frac{-3n^2}{4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+3n^2}+\sqrt[3]{(8n^3+3n^2)^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{-3}{12} = 0$$

e) *Ở đây* $\sqrt{4n^2+n}$ *" đồ ng tài ngang sức" với* $\sqrt{4n^2}=2n$, *còn* $\sqrt[3]{n^3+n^2+1}$ *thì " đồng ngtài ngang sức với* $\sqrt[3]{n^3}=n$

$$\lim u_n = 1+\lim(\sqrt{4n^2+1}\sqrt[3]{n^3+7}-2n\sqrt[3]{n^3+7}+2n\sqrt[3]{n^3+7}-2n^2)$$

$$= 1 + \lim\left[\sqrt[3]{n^3+7}(\sqrt{4n^2+1}-2n)+2n(\sqrt[3]{n^3+7}-n)\right] = 1+\frac{1}{4}+1=\frac{9}{4}$$

4.33. Ta có : $u_{2^m}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+....+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+...+\frac{1}{2^m}\right)$

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất có 2^1 phân số , trong dấu ngoặc thứ hai có 2^2 phân số , . . ., trong dấu ngoặc cuối cùng có 2^m phân số .

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Ta có : $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

....

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+...+\frac{1}{2^m}>\frac{1}{2}$$

Cộng , ta được : $u_{2^m}>1+\frac{m}{2}$. Theo định nghĩa , ta suy ra : $\lim u_n = +\infty$.

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ . HÀM SỐ LIÊN TỤC

§4. Định nghĩa và một số định lí về giới hạn hàm số

A. Tóm Tắt Giáo Khoa .

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm :

a) Giới hạn hữu hạn : Cho hàm số f xác định trên (a ; b) \ {x_0 } và $x_0 \in$ (a ; b) , ta nói :

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ (f có giới hạn là L tại điểm x_0) ⇔ ∀ (x_n), $\lim x_n = x_{-0}$ => $\lim f(x_n) = L$

b) Giới hạn vô cực :

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ ⇔ ∀ (x_n), $\lim x_n = x_0$ => $\lim f(x_n) = +\infty\ (-\infty)$

2. Giới hạn tại vô cực .

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ ⇔ ∀ (x_n), $\lim x_n = +\infty$ => $\lim f(x_n) = L$

Tương tự với $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Chú ý : Với mọi $k \in Z^+$,

a) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^k}=0$ b) $\lim_{x\to+\infty} x^k=+\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu k chẵn}\\ -\infty & \text{nếu k lẻ}\end{cases}$

d) $\lim_{x\to x_0} C = C$ (C : hằng số)

3. Định lí về giới hạn :

Định lí 1 : Biết $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=M$, thế thì :

a) $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L+M$ b) $\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L-M$

c) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = LM$ d) Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Định lí 2 : Biết $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, thế thì :

a) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$ b) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$

c) Nếu $f(x) \geq 0$, $\forall x \neq x_0$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Ghi chú : a) $\lim\limits_{x\to x_0} (x^n) = x_0^n$ b) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_o}$

- Nếu f(x) là hàm số đa thức , phân thức hay vô tỉ xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Các định lí 1 và 2 trên vẫn đúng khi thay x_0 bằng $\pm\infty$.

B. Giải Toán .

Dạng 1 : Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ biết hàm số f(x) là hàm số lập bởi các phép tóan như cộng , trừ , nhân chia ... các hàm số đa thức và xác định tại x_o .

Khi đó giới hạn là $f(x_0)$.

Ví dụ 1 : Tìm các giới hạn sau :

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ tại $x_0 = 2$ b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+8} - x + 3}{\sqrt{x+1} + x^2}$ tại $x_0 = 0$

Giải a) f(x) là hàm số hữu tỷ xác định tại $x_0 = 2$ nên $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = \dfrac{3}{4}$

b) f(x) là hàm số sơ cấp xác định tại $x_0 = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \dfrac{\sqrt[3]{8} - 0 + 3}{1+0} = 5$

Dạng 2 : Tìm $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó f(x) và g(x) là các đa thức hay biểu thức tiến tới vô cực khi x tiến tới vô cực .

- Chia tử và mẫu cho đơn thức có bậc cao nhất , rồi dùng : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$

Ví dụ 2 : Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + 5}{3x^3 + x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x^2 - x + 1)^2}{(2x-1)^3(5x+6)}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{3x^2 - x + 7}$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x\sqrt{-9x+1} - 3x + 2}{\sqrt{-4x^3 - x^2 + 1} + x - 1}$

Giải a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2}}$ (Chia tử và mẫu cho x^3)

$= \dfrac{2-0+0}{3+0} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2}{\left(2 - \frac{1}{x}\right)^3 \left(5 + \frac{6}{x}\right)}$ (Chiatử và mẫu cho $x^4 = (x^2)^2 = x^3 . x$)

$$= \frac{(3-0+0)^2}{(2-0)^3(5+0)} = \frac{9}{40}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{x^2}}{3 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{x^2}} = \dfrac{0-0}{3-0+0} = 0$

d) Chia tử và mẫu cho $\sqrt{-x^3} = -x\sqrt{-x}$, ta được :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2\sqrt{9-\dfrac{1}{x}} + 3\sqrt{-\dfrac{1}{x}} - \dfrac{2}{x\sqrt{-x}}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}} - \dfrac{1}{\sqrt{-x}} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}} = \frac{-2\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = -3$$

Dạng 3 : Tìm giới hạn vô cực .

Chú ý : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_0x^n + a_1x_{n-1} + ...) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a_o > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a_o < 0 \end{cases}$

b) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ thì :

* $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = +\infty$

c) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì :

* $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{a}{f(x)}\right| = +\infty$ ($a \neq 0$)

* $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right| = +\infty$

. . . .

Ví dụ 3 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}+3x}{|x-2|}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1-3x} - 2x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{4x-5})$ d) $\lim\limits_{x\to1} (\dfrac{2\sqrt{x}+1}{(x-1)^2}.(\sqrt{3x-2} - \sqrt{4x+5})$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+4x}{3x-1}$

Giải :

a) Nhận xét $\lim\limits_{x\to2} |x-2| = 0$ và $|x-2| > 0$, $\lim\limits_{x\to2} (\sqrt{x+2} + 3x) = \sqrt{4} + 6 = 8 > 0$

Vậy $\lim\limits_{x\to2} = +\infty$

b) Vì $\sqrt{1-3x} \to +\infty$ và $(-2x) \to +\infty$ khi x dần đến $-\infty$, do đó : $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1-3x} - 2x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - \sqrt{\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}}) = +\infty$ vì

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - \sqrt{\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}}\right) = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2\sqrt{x}+1}{(x-1)^2} = +\infty$ vì tử $\to 3$ và mẫu $\to 0$ và mẫu > 0

$\lim\limits_{x\to1} (\sqrt{3x-2} - \sqrt{4x+5}) = \sqrt{1} - \sqrt{9} = -2$

Do đó $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$

e) Nhận xét rằng tử và mẫu đều dương (tiến tới + ∞) khi x tiến tới + ∞ Ta có :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{4}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$ vì giới hạn của tử là 2 , của mẫu là 0

C. Bài Tập Rèn Luyện

4.34.. Chọn câu đúng : $\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{2|x|+x^2+x}{x^2-x+1}} =$

a) 0 b) 1 c) 2 d) + ∞

4.35. Chọn câu đúng : $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-2}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}} =$

a) + ∞ b) – ∞ c) 0 d) 1

4.36. Chọn câu đúng : $\lim_{x\to-\infty}\frac{19x+19}{2x+5-\sqrt{4x^2+x+6}} =$

a) $+\infty$ b) $\frac{19}{4}$ c) 0 d) – ∞

4.37. Chọn câu đúng : $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}) =$

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ b) 0 c) $\sqrt{2}-1$ d) + ∞

4.38. Chọn câu đúng : $\lim_{x\to-\infty}(5-x+\sqrt{4x^2+x+6}) =$

a) $5-\sqrt{6}$ b) 0 c) + ∞ c) – ∞

4.39. Chọn câu đúng : $\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-4)^2(3-x)^3}{(-x^2+3)^2(3x-1)} =$

a) 36 b) - 36 c) - $\frac{4}{3}$ c) 0

4.40. Chọn câu đúng : $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}+x}{-x^2+4x-4} =$

a) + ∞ b) – ∞ c) 0 d) 6

4.41. Chọn câu đúng : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{2x^3+2}+x^2}{(2x-3)^2+x^2\sqrt{x+3}} =$

a) $\frac{1}{4}$ b) $\sqrt{2}$ c) 0 d) + ∞

4.42. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x\to0}\frac{x^2+\sqrt{x+1}}{|x^2-3|}$ b) $\lim_{x\to\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^4-3}}$

c) $\lim_{x\to1}\frac{\cos 2\Pi x+\sin\Pi x}{x^2+\sqrt{x}}$ d) $\lim_{x\to2}\frac{\cos\pi x\sqrt{2x^2+x-9}}{\tan(\pi x/8)+\sqrt[3]{x-1}}$

4.43. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+5}{x^2+x+4}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^2+x-1)(x-1)^2}{(3x^2-1)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt[3]{8x^3-x-1}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1+\sqrt[5]{x^4-3x}}{2x+7-\sqrt[3]{x^2+x}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)\sqrt{\dfrac{x^2+5}{x^4+3x^2+1}}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x-4}}$

4.44. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+3}-3x}{2x|x^2-1|}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{5-2x}-x+5)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x+1}-\sqrt{9x-5})$ **d)** $\lim\limits_{x\to-1}(\dfrac{2\sqrt{3-x}-6}{(x+1)^2}.(\sqrt{3-x}-\sqrt{7-2x})$ e)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^3-x+1}-3x-2}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$

4. 45. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x^2+\sin 3x}{x^2+x+4}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{(1+\sin x)(1+\cos x)}}{(2+\sin x+\cos x)(x^2+x+1)}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x-\sqrt{x^2-x+3})$

D. Hướng Dẫn – Đáp Số

4.34.(c) Vì hàm số f(x) xác định khi x = 1 nên $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=\sqrt{\dfrac{4}{1}}=2$

4.35. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}$ **= +** ∞

4.36.(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{19x+19}{2x+5-\sqrt{4x^2+x+6}}=\dfrac{19}{2+2}=\dfrac{19}{4}$

4.37. (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3})=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}\right)$ **= +** ∞

4.38. (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x+6})=+\infty$

4.39.(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2-\dfrac{4}{x})^2(\dfrac{3}{x}-1)^3}{(-1+\dfrac{3}{x^2})^2(3-\dfrac{1}{x})}=\dfrac{2^2(-1)^3}{(-1)^2 3}=-\dfrac{4}{3}$

4.40.(b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}+x}{-x^2+4x-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}+x}{-(x-2)^2}$ **= -** ∞ vì tử $\to 6$, mẫu $\to 0$ và <0

4.41.(b) Chia tử và mẫu cho $x^2\sqrt{x}=x\sqrt{x^3}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{2}{x^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}(2-\dfrac{3}{x})^2+\sqrt{1+\dfrac{3}{\sqrt{x}}}}=\sqrt{2}$

4.42. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \dfrac{1}{3}$ b) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{\dfrac{3-1}{9-3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{\cos 2\Pi + \sin\Pi}{1^2+\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = \dfrac{\cos 2\pi\sqrt{1}}{\tan(\pi/4)+\sqrt[3]{1}} = \dfrac{1}{2}$

4. 43. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **=** $\dfrac{2}{9}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{\sqrt[3]{8-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}} = \dfrac{1}{2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^4}}}{2+\dfrac{7}{x}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{3}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2-\dfrac{5}{x})\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{5}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}$ **= 2**

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x-4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}}}$ **= 3**

4.44. a) – ∞

b) + ∞

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)\left(\sqrt{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{-\dfrac{9}{x}+\dfrac{5}{x^2}}\right) = +\infty$ vì $(-x) \to +\infty$ và số hạng còn lại $\to 2$

d) Số hạng đầu $\to -\infty$, số hạng sau $\to -1$ nên $f(x) \to -\infty$

e) Chia tử và mẫu cho $x\sqrt{x} = x^3$, giới hạn là $\dfrac{\sqrt{2}-0}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

4. 45.

a) Vì $|f(x)| \le \dfrac{1}{|x+2|} \to 0$ khi $x \to +\infty$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) Vì $|f(x)| \le \dfrac{2}{x^2+x+4}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2+x+4} = 0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

c) Vì $\sqrt{(1+\sin x)(1+\cos x)} \le \dfrac{2+\sin x+\cos x}{2}$ (bđt Cô – si)

nên $|f(x)| \le \dfrac{|x|}{2(x^2+x+1)}$ mà $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|}{2(x^2+x+1)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

d) $f(x) = x\left(\dfrac{\sin x}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)$ mà $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = 1$, do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

§5. Giới hạn một bên

A. Tóm Tắt Giáo Khoa .

1. Cho f(x) xác định trên khỏang $(x_0 ; b)$:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall x_n \in (x_0 ; b)$, $\lim x_n = x_0 \Rightarrow \lim f(x_n) = L$

(f(x) có **giới hạn phải** là L khi $x \to x_0$)

2. Cho f(x) xác định trên khỏang $(a ; x_0)$:

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall x_n \in (a ; x_0)$, $\lim x_n = x_0 \Rightarrow \lim f(x_n) = L$

(f(x) có **giới hạn trái** là L khi $x \to x_0$)

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} = L$

4. Các định lí 1 và 2 ở **§3** cũng đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_o^+$ hay x_o^- .

5. $\lim\limits_{x\to O^+} \dfrac{1}{x^k} = +\infty$ ($k \in Z^+$) , $\lim\limits_{x\to O^-} \dfrac{1}{x^{2k}} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to O^-} \dfrac{1}{x^{2k+1}} = -\infty$

B. GIẢI TOÁN

Dạng 1 : Tìm giới hạn phải , trái

Chú ý khi $\mathbf{x} \to x_o^+$ thì $x > x_0$ và khi $\mathbf{x} \to x_o^-$ thì $x < x_0$

Ví dụ 1 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x\,|\,x-2\,|}{x^2-2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}+3x}{(x^2-4)}$

Giải a) Hàm số f(x) xác định trên (1 ; 3) . Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}.\sqrt{-x+3}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{-x+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) Chú ý khi $x \to 2^-$ thì $x < 2$, suy ra $|\,x - 2| = -(x-2)$

Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-x}{x+2} = -\dfrac{1}{2}$

c) Khi $x \to 2^+$ thì $\begin{cases} \sqrt{x-2}+3x \to \sqrt{0}+3.2 = 6 > 0 \\ (x^2-4) = (x-2)(x+2) \to 0^+ \end{cases}$ do đó $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}+3x}{(x^2-4)}$ **= +** ∞

Ví dụ 2 : Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} & \text{với } x > 1 \\ x^2-2x & \text{với } x \le 1 \end{cases}$

Tìm giới hạn phải và trái của f(x) tại x = 1 . Hàm số có giới hạn tại x = 1 không ?

Giải

- Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3}$
- Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-2x) = f(1) = -1$ vì x^2-2x xác định tại x = 1
- Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên hàm số f(x) không có giới hạn tại x = 1

C. Bài Tập Rèn Luyện

4.46. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$ b) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{\sqrt{-x-1}}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+8}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{|x^2-x|}}$ e) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{\sqrt{5x-x^2}}{x^2-6x+5}$

4.47. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-4x+3}{|1-x^2|}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-3x}{\sqrt{3x^4-x^5}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2-3x+2} \right)$

4.48. Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x^2 + x}} \text{ với } x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 1} \text{ ; với } -1 \le x \le 0 \end{cases}$

a) Tìm giới hạn phải của f(x) tại x = - 1

b) Tìm giới hạn phãi và trái của f(x) tại x = 0 . Hàm số có giới hạn tại x = 0 hay không ?

4.49. Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}} \text{ với } x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3} + 1}{\sqrt{2x^2 - x}} \text{ ; với } x \ge 1 \end{cases}$

Tìm giới hạn phãi và trái của f(x) tại x = 1 . Hàm số có giới hạn tại x = 1 hay không

D. Hướng Dẫn – Đáp Số

4.46. a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ vì $\begin{cases} \text{tử} \to 3 \\ \text{mẫu} \to 0 \text{ và mẫu} > 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{\sqrt{1-1}}{-1-1} = 0$

c)) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{(x-2)(x-4)}}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{2-x}\sqrt{4-x}}{\sqrt{2-x}\sqrt{3-x}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3-x}} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}{\sqrt{|x^2 - x|}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{(x-1)(x-5)}}{\sqrt{|(x-1)x|}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}.\sqrt{5-x}}{\sqrt{1-x}.\sqrt{|x|}} = \dfrac{2}{1} = 2$

e) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{\sqrt{5x - x^2}}{x^2 - 6x + 5} = \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{\sqrt{x(5-x)}}{(x-1)(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{5-x}}{(x-1)(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{\sqrt{x}}{-(x-1)\sqrt{5-x}} = -\infty$

4.47. a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x(x-3)}{\sqrt{x^4(3-x)}} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-\sqrt{3-x}}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} \right)$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-2) - (x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = +\infty$

vì khi $x \to 1^+$ thì x > 1 nên (x – 1)(x+1)(x – 2) < 0

4.48. a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1$

Vì $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = 1$ nên $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$.

4.49. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(1) = 3$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}(1-\sqrt{1-x})}{|x|\sqrt{1-x}} = 1$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên hàm số không có giới hạn tại x = 1

§6. Giới hạn vô cực §7. Các dạng vô định

A. Giải Toán

Dạng 1 (Dạng $\frac{0}{0}$) : Tìm $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Phân tích tử và mẫu ra nhân tử để khử dạng vô định . Có thể dùng lượng liên hiệp như đã gặp ở giới hạn dãy số .

Ví dụ 1 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{x^3+27}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{\sqrt[3]{x^5}-x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3\sqrt{x-1}+1-x^2}{|x^2-3x+2|}$

Giải a) Ta có : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$

Ghi chú : Sau khi đơn giản nhân tử x – 1(tác nhân gây nên dạng vô định , ta được hàm số $\frac{x-2}{x+1}$ *xác định tại* $x_0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)}{\sqrt{x+4}+1}.\frac{1}{(x+3)(x^2+3x+9)}$

$$=\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+1}.\frac{1}{(x+3)(x^2+3x+9)}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{1}{\sqrt{x+4}+1}.\frac{1}{x^2+3x+9}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}+1}.\frac{1}{9+9+9}=\frac{1}{54}$$

Ghi chú : Sau khi nhân lượng liên hiệp , ta xuất hiện nhân tử x+ 3(tác nhân gây nên dạng vô định) . Đơn giản , ta được hàm số $\frac{1}{\sqrt{x+4}+1}.\frac{1}{x^2+3x+9}$ *xác định tại* $x_0 = -3$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+x+4)-4}{\sqrt{x^2+x+4}+2}.\frac{1}{x(\sqrt[3]{x^2}-1)}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+4}+2}.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1}=\frac{1}{2+2}.\frac{1}{-1}=-\frac{1}{4}$$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3\sqrt{(x-1)}-(\sqrt{x-1})^2(x+1)}{|(x-1)(x-2)|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}(3-(x+1)\sqrt{x-1})}{-(x-1)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3-(x+1)\sqrt{x-1}}{-(x-2)}=\frac{3-0}{1}=3$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3\sqrt{x-1}+x^2-1}{|x^2-3x+2|}$

Ví dụ 2 : Tìm a và b sao cho : $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+ax-b}{x^2-1}=3$

Giải Vì $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \to 0$ kh $x \to 1$, do đó để f(x) có giới hạn hữu hạn thì điều kiện cần là $x^2 + ax - b \to 0$ khi $x \to 1$ (vì nếu $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax-b) \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$.

Suy ra : $1^2 + a - b = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$.

Khi đó : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-a-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{a+2}{2}$

Vây để thỏa yêu cầu bài toán thì $\begin{cases} b = a+1 \\ \dfrac{a+2}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$

Dạng 2 (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$) : Tìm giới hạn của $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó f(x) và g(x) là các biểu thức tiến tới vô cực khi x tiến tới vô cực .

Chia tử và mẫu cho đơn thức có bậc cao nhất , rồi dùng : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k} = 0$ chú ý :

- $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{f(x)}{x^2}} & \text{nếu } x \to +\infty \ (x > 0) \\ -\sqrt{\dfrac{f(x)}{x^2}} & \text{nếu } x \to -\infty \ (x < 0) \end{cases}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{f(x)}{x^3}}$, $\forall x \neq 0$

Ví dụ 3 : Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+x+1}}{3x-2+\sqrt[3]{x^3+x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6}-x-5}{3x+\sqrt[3]{x^3+5x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x^3+3x^2}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}}$

Giải a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}}}$ (Chia tử và mẫu cho $x = \sqrt{x^2} = \sqrt[3]{x^3}$ (vì $x > 0$) =

$\dfrac{2-\sqrt{1+0+0}}{3-0+\sqrt[3]{1+0}} = \dfrac{2-1}{3-0+1} = \dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{6}{x^2}}-1-\dfrac{5}{x}}{3+\sqrt[3]{1+\dfrac{5}{x}}} = \dfrac{-\sqrt{4-0}-1-0}{3+\sqrt[3]{1+0}} = \dfrac{-3}{4}$

(Chia tử và mẫu cho $x = -\sqrt{x^2} = \sqrt[3]{x^3}$ (vì $x < 0$)

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2-\dfrac{1}{x})\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}}$ (Chia tử và mẫu cho $x\sqrt{x} = \sqrt{x^3}$)

$= (2-0)\sqrt{\dfrac{1+0}{1+3}} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^2-(x^2-x+1)}{x-1+\sqrt{x^2-x+1}}.\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{(x+1)-(x+3)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x-1+\sqrt{x^2-x+1}}.\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{-2}$ **= +** ∞ vì số hạng đầu $\to$ - ½ và số hạng sau $\to$ - ∞ .

Dạng 4 (dạng ∞ - ∞) : Tìm giới hạn của $\lim\limits_{x\to x_o}[f(x) - g(x)]$ **trong đó** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **= +** ∞ **và** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **= +** ∞ **)**

Dùng lượng liên hiệp , ta đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

- Cần chú ý trường hợp $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ (hay ngược lại) thì giới hạn của [f(x) - g(x)] là + ∞ (hay – ∞) , không phải là dạng vô định .
- Nhớ rằng nếu $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots (a \neq 0)$:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a>0 \\ -\infty & \text{nếu } a<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu n chẵn và } a>0 \text{ hoặc n lẻ và } a<0 \\ -\infty & \text{nếu n chẵn và } a<0 \text{ hoặc n lẻ và } a>0 \end{cases}.$$

Ví dụ 4 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-x-1}-\sqrt{3x^2+x+5}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x-1}-\sqrt{x^2+x+5})$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1-\sqrt{4x^2+4x-1})$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1-\sqrt{4x^2+3x-1})$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+5-\sqrt[3]{8x^3+x^2})$

Giải a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}\right) = -\infty$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ còn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}\right) = \sqrt{2}-\sqrt{3}$

Ghi chú : Dù hai biểu thức u(x) = $\sqrt{2x^2-x-1}$ và $v(x) = \sqrt{3x^2+x+5}$ *đều tiến đến +* ∞ *nhưng v(x) tiến nhanh hơn nhiều (Xem bảng giá trị sau)*

X	***10***	***100***	***1000***	***1000000***
u(x)	***13,7***	***141,0***	***1.413,8***	***1.414.213***
v(x)	***17,7***	***174,0***	***1.732***	***1.732.051***
u(x) – v(x)	***- 4,0***	***- 33,0***	***- 318,2***	***- 317.838***

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-x-1)-(x^2+x+5)}{\sqrt{x^2-x-1}+\sqrt{x^2+x+5}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-6}{\sqrt{x^2-x-1}+\sqrt{x^2+x+5}}$ (Ta đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}$ (Chia tử và mẫu cho x)

$= \dfrac{-2}{1+1} = -1$

Ghi chú : Ở đây cả u(x) và v(x) đều tiến đến + ∞ một cách " ngang ngữa " nên ta phải sử dụng " chiêu lượng liên hiệp" để phá vở dấu căn thức , cho hai biểu thức bên trong dấu căn thưc đụng độ trực tiếp nhau .

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+1)^2 - (4x^2+4x-1)}{2x+1+\sqrt{4x^2+4x-1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2x+1+\sqrt{4x^2+4x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{2+2} = 0$$

d) Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3x-1} = +\infty$, do đó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5 + \lim\limits_{x\to-\infty}(2x - \sqrt[3]{8x^3+x^2})$ (Tách hằng số 5 để phép tính đơn giản)

$$= 5 + \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x)^3 - (8x^3+x^2)}{(2x)^2 + 2x.\sqrt[3]{8x^3+x^2} + \sqrt[3]{(8x^3+x^2)^2}}$$

$$= 5 + \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{(2x)^2 + 2x.\sqrt[3]{8x^3+x^2} + \sqrt[3]{(8x^3+x^2)^2}}$$

$$= 5 + \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{4 + 2.\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{(8+\frac{1}{x})^2}} = 5 + \frac{-1}{4+4+4} = \frac{59}{12}$$

Ví dụ 5 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+x-1}}{2x-\sqrt{4x^2+x-5}}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{2x^2-2x}\right)$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+x-1}}{2x-\sqrt{4x^2+x-5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-(x^2+x-1)}{x+\sqrt{x^2+x-1}}.\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+x-5}}{4x^2-(4x^2+x-5)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+1}{x+\sqrt{x^2+x-1}}.\frac{2x+\sqrt{4x^2+x-5}}{-x+5}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}.\frac{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}}{-1+\frac{5}{x}}$$

$$= \frac{-1}{2}.\frac{4}{-1} = 2$$

b) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{1}{2x(x-1)}\right)$

$$= \lim_{x\to1} \frac{2x-(x+1)}{(x-1)(x+1)2x} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2.(-1)} = -\frac{1}{2}$$

B. Bài Tập Rèn Luyện

4.50.Chọn câu đúng : $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+3x-10}{x^2+8x-20} =$

a) 0 b) + ∞ c) $\dfrac{7}{12}$ d) $\dfrac{7}{8}$

4.51. Chọn câu đúng : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3-x}+2x}{x^2-1}$ =

a) $-\dfrac{7}{8}$ b) $\dfrac{7}{8}$ c) $-\dfrac{1}{8}$ d) 0

4.52. Chọn câu đúng : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{x^2-x-1}}$

a) 0 b) – 1 c) – 3 d) 3

4.53. Chọn câu đúng : $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-\sqrt{4x^2+1})$

a) - 1 b) 0 c) + ∞ d) đáp số khác

4.54. Chọn câu đúng : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}-\sqrt{x^2+3x+5}}{\sqrt[3]{x^3+1}+x}$

a) – ½ b) ½ c) 3/2 d) + ∞

4.55. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{1-x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+2x^4-6x^3+2x^2+x}{(x^2-1)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x^2-6x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-x}-1}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{2x-1-\sqrt{x+7}}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}}{x^2-4x+3}$

4.56. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x(x-1)}-|1-x|}{\sqrt{x^3-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{-x}+x^3}{\sqrt{-2x}+\sqrt{-x^2-4x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(x+2)|x-4|}{\sqrt{-x^2+9x-20}}$

4.57. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x+4}-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}-3}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\sqrt[3]{x+8}-\sqrt{x+4}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}+x}{x-1}$

4.58. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{4x^2+4x}-2x-3)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt[3]{x^3-x}+x+2)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3-x}-x+12)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{4x^2-x-1}-2\sqrt{x^2+x})$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[4]{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^2+x-6}\right)$

4.59. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5-x^3}+x}{\sqrt{3x^2+x-1}+x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4x^2+3x-1}-3x)$

4.60. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x^2+8x+15}+\dfrac{1}{x^2+4x+3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

4.61 a) Tìm m để $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+mx-m-3}-x}{x^2-5x+4}$ là một số hữu hạn và tìm số giới hạn đó .

b) Tìm a và b để $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+(a-5)x+a}{x^2+bx-b-1}=\dfrac{1}{8}$.

4.62. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(\sqrt{x+3}-2)}{\sqrt{x^2-2x+1}} & ;\text{ khi } x>1\\ \dfrac{x^2+ax}{x+1}; & \text{khi } x\le 1\end{cases}$

Tìm a để hàm số có giới hạn hữu hạn tại x = 1

4.63. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+a}{x^2-4} & ;\text{ khi } x>2\\ \dfrac{x^2+bx}{x+2}; & \text{khi } x\le 2\end{cases}$

Tìm a và b để hàm số có giới hạn hữu hạn tại x = 1

4.64. Tìm $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o}$ trong các trường hợp sau :

a) $f(x)=x^3-x$ và $x_0=2$ b) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+4}$ và $x_0=-3$

c) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ và $x_0=1$.

D. Hướng Dẫn – Đáp Số

4.50 (c) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+10)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{x+10}=\dfrac{2+5}{2+10}=\dfrac{7}{12}$

4.51. (a) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(3-x)-4x^2}{(\sqrt{3-x}-2x)(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(-4x+3)}{(\sqrt{3-x}-2x)(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(-4x+3)}{(\sqrt{3-x}-2x)(x-1)}=\dfrac{7}{-8}$

4.52. (c) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1+\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}$ **= - 3**

4.53. (b) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=0$

4.54.(a) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}+1}=\dfrac{-2+1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

4.55. a) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+5)}{(1-x)(1+x+x^2)}$ **= -** $\dfrac{7}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)(x^3+3x^2-3x-1)}{(x-1)^2(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)^2(x^2+4x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2} = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3}\sqrt{\dfrac{(x-3)(x+3)}{2x(x-3)}} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)(\sqrt{2x^2-x}+1)} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)} = \dfrac{3}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-(x+2)}{(x+\sqrt{x+2})}.\dfrac{2x-1+\sqrt{x+7}}{(2x-1)^2-(x+7)}$

$= \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+\sqrt{x+2})}.\dfrac{2x-1+\sqrt{x+7}}{(x-2)(4x+3)} = \dfrac{9}{22}$

f) $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1}}.\dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{1}{2}$

4.56. a) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{(x-1)}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{-x}(1-\sqrt{-x^5})}{\sqrt{-x}(2+\sqrt{x+4})} = \dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{(x-2)}\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}}{\sqrt{x-2}(x+2)} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{(x+2)\left(\sqrt{x-4}\right)^2}{\sqrt{x-4}\sqrt{5-x}} = 0$

4. 57. a) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1}.\dfrac{1}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{12}$

b) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1}.\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}+\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+5}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+1}\right) = \dfrac{3}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x(x+1)}+\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x(x+1)}\right) = -\dfrac{1}{12}$ => $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -12$

e) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sqrt{2x^2-x}-x}{x-1}+\dfrac{2x-\sqrt{x^2+3x}}{x-1}\right) = \dfrac{5}{4}$

4. 58. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8x-9}{\sqrt{4x^2+4x}+2x+3} = -2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 12 + \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3-x}-x) = 12 + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt[3]{(x^3-x)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2} = 12+0 = 12$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x-1}{\sqrt{4x^2-x-1}+2\sqrt{x^2+x}} = -\dfrac{5}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}\right) = -\infty$ vì

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}\right) = 0-1=-1$

4. 59. a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$= \frac{1}{2}.3 = \frac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{(5-x^3)^2}-x\sqrt[3]{5-x^3}+x^2}\cdot\frac{1}{x(-\sqrt{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1)} = \frac{5}{3}.0=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2+x}-x)+(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)\right]$

4.60. a) $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{1}{(x+3)(x+5)}+\frac{1}{(x+1)(x+3)}\right) = \lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+5)+(x+1)}{(x+3)(x+5)(x+1)} = \frac{-1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right) = \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = -1$

4.61 a) Vì khi $x\to4$ mẫu số $\to0$ nên điều kiện là tử số $\to0$ khi $x\to4$ ⇔ $\sqrt{4^2+3m-3}-4=0$ ⇔ 16 + 3m-3 = 16 ⇔ $m=1$. Khi đó :

$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x^2+mx-m-3}-x}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x^2+x-4}-x}{(x-4)(x-1)} = \lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{(\sqrt{x^2+x-4}+x)(x-4)(x-1)}$

$= \frac{1}{24}$.

b) Vì MS = (x – 1)(x + 1 + b) nên MS $\to0$ khi $x\to1$. Do đó điều kiện cần là TS $\to0$ khi $x\to1$ ⇔ 1^2 + (a – 5) + a = 0 ⇔ $a=2$. Khi đó :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+(a-5)x+a}{x^2+bx-b-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+1+b)} = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x-2)}{(x+1+b)} = = \frac{-1}{2+b}$

Ta phải có : $\frac{-1}{2+b} = \frac{1}{8}$ <=> $b=-10$

4.62. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1) = \frac{1+a}{2}$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{a(x-1)}{(\sqrt{x+3}+2)}\cdot\frac{1}{|x-1|} = \frac{a}{4}$

Để hàm số có giới hạn tại x = 1 thì $\frac{1+a}{2} = \frac{a}{4}$ <=> $a=-2$

4.63. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = f(2) = \frac{2+b}{2}$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{u(x)}{(x-2)(x+2)}$$

- Nếu u(2) = a ≠ 0 thì $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } u(2) > 0 \\ -\infty \text{ nếu } u(2) < 0 \end{cases}$ thì f(x) không giới hạn tại x = 2
- Nếu u(2) = a = 0 thì $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{2}$ và hàm số có giới hạn tại x = 2 ⇔

  $\frac{2+b}{2} = \frac{1}{2} <=> b = -1$

Vậy khi a = 0 và b = - 1 thì hàm số có giới hạn tại x = 2.

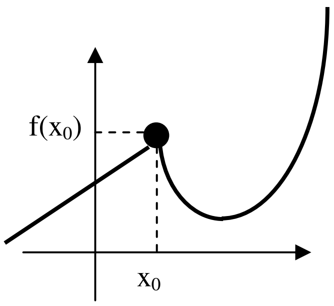
4.64.. a) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^3-x)-6}{x-2} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{(x-2)} = 11$ t

b) 7 c) 1

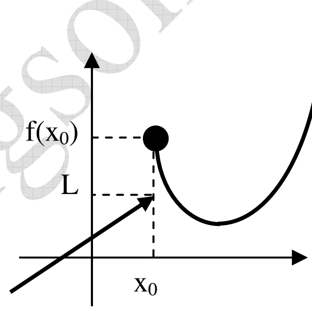
§8. Hàm số liên tục

A. Tóm Tắt Giáo Khoa .

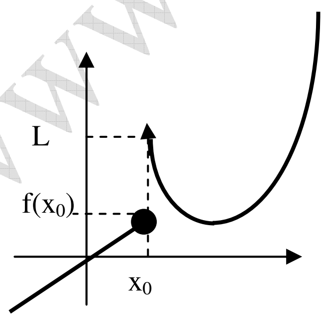
1. Cho hàm số f(x) xác định trên (a ; b) và $x_0 \in (a ; b)$:
   - f(x) **liên tục tại điểm x_0** ⇔ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
   - f(x) không liên tục tại x_0 được gọi là **gián đoạn tại x_0 .**



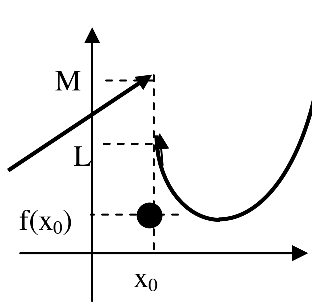
Hình 1 : f(x) liên tục tại x_0
(đồ thị liền lạc tại điểm (x_0 ; f(x_0))
⇔ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$



Hình 2 : f(x) gián đoạn tại x_0
(đồ thị " đứt đoạn tại điểm (x_0 ; f(x_0))
vì $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \mathbf{L}$



Hình 3 : f(x) gián đoạn tại x_0
vì $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$



Hình 4 : f(x) gián đoạn tại x_0
vì $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \neq f(x_0)$
và $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = M \neq f(x_0)$

2. a) f(x) liên tục trên khoảng (a ; b) ⇔ f(x) liên tục tại $\forall x_0 \in (a ; b)$

b) f(x) liên tục trên đoạn [a ; b] ⇔ $\begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } (a\,;\,b) \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)\,;\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$

Ý nghĩa hình học : Nếu f liên tục trên [a , b] thì đồ thị là một đường liền nét từ điểm đầu (a ; f(a)) đến điểm cuối (b ; f(b)).

3. Hàm số đa thức , lượng giác cũng như tổng , hiệu, tích , thương , căn . . . của các hàm số ấy liên tục trên tập xác định của chúng .

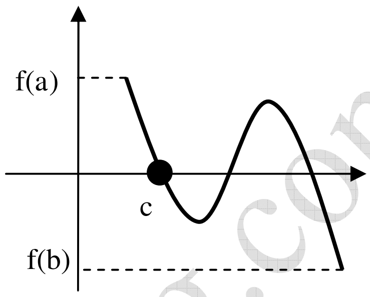
4. Tính chất của hàm số liên tục :

Định lí : (Định lí về giá trị trung gian)

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn [a ; b] . Nếu f(a) ≠ f(b) thì ∀ M nằm giữa f(a) và f(b) , tồn tại ít nhất một điểm c ∈ (a ; b) sao cho f(c) = M

Hệ quả : Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a; b] và f(a).f(b) < 0 thì tồn tại ít nhất một điểm c ∈ (a ; b) sao cho f(c) = 0 .

- Phát biểu khác :
  Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a; b] và f(a).f(b) < 0 thì phương trình : f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm ∈ (a ; b)



B. Giải Toán

Dạng 1 : Xét tính liên tục của hàm số tại điểm x_0.

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \end{cases}$ thì hàm số liên tục tại x_0 .

- Nếu $\left[\begin{array}{l} f(x) \text{ không xác định tại } x_o \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \ne f(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) \ne f(x_o) \end{array}\right.$ thì hàm số gián đoạn tại x_0 .

Ví dụ 1 : Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm x_0

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x\,;\ x \ge 1 \\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}\,;\ x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+2x}\ ;x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{\sin x + 1}}{4}\,;\ x < 0 \\ \dfrac{1}{8}\ ;\ x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$

Giải a) Ta có $f(1) = 1^2 - 1 = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2 - x) = f(1) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}\right) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(1-x)(x+1)}{\sqrt{1-x}} = -\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\,(x+1) = 0$ **=>** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ **=>** f(x) liên tục tại điểm $x_0 = 1$

b) Ta có $f(0) = \dfrac{1}{8}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}+2}.\dfrac{1}{x(x+2)}$

  $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}.\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{\sin x+1}}{4} = \dfrac{\sqrt{\sin 0+1}}{4} = \dfrac{1}{4}$ **=>** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$

Vậy f(x) gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.

Ví dụ 2 : Định a để hàm số sau liên tục rại điểm $x_0 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+7}-3}} & ; x > 2 \\ \dfrac{2x-a}{x-1} & ; x \leq 2 \end{cases}$$

Giải

- Ta có : f(2) = $\dfrac{2(2)-a}{2-1} = 4-a$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-a}{x-1} = 4-a = f(2)$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} a\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+7}-3}} = \lim\limits_{x\to 2^+} a\sqrt{(x-1)(x-2).\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{x-2}}$

  $= \lim\limits_{x\to 2^+} a\sqrt{(x-1).\left(\sqrt{x+7}+3\right)} = a\sqrt{1.(3+3)} = a\sqrt{6}$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

⇔ $4 - a = a\sqrt{6} \iff a = \dfrac{4}{1+\sqrt{6}}$

Dạng 2 : Chứng minh hàm số liên tục trên một khỏang , đoạn .

Sử dụng định nghĩa và nhớ mọi hàm số đa thức , hữu tỉ , vô tỉ , lượng giác . . . đều liên tục tại mọi điểm mà nó xác định .

Ví dụ 3 : Chứng minh hàm số sau liên tục trên [1 ; + ∞) :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}} & ; x > 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

Giải :

- Với x > 1 : f(x) = $\dfrac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}$ luôn xác định nên f(x) liên tục khi x> 2 (1)
- Tại x = 1 : f(1) =

  Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{(x-1)(x+3)}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}} = 1 = f(1)$ (2)

  Từ (1) và (2) hàm số liên tục trên [1 ; + ∞)

* **Ví dụ 4 :** Định a và b để hàm số sau liên tục trên R :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-ax-1}{x^2+x-2} & ; x > 1 \\ bx^2-3x+4 & ; x \leq 1 \end{cases}$$

- Xét x > 1 : $f(x) = \dfrac{2x^2 - ax - 1}{x^2 + x - 2} = \dfrac{2x^2 - ax - 1}{(x-1)(x+2)}$ xác định nên f(x) liên tục khi x > 1
- Xét x < 1 : $f(x) = bx^2 - 3x + 4$ xác định nên f(x) liên tục khi x < 1.
- Tại x = 1 : $f(1) = b(1)^2 - 3.1 + 4 = b + 1$.
  Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(bx^2 - 3x + 4) = b + 1$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2 - ax - 1}{(x-1)(x+2)}$

Khi $x \to 1$, tử tiến tới 1 – a , mẫu tiến tới 0 . Nếu 1 – a ≠ 0 ⇔ a ≠ 1 , f(x) tiến tới vô cực . Suy ra hàm số không liên tục tại x = 1 . Do đó điều kiện cần để hàm số liên tục tại x = 1 là 1 – a = 0 ⇔ a = 1 . Khi đó :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x+2} = \frac{3}{3} = 1$$

Vậy hàm số liên tục trên R ⇔ f(x) liên tục tai x = 1 ⇔ $\begin{cases} a = 1 \\ b + 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Dạng 3 : Chứng minh phương trình f(x) = 0 có nghiệm thuộc (a ; b)

Gồm 2 bước :

- Chứng minh hàm số f(x) liên tục trên (a ; b) .
- Chứng minh f(a).f(b) < 0

Ví dụ 5 : Chứng minh phương trình :
a) $x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm .
b) $\sin^3 x = 3 - x$ có nghiệm .

Giải : a) Xét hàm số $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ liên tục trên R .
Lại có : f(0) = - 1 < 0 , $f(3) = 3^4 - 3.\ 3^3 + 2.\ 3 - 1 = 3 > 0$, $f(-1) = (-1)^4 - 3.(-1)^3 + 2(-1) - 1 = 1$.
Vì f(0).f(3) < 0 nên phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm thuộc (0 ; 3)
Vì f(0) .f(-1) < 0 nên phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm thuộc (- 1; 0)
Vậy phương trình f(x) = 0 có ít nhất hai nghiệm .

b) Ta có : $\sin^3 x = 3 - x \Leftrightarrow \sin^3 x + x - 3 = 0$
Xét hàm số $f(x) = \sin^3 x + x - 3$ liên tục trên R .
Lại có : f(0) = sin0 + 0 – 3 = - 3 < 0
$f(\pi) = \sin^3 \pi + \pi - 3 > 0$
Vì f(0).f(π) < 0 nên phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm (thuộc (0 ; π))

Ví dụ 6 : Chứng minh phương trình :
a) $m(x-1)^3 (x^2 - 4) + x^4 - 3 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm với mọi m ,
b) $x^3 - 2(m^2 + 2) x^2 + mx + m^2 + m + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm với mọi m .

Giải : a) Xét hàm số : $f(x) = m(x-1)^3 (x^2 - 4) + x^4 - 3$ liên tục trên R ,
Ta có **:** $f(1) = m.0 + 1^4 - 3 = -2$; $f(2) = f(-2) = m,0 + 2^4 - 3 = 13$
Vì f(- 2).f(1) < 0 và f(1).f(2) < 0 nên phương trình có ít nhất 2 nghiệm thỏa : $-2 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.
Ghi chú : Ta ưu tiên chọn các giá trị của x làm mất tham số m là x = 1 , x= ± 2.

b) Xét hàm số $f(x) = x^3 - 2(m^2 + 2)x^2 + mx + m^2 + m + 1$ liên tục trên R .
Ta có **:** $f(0) = m^2 + m + 1 > 0$, với mọi m .
$f(1) = 1 - 2(m^2 + 2) + m + m^2 + m + 1 = -m^2 + 2m - 2 < 0$, với mọi m .
Suy ra : f(0).f(1) < 0 , ∀ m . Do đó phương trình : f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm ∈ (0 ; 1) .

Mặt khác : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, do đó với x = x_1 đủ lớn thì f(1).f(x_1) < 0 => phương trình f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm $\in (1 ; x_1)$.

Tương tự : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, do đó với x = x_2 đũ lớn thì f(0).f(x_2) > 0 => phương trình f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm $\in (x_2; 0)$.

Do đó phương trình f(x) = 0 có ít nhất 3 nghiệm . Nhưng một phương trình bậc 3 thì có nhiều nhất là 3 nghiệm , vì vậy phương trình f(x) = 0 có đúng 3 nghiệm với mọi m .

C. Bài Tập Rèn Luyện

4.65. Xét tính liên tục của hàm số tại x_0 :

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x}-1} \ ; \ x > 1 \\ \dfrac{2-2x}{x^2+2x-3} \ ; x < 1 \\ -\dfrac{1}{2} \ , x = 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|x}{x^2+2x-3}; x \neq 1 \\ \dfrac{1}{4} \ ; x = 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x-4}}{\sqrt{x^2-4x}}; x > 4 \\ \dfrac{2x+4}{x+2} \ ;x \le 4 \end{cases}$; $x_0 = 4$

4.66 . Định các giá trị của tham số để hàm số sau liên tục tại điểm x_0 .

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} \ ; x < 0 \\ a + \dfrac{4-x}{x+2}, x \ge 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} + ax + b, x > 1 \\ 4, \ x = 1 \qquad ,x > 1 \\ \dfrac{a(x^3+x^2+x-3)}{x^2-3x+2} \ ,x < 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1})}{-x^2-x}, x < 0 \\ \dfrac{x^2+(a-1)x+b}{x}, x > 0 \\ 1; \ \ x = 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

4.67. Chứng minh hàm số : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^3-x^2+x-1} \text{ nếu } x < 1 \\ 3 \text{ nếu } x = 1 \\ \dfrac{3x-3}{x^2-x} \text{ nếu } x > 1 \end{cases}$ liên tục trên R .

4.68.Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-2}{x-2} \text{ nếu } x > 2 \\ ax - a + 4 \text{ nếu } x \le 2 \end{cases}$ liên tục trên R .

4.69. Chứng minh phương trình :

a) $\cos^2 x - \sqrt{x} = 0$ có ít nhất 1 nghiệm

b) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 14 = 0$ có đúng 4 nghiệm

c) $x^4 + x - 10 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm .

4.70. a) Chứng minh phương trình : $\frac{x^4 - x^2 + mx - m + 1}{x^2 - x - 2} = m$ có ít nhất 2 nghiệm với mọi m > 1

b) Chứng minh phương trình : $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + m^2x^2 + mx - 10m^2 - 4 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm .

c) Chứng minh phương trình : $x^3 - 3x = m$ có ít nhất 2 nghiệm , $\forall$ m $\in$ (- 2; 2)

4.71. Chứng minh :

a) Phương trình : $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ có nghiệm $\forall$ m .

b) Phương trình : m(2cosx - $\sqrt{2}$) = 2sịn5x + 1 , $\forall$ m.

c) Phương trình : cos2x + acosx + bsinx = 0 có nghiệm , $\forall$ a , b .

d) Phương trình : $m\sin \pi x + m - x = 0$ có nghiệm , $\forall$ m .

e) $(m^2 + 2m + 2)(x - 1)^5 + x - m^2 + 2m = 0$ có nghiệm , $\forall$ m $\in$ [1 ; 2]

4.72. Cho phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Biết a. f(c) < 0 , chứng minh phương trình : $a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x$ có nghiệm .

D. Hướng Dẫn – Đáp Số

4.65 . a) f(1) = - $\frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(1-x)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{5-x}+2)(x-1)} = -\frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2(1-x)}{(x-1)(x+3)} = -\frac{1}{2}$

Vậy f(x) liên tục tại $x_0 = 1$.

b) f(1) = $\frac{1}{4}$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+3)} = -\frac{1}{4}$

Vậy f(x) gián đoạn tại $x_0 = 1$.

c) f(4) = 2

- $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}\sqrt{x}} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 2$

Vậy f(x) liên tục tại $x_0 = 4$

4.66 . a) f(0) = a + 2

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = a + 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = -1$

f(x) liên tục tại $x_0 = 0$ ⇔ a + 2 = - 1 ⇔ a = - 3 .

b) f(1) = 4

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left[\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} + ax + b\right] = \frac{1}{2} + a + b$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a\frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{(x-1)(x-2)} = -6a$

f(x) liên tục tại $x_0 = 1$ ⇔ $4 = \frac{1}{2} + a + b = -6a$ ⇔ a = - $\frac{2}{3}, b = \frac{25}{6}$.

c) f(0) = 1

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} a\left[\dfrac{-x}{-x(x+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1})}\right] = \dfrac{a}{2}$
- Khi x $\to o^+$, tử $\to b$, mẫu $\to 0$, vậy $b = 0$. Khi đó :

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x+a-1)}{x} = a-1$

  f(x) liên tục tại $x_0 = 0$ ⇔ 1 = $\dfrac{a}{2} = a-1$ và $b = 0$ ⇔ a = 2 và b = 0

4.67. Khi x < 1 : f(x) = $\dfrac{2(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+1)}$ luôn xác định nên liên tục .

- Khi x < 1 : f(x) = $\dfrac{3(x-1)}{x(x-1)}$ luôn xác định nên liên tục .
- Xét x = 1 : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2(x+2)}{x^2+1} = 3 = f(1)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{x} = 3 = f(1)$. Vậy f(x) liên tục khi x = 1 .

  Kết luận f(x) liên tục trên R .

4.68. Khi x > 2 : f(x) luôn xác định nên liên tục .

- Khi x < 2 : f(x) luôn xác định nên liên tục .
- Xét x = 2 : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2(x-2)}{(\sqrt[3]{(2x+4)^2}+2\sqrt[3]{(2x+4)}+2^2)(x-2)} = \dfrac{1}{6}$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(2) = a+4 = f(1)$.

  Vậy f(x) liên tục trên R ⇔ f(x) liên tục tại x = 2 ⇔ a + 4 = $\dfrac{1}{6}$

  ⇔ a = - $\dfrac{23}{6}$

4.69. a) Xét hàm số : f(x) = $\cos^2 x - \sqrt{x}$ liên tục khi $x \geq 0$

Ta có : f(0) = 1 và $f(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} < 0$ => đpcm .

b) Xét hàm số : f(x) = $x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 14$ liên tục trên R . Ta có bảng giá trị sau :

X	-3	-2	0	2	4
F(x)	35	-10	14	-10	70

Suy ra phương trình có ít nhất 4 nghiệm thỏa $-3 < x_1 < -2 < x_2 < 0 < x_3 < 2 < x_4 < 4$.
Nhưng một phương trình bậc 4 có nhiều nhất 4 nghiệm , do đó phương trình cho có đúng 4 nghiệm .
Ghi chú :Có thể thay hai giá trị f(-3) và f4) bằng $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty > 0$

c) Xét hàm số : f(x) = $x^4 + x - 10$

X	- 2	0	2
F(x)	4	-10	8

Vậy phương trình f(x) = 0 có í nhất 2 nghiệm thỏa $-2 < x_1 < 0 < x_2 < 2$

4.70. a) Điều kiện $x \neq -1 ; 2$.
Phương trình ⇔ $x^4 - x^2 + mx - m + 1 = m(x^2 - x - 2)$
⇔ f(x) = $x^4 - x^2 + 1 - m(x^2 - 2x + 1) = 0$ ⇔ $x^4 - x^2 + 1 - m(x-1)^2 = 0$
f(- 1) = 1 – 4m > 0 , f(0) = 1 – m < 0 , f(1) = 1 > 0
Vì f(x) liên tục trên (– 1 ; 2) nên phương trình f(x) = 0 có ít nhất 2 nghiệm thỏa : $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$
b) Xét hàm số f(x) ở VT , liên tục trên miền xác định $(-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty)$

Ta có : $\begin{cases} f(1) = -9m^2 + m - 4 < 0 ,\ \forall m \\ f(-10) = 90m^2 - 10m + \sqrt{143} - 4 > 0 ,\ \forall m \end{cases}$ => phương trình f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm $\in$ (- 10 ; - 1)

$\begin{cases} f(3) = -m^2 + 3m - 4 < 0 ,\ \forall m \\ f(10) = 90m^2 + 10m + \sqrt{63} - 4 > 0 ,\ \forall m \end{cases}$ => phương trình f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm $\in$ (3 ; 10)

Suy ra đpcm .

Ghi chú : Các giá trị x = 10, - 10 để dễ tính và sao cho các tam thức theo m có a > 0 và $\Delta < 0$. Có thể thay các giá trị này $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *,* $\forall$ *m .*

c) Xét hàm số : $f(x) = x^3 - 3x - m$ liên tục trên R .

Ta có : f(1) = - 2 – m < 0 , f(2) = 2 – m > 0 , f(- 2) = - 2 – m < 0 , f(- 1) = 2 – m > 0

Vì f(1).f(2) < 0 và f(- 2) .f(- 1) < 0 nên phương trình f(x) = 0 có ít nhất 2 nghiệm

4.71. Điều kiện sinx.cosx $\neq$ 0 , phương trình $\Leftrightarrow$ f(x) = sinx – cosx – msinxcosx = 0 (1)

Ta có f(x) liên tục trên R và f(0) = - 1 < 0 , $f(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$, do đó phương trình (1) có nghiệm $\in (0 ; \frac{\pi}{2})$.

Nghiệm này thỏa điều kiện nên cũng là nghiệm của phương trình đã cho .

Ghi chú : Hai giá trị ta lấy làm cho biểu thức chứa tham số bằng 0 .

b) Ta lấy hai giá trị làm cho biểu thức chứa tham số bằng 0 là $x = \frac{\pi}{4}$ và $-\frac{\pi}{4}$

c) Ta lấy hai giá trị $x = \frac{\pi}{4}$ và $\frac{5\pi}{4}$ và được $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a + b$; $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -(a+b)$ => $f\left(\frac{\pi}{4}\right)f\left(\frac{5\pi}{4}\right) \leq 0$ trái dấu.

d) f(0) = m , f(2m) = m.sin2mπ - m = m (sin2mπ - 1) .

Ta có : f(0).f(2m) = m^2 (sin2mπ - 1) $\leq$ 0 => đpcm .

4.72. a) Xét hàm số : $g(x) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c - x$ liên tục trên R . Ta có : af(c) < 0 => phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm x_1 , x_2 và $x_1 < c < x_2$.

Suy ra $g(x_1) = af(x_1)^2 + bf(x_1) + c - x_1 = c - x_1 > 0$ và tương tự $g(x_2) = c - x_2 < 0$

Do đó : $g(x_1).g(x_2) < 0$ => đpcm .

§9. Trắc nghiệm cuối chương

A. CÂU HỎI .

Ghi chú : Học sinh không được dùng máy tính khi làm bài .

1. Ta có : $\lim \frac{(-n-6)^5}{(n+1)^2(n-7)^4} =$

a) 0 b) 1 c) - 1 d) + ∞

2. Ta có : $\lim \frac{(2n+7)^{11}}{(2n+1)^5(4n^3-7)^2} =$

a) 1/4 b) 0 c) 4 d) + ∞

3. Ta có : $\lim (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+6}) =$

a) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ b) 0 c) – ∞ d) + ∞

4. Ta có : $\lim \frac{n+1-\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}} =$

a) **– 1** b) - 2 c) + ∞ c) – ∞

5. Ta có : $\lim \dfrac{(2^n - 3^{n+1})^2}{(2^{n+1} + 3^n)(2^n - 4.3^n)} =$

a) - $\dfrac{9}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) 0

6. Một ngừơi tính gởi tiết kiệm kỳ hạn 1 năm với lãi suất 10% một năm . Đến kỳ hạn lại gởi tiếp cả vốn lẫn lãi cho năm tiếp theo và cứ thế cho đến khi sau n năm số tiền lãnh ra , kể cả vốn lẫn lãi, ít nhất phải gấp đôi số tiền vốn ban đầu . Vậy ông ta phải gởi tối thiểu liên tục là bao nhiêu năm ?

a) 8 năm b) 9 năm c) 10 năm d) lâu hơn 10 năn

7. Ta có : $\lim\limits_{x \to x_0} (\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1+2} + ... + \dfrac{1}{1+2+...+n}) =$

a) 1, 5 b) 1, 8 c) 2 d) + ∞

8. Ta có sau khi khử dạng vô định thì $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^4 + 3x^3}{x^2 - 2x - 15} =$

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{-3x^2}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3}{x-5}$ c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{9x}{2x-2}$ d) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{27}{11+x}$

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7} - \sqrt{x+8}}{x^2 + 5x - 6}$ là một phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$ mà a + b =

a) 40 b) 41 c) 42 d) 43

10. Ta có : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9} - x^2 - 3}{\sqrt{x+1} - x - 1} =$

a) - $\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{1}{6}$ c) - $\dfrac{1}{3}$ d) 0

11. Ta có : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3-2x}}{x^2 - 1} =$

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) 1 d) $\dfrac{4}{3}$

12. Ta có : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{4x^2 + 6x - 2}) =$

a) - $\dfrac{5}{4}$ b) $\dfrac{5}{4}$ c) – ∞ d) + ∞

13. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{3x^2 - 4x - 4} - \dfrac{1}{x^2 - 12x + 20} \right)$ là một phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$ ($b > 0$) và $b - a =$

a) 15 b) 16 c) 17 d) đáp số khác

14. Ta có : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 7} - \sqrt{x+3}}{3x - 2 - \sqrt{x^2 - x - 1}} =$

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) + ∞

15. Ta có : $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2} - |x-2|}{|4 - x^2|} =$

a) + ∞ b) – ∞ c) 0 d) ¼

16. Hàm số nào dưới đây liên tục tại $x_0 = 1$

(I) $f(x) = \dfrac{|x-1| + 3}{|1-x| - 1}$ (II) $g(x) = \begin{cases} 2x - 1 ; \text{ khi } x \ge 1 \\ \dfrac{2\sqrt{x+3} - 4}{\sqrt{x} - 1} \text{ khi } 0 < x < 1 \end{cases}$

a) Chỉ (I) b) Chỉ (II)

c) Cả (I) và (II) d) Không hàm số nào .

17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{x-2} \ ; \ x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + ax - a - 1}{x^2 + (a+2)x - a - 3} \ ; x > 1 \end{cases}$

Có hai giá trị của a để để hàm số sau liên tục tại $x_0 = 1$ và tích của chúng là :

a) – 6 b) 6 c) – 3 d) đáp số khác

18. Hàm số nào dưới đây liên tục trên R

(I) $f(x) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+3x+3}}$ (II) $g(x) = \dfrac{x+7}{|x|-3}$

(III) $\begin{cases} 2x+3 \ \ ; x \ge 1 \\ \dfrac{4(\sqrt{5-x} - 2x)}{x^2 - 3x + 2} \ ; x < 1 \end{cases}$

a) Chỉ (I) và (II) b) Chỉ (II) và (III)

c) Chỉ (I) và (III) d) Cả (I), (II) và (III)

19. Định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+m} \ ; x \le 1 \\ \dfrac{m(\sqrt{2x-1} - \sqrt{x})}{x-1} \ ; x > 1 \end{cases}$

liên tục trên R

a)không có m b) m = 1 hay m = - 2

c) m = 1 d) m = - 2

20. Phương trình nào sau đây có nghiệm với mọi m :

(I) $m(x^2 - 3x + 2) + x^4 - 3 = 0$

(II) $m(x - 1)(x + 4) + x^3 - 4x = 0$

a) Không phương trình nào b) Chỉ (I)

c) Chỉ (II) d) Cả (I) và (II)

B. BẢNG TRẢ LỜI

1(a) 2(c) 3(b) 4(d) 5(a) 6(a) 7(c) 8(b) 9(d) 10(c)
11(d) 12(b) 13(c) 14(b) 15(a) 16(c) 17(b) 18(c) 19(d) 20(d)

C. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (a) Vì bậc của tử là 5 trong khi bậc của mẫu là 6 nên $\lim u_n = 0$

2. (c) $\lim u_n = \lim \dfrac{\left(2+\dfrac{7}{n}\right)^{11}}{(2+\dfrac{1}{n})^5(4-\dfrac{7}{n^3})^2} = \dfrac{2^{11}}{2^5.4^2} = 4$

3. (b) $\lim u_n = \lim \dfrac{-3}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+6}} = 0$

4. (d) $\lim u_n = \lim \dfrac{-n}{n+1+\sqrt{n^2+3n+1}}.\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}{1} = -\infty$

5. (a) $\lim u_n = \lim \dfrac{\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3\right)^2}{\left(2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1\right)\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 4\right)} = \dfrac{(-3)^2}{1.(-4)} = -\dfrac{9}{4}$

6. (a) Gọi u_n là số tiền rút ra (gồm cả vốn và lãi) sau n năm . Theo giả thiết , ta có : $u_n = u_{n-1} + 0,1(u_{n-1}) = u_{n-1}.1,1$, $\forall n \geq 1$.
Vậy (u_n) là số hạng của một cấp số nhân công bội là q = 1, 1 và số hạng đầu (tiền rút được sau một năm) là $u_1 = 1,1u$ (u : số tiền gởi ban đầu).
Để số tiền nhận được ít nhất gấp đôi số vốn đầu tiên đã gởi , ta phải có :

$$2u = u_1 . q^{n-1} = 1,1u.(1,1)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = (1,1)^n$$

Ta tìm số n nguyên nhỏ nhất sao cho : $(1,1)^n \geq 2$.
Dùng máy tính , ta được : n = 8

7. (c) Dùng công thức : $1 + 2 + ... + k = \dfrac{k(k+1)}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1+2+...+k} = \dfrac{2}{k(k+1)} = 2\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$\Rightarrow \lim u_n = \lim\left[2\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

$= \lim\left[2\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right] = 2$

8. (b) $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3(x+3)}{(x+3)(x-5)} = \lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3}{x-5}$

9. (d) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}}.\dfrac{1}{(x-1)(x+6)} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8})(x+6)} = \dfrac{1}{42}$

=> a + b = 43

10. (c) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^4-6x^2+x}{\sqrt{x+9}+x^2+3}.\dfrac{\sqrt{x+1}+x+1}{-x^2-x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^3-6x+1}{\sqrt{x+9}+x^2+3}.\dfrac{\sqrt{x+1}+x+1}{-x-1} = -\dfrac{1}{3}$

11. (d) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x\sqrt{2x-1}-1}{(x-1)(x+1}+\dfrac{1-\sqrt[3]{3-2x}}{(x-1)(x+1)}\right]$

$= \lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{(2x^2+x+1)}{(x\sqrt{2x-1}+1)(x+1)}+\dfrac{2}{\left(1+\sqrt[3]{(3-2x)^2}+1\right)(x+1)}\right] = 1+\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$

12. (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x+3}{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+5x-2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{4+\dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}$

$= \dfrac{5}{4}$

13. (c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)(3x+2)} + \dfrac{1}{(x-2)(x-10)}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-8}{(x-2)(3x+2)(x-10)}$ $= -\dfrac{1}{16} = \dfrac{-1}{16}$ => b – a = 17

14. (b) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{7}{x^2}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{3-\dfrac{2}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{2-0}{3-1} = 1$

15. (a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}-(x-2)}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}(1-\sqrt{x-2})}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}(x+2)} = +\infty$ vì mẫu $\to 0^+$ và tử $\to 1$

16. (c) * Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{0+3}{0-1} = -3$ => f(x) liên tục tại x = 1

* $g(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = g(1) = 1$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}.\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1} = 1$

=> g(x) liên tục tại x = 1

17. (b) Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = -1-a$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1+a)}{(x-1)(x+a+3)} = \dfrac{a+2}{a+4}$

Vậy $-1-a = \dfrac{a+2}{a+4}$ <=> $a^2 + 6a + 6 = 0$

Có hai giá trị của a và tích là 6 .

18. (c) * Hàm số f(x) là hàm số vô tỷ , xác định trên R nên liên tục trên R .

* Hàm số g(x) không xác định khi x = $\pm$ 3 nên không liên tục trên R .

* Xét hàm số h(x) : Khi x > 1 : h(x) = 2x + 3 nên f(x) liên tục .

Khi x < 1 : $h(x) = \dfrac{4(\sqrt{5-x}-2x)}{(x-1)(x-2)}$ xác định nên liên tục .

Khi x = 1 : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 5$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{20(1-x)}{(\sqrt{5-x}+2x)(x-1)(x-2)} = 5$

Vậy hàm số liên tục khi x = 1. Kết luận h(x) liên tục trên R .

19. (d) * Khi x <1 ; f(x) liên tục khi nó xác định khi x < 1 ⇔ m < - 1

* Khi x > 1 : f(x) xác định nên liên tục .

* Khi x = 1 : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{1+m}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{m(x-1)}{(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x})(x-1)} = \dfrac{m}{2}$

Để f liên tục trên R thì f liên tục tại x = 1 ⇔ $\dfrac{1}{1+m} = \dfrac{m}{2}$ ⇔ $m^2 + m - 2 = 0$ ⇔ m = 1 hay m = - 2. Vì m ≤ - 1 nên m = - 2 .

20. (d) * Xét (I) : Hàm số f(x) ở vế trái liên tục trên R và f(1) = - 2, f(2) = 13 nên phương trình f(x) = 0 có nghi thuộc (1 ; 2)

* Xét (II) : Hàm số f(x) ở vế trái liên tục trên R và f(0) = - 4m , f(2) = 6m => f(0)f(2) = - $24m^2 \leq 0$ nên phương trình có nghiệm thuộc [0 ; 2] .

Vậy cả hai phương trình đều có nghiệm với mọi m .